

Initiation à la sémantique (2)

Solange Coupet-Grimal

April 1, 2010

Syntaxe

Types : s, t, ...

Termes : M, N, P ...

Variables des termes: x, y, ... f, g, ...

Les types $t ::= \text{nat} \mid \text{bool} \mid s \rightarrow t$ **Les termes** $M ::= 0 \mid \text{true} \mid \text{false} \mid (\text{succ } M) \mid (\text{pred } M) \mid (\text{zero? } M) \mid \text{if } M \text{ then } N \text{ else } P \mid x \mid \lambda x:t. M \mid (M N) \mid \mu f:t. M$

$$\mu f:t. M \quad \sim \quad \text{let rec } f = M$$

Syntaxe

Types : s, t, \dots

Termes : $M, N, P \dots$

Variables des termes: $x, y, \dots f, g, \dots$

Les types $t ::= \text{nat} \mid \text{bool} \mid s \rightarrow t$

Les termes $M ::= 0 \mid \text{true} \mid \text{false} \mid (\text{succ } M) \mid (\text{pred } M) \mid (\text{zero? } M) \mid \text{if } M \text{ then } N \text{ else } P \mid x \mid \lambda x_{:t}. M \mid (M \ N) \mid \mu f_{:t}. M$

$$\mu f_{:t}. M \quad \sim \quad \text{let rec } f = M$$

$\mu f_{:\text{nat} \rightarrow \text{nat}}. (\lambda n_{:\text{nat}}. \text{if}(\text{zero? } n) \text{ then succ } 0 \text{ else } (g_m \ n \ (f \ (\text{pred } n))))$

Notations

$$\underline{n} = \underbrace{(succ \dots (succ 0))}_{n \text{ fois}}$$

$$\mu f_{:\text{nat} \rightarrow \text{nat}} \cdot (\lambda n_{:\text{nat}} \cdot \text{if}(\text{zero?}n) \text{ then } \underline{1} \text{ else } (g_m n (f (\text{pred } n))))$$

Règles de typage

Les 3 règles de typage de λ^{\rightarrow}

▶ $H \cup \{x : t\} \vdash x : t$ (1) *projection*

▶
$$\frac{H \vdash M : s \rightarrow t \quad H \vdash N : s}{H \vdash (MN) : t}$$
 (2) *application*

▶
$$\frac{H \cup \{x : s\} \vdash M : t}{H \vdash \lambda_{x:s}.M : s \rightarrow t}$$
 (3) *abstraction*

Règles de typage

Les types `bool` et `nat` $\vdash 0 : \text{nat}$ $\vdash \text{false} : \text{bool}$ $\vdash \text{true} : \text{bool}$

$$\frac{H \vdash M : \text{nat}}{H \vdash (\text{succ } M) : \text{nat}}$$

$$\frac{H \vdash M : \text{nat}}{H \vdash (\text{pred } M) : \text{nat}}$$

$$\frac{H \vdash M : \text{nat}}{H \vdash (\text{zero? } M) : \text{bool}}$$

$$\frac{H \vdash B : \text{bool} \quad H \vdash M : t \quad H \vdash N : t}{H \vdash \text{if } B \text{ then } M \text{ else } N : t}$$

Règles de typage

L'opérateur de point fixe μ

$$\frac{H \cup \{f : t\} \vdash M : t}{H \vdash \mu_{f:t}.M : t}$$

Règles équationnelles

Toutes les règles équationnelles de λ^{\rightarrow}
et les règles de congruence comme

$$\frac{H \triangleright M = M' := \text{bool} \quad H \triangleright N = N' : t \quad H \triangleright P = P' : t}{H \triangleright \text{if } M \text{ then } N \text{ else } P = \text{if } M' \text{ then } N' \text{ else } P' : t}$$

Règles équationnelles

Les types `bool` et `nat`

$$H \triangleright \text{pred } 0 = 0 : \text{nat} \text{ (pr0)} \quad H \triangleright \text{pred } (\text{succ } \underline{n}) = \underline{n} : \text{nat} \text{ (prS)}$$

$$H \triangleright \text{zero?}0 = \text{true} : \text{bool} \text{ (z0)} \quad H \triangleright \text{zero?}(\text{succ } n) = \text{false} : \text{bool} \text{ (zS)}$$

$$\frac{H \vdash M : t \quad H \vdash N : t}{H \triangleright \text{if true then } M \text{ else } N = M : t} \text{ (IfTrue)}$$

$$\frac{H \vdash M : t \quad H \vdash N : t}{H \triangleright \text{if false then } M \text{ else } N = N : t} \text{ (IfFalse)}$$

Règles équationnelles

La règle μ : étude d'un exemple

Dépliage : $Fact \rightsquigarrow \lambda n. \text{if } n = 0 \text{ then } \underline{1} \text{ else } n * (Fact) (n - 1)$

