Quelques aspects des processus de branchement discrets

Amaury Lambert *

Premier cours. Nous débutons par les processus de branchement (markoviens) en temps discret, appelés processus de Bienaymé-Galton-Watson (BGW). Nous passons en revue quelques résultats de base comme la dichotomie extinction-expansion, les marginales unidimensionnelles utilisant les fonctions génératrices, le calcul des probabilités d'extinction. Nous définissons le processus de BGW avec immigration et énonçons trois théorèmes limites (théorèmes de Heathcote, de Seneta et de Kesten–Stigum).

Deuxième cours. Nous rappelons les notions de quasi-stationnarité introduites par Sylvie Méléard dans son cours et en donnons des applications dans le cas d'un espace d'états fini. Dans le cas des arbres de BGW, nous caractérisons la limite quasi-stationnaire de Yaglom (cas sous-critique) et le Q-processus (cas critique ou sous-critique), ou processus conditionné à s'éteindre dans le futur lointain.

Troisième cours. Nous montrons comment coder la généalogie d'un arbre de BGW grâce à une marche aléatoire tuée. Une application à la descendance totale de l'arbre sera étudiée et une compréhension plus fine de la loi de cette descendance totale sera donnée grâce à l'identité de Dwass–Kemperman, en passant par un théorème du scrutin.

Quatrième cours. Nous nous introduisons le processus ponctuel de coalescence pour les arbres de branchement : sur une représentation de la généalogie quasi-stationnaire d'une population infinie qui est aussi doublement infinie en temps ; sur les arbres de ramification (ou ≪ splitting trees ≫), dont la largeur est un processus de branchement (en général non markovien), en fait un processus de Crump-Mode-Jagers binaire et homogène.

*Université Pierre et Marie Curie, Paris.