$Mult : nat \rightarrow nat$ un terme supposé connu et
 $\mu f : nat \rightarrow nat.M$ (cf. `let rec f = M`)

$$M = \lambda n : nat. \text{if } (zero? n) \quad \text{then } \underline{1} \\ \quad \quad \quad \text{else } (Mult n) (f (pred n))$$

$$\mu f.M \quad \quad \quad M \equiv \lambda n. \text{if } n = 0 \text{ then } \underline{1} \text{ else } n * (f (n - 1))$$

$$M[f := \mu f.M] \equiv \lambda n. \text{if } (zero? n) \text{ then } \underline{1} \text{ else } n * (\mu f.M) (n - 1)$$

$$\mu f.M \rightsquigarrow M[f := \mu f.M]$$

Règles équationnelles

La règle μ

$$\frac{H \cup \{f : t\} \vdash M : t}{H \triangleright \mu f:t.M = M[f := \mu f:t.M] : t} \quad (\mu)$$

Exemple de dérivation d'une équation

$$M \equiv \mu \text{moins} . \lambda n . \lambda m . \text{if } (\text{zero? } m) \text{ then } n \text{ else } (\text{moins } (\text{pred } n) (\text{pred } m))$$

$$M \underline{\underline{2}} \stackrel{\mu}{=} (\lambda n . \lambda m . \text{if } (\text{zero? } m) \text{ then } n \text{ else } M (\text{pred } n) (\text{pred } m)) \underline{\underline{2}} \underline{\underline{1}}$$

$$\stackrel{\beta}{=} \text{if } (\text{zero? } \underline{\underline{1}}) \text{ then } \underline{\underline{2}} \text{ else } M (\text{pred } \underline{\underline{2}}) (\text{pred } \underline{\underline{1}}) \stackrel{zS}{=}$$

$$\text{if } \text{false} \text{ then } \underline{\underline{2}} \text{ else } M (\text{pred } \underline{\underline{2}}) (\text{pred } \underline{\underline{1}}) \stackrel{\text{IfFalse}}{=}$$

$$M (\text{pred } \underline{\underline{2}}) (\text{pred } \underline{\underline{1}}) \stackrel{\text{PrecSucc}}{=} M \underline{\underline{1}} 0 \stackrel{\mu}{=}$$

$$(\lambda n . \lambda m . \text{if } (\text{zero? } m) \text{ then } n \text{ else } M (\text{pred } n) (\text{pred } m)) \underline{\underline{1}} 0 \stackrel{\beta}{=}$$

$$\text{if } (\text{zero? } 0) \text{ then } \underline{\underline{1}} \text{ else } M (\text{pred } \underline{\underline{1}}) (\text{pred } 0) \stackrel{z0}{=}$$

$$\text{if } \text{true} \text{ then } \underline{\underline{1}} \text{ else } M (\text{pred } \underline{\underline{1}}) (\text{pred } 0) \stackrel{\text{IfTrue}}{=} \underline{\underline{1}}$$

Interprétation des types

$$\llbracket nat \rrbracket = \mathbb{N}_\perp$$

$$\llbracket bool \rrbracket = \{T, F\}_\perp$$

$$\llbracket s \rightarrow t \rrbracket = \llbracket s \rrbracket \rightarrow \llbracket t \rrbracket$$

Interprétation des jugements de type

Les 3 règles de λ^{\rightarrow}

pour les variables, les applications , les abstractions.

$$\llbracket H \vdash 0 : \text{nat} \rrbracket_{\rho} = 0$$

$$\llbracket H \vdash \text{true} : \text{bool} \rrbracket_{\rho} = T \quad \llbracket H \vdash \text{false} : \text{bool} \rrbracket_{\rho} = F$$

$$x = \llbracket H \vdash M : \text{bool} \rrbracket_{\rho}$$

$$\llbracket H \vdash \text{if } M \text{ then } N \text{ else } L : t \rrbracket_{\rho} = \begin{array}{ll} \llbracket H \vdash N : t \rrbracket_{\rho} & \text{si } x = T \\ \llbracket H \vdash L : t \rrbracket_{\rho} & \text{si } x = F \\ \perp & \text{si } x = \perp \end{array}$$

$$x = \llbracket H \vdash M : \text{nat} \rrbracket_\rho$$

$$\llbracket H \vdash (\text{succ } M) : \text{nat} \rrbracket_\rho = \begin{array}{ll} 1 + x & \\ \perp & \text{si } x = \perp \end{array}$$

$$\llbracket H \vdash (\text{pred } M) : \text{nat} \rrbracket_\rho = \begin{array}{ll} x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \perp & \text{si } x = \perp \end{array}$$

$$\llbracket H \vdash \text{zero? } M : \text{bool} \rrbracket_\rho = \begin{array}{ll} \top & \text{si } x = 0 \\ \text{F} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq \perp \\ \perp & \text{si } x = \perp \end{array}$$

Cas de la récursion

$$\llbracket H \vdash \mu f:t. M : t \rrbracket_{\rho} = \text{fix}(sF)$$

$$sF : \llbracket t \rrbracket \rightarrow \llbracket t \rrbracket$$

$$d \quad \llbracket H \cup \{f : t\} \vdash M : t \rrbracket_{\rho[f \rightarrow d]}$$