PUBLICATIONS, PRÉPUBLICATIONS
INTERVENTIONS DANS DES COLLOQUES ET DANS DES SÉMINAIRES
ACTIVITÉS D'ENSEIGNEMENT ET ÉLABORATION DE PROJETS DE RECHERCHE

JOËL MERKER

Le 30 Janvier 2003

§1. Cursus CNRS résumé

1997 : (1er Octobre) Entrée comme Chargé de Recherche de deuxième classe au **CNRS, spécialité Mathématiques**, Section 01 du Comité National. Affectation à l'Université de Provence, au LATP, UMR 6632, Délégation de Provence, Marseille. Directeur de l'UFR MIM : Bernard Coupet. Directeur du LATP : Thierry Gallouët.

2001 : (1er Octobre) Accession au grade de Chargé de Recherche de première classe au CNRS.

§2. Points forts de l'activité de recherche

2.1. Liste de thèmes de recherche en cours.

• Approche structurale des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

• Aspects computationnels de la théorie des symétries de Lie.

• Paramétrisation des applications ponctuelles entre systèmes d'équations aux dérivées partielles.

• Application des méthodes algorithmiques d'algèbre différentielle à l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

• Classification des actions de groupes de Lie locaux agissant localement sur un ouvert de $\mathbb{C}^3$.

• Domination de l'explosion des calculs dans l'algorithme dit "méthode d'équivalence de Cartan".

• Régularité d'applications CR formelles et approximation artinienne.

• Éclatements locaux en géométrie analytique et application à l'étude de la géométrie des variétées CR analytiques réelles.

• Problème variationnel inverse.

Date: 2004-7-7.

§2.2. Collaborations scientifiques en cours. Elles sont au nombre de quatre :

Avec **Egmont Porten :** (Humboldt Universität zu Berlin)

• Élimination des singularités pour les fonctions CR et régularité analytique locale de fonctions définies sur des variétés feuilletées. Le cas des singularités de codimension un contenue dans une variété CR de dimension CR égale à un et de codimension quelconque.

• Théorèmes d'unicité pour les fonctions $L^{\rm p}$ ($\rm p \geq 1$) dans des structures hypoanalytiques de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ globalement minimales (d'après une question de F. Treves).

Avec **Hervé Gaussier :** (Université de Provence)

• Classification des hypersurfaces analytiques réelles homogènes de $\mathbb{C}^3$ d'après leur groupe d'automorphismes holomorphes.

• Formule explicite pour les prolongations (au sens de Lie) des champs de vecteurs aux espaces de jets.

• Borne optimale pour la dimension du groupe de symétrie de Lie d'un système général d'équations aux dérivées partielles.

• Exemples de tubes analytiques réels non algébrisables dans $\mathbb{C}^n$.

• Conditions nécessaires et suffisantes pour l'algébrisabilité d'une hypersurface analytique réelle de $\mathbb{C}^2$.

• Modernisation de la classification des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$ effectuée en 1932 par É. Cartan.

Avec **Sylvain Damour :** (Université de Provence)

• Convergence d'applications CR formelles et réflexion double de jets. Applications CR à valeurs dans un ensemble algébrique réel.

• Programmation, sous Maple 6, des algorithmes de détermination de groupes de symétrie.

Avec **Stéphane Rigat :** (Université de Provence)

• Initiation aux problèmes ouverts d'analyse quaternionique et de géométrie CR quaternionique (tentative).

2.3. Organisation d'un groupe de travail à l'Université de Provence. Le mardi matin, à partir de 8h45, une trentaine de rencontres en 2001-2002, *cf.* la page `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/AC/SE/symetries.html`. Séances de lecture et de travail (5) ; Exposés par : Camille Bièche (7) ; Sylvain Damour (1) ; Yaël Frégier (3) ; Hervé Gaussier (2) ; Joël Merker (10) ; Sergey Pinchuk (2) ; Egmont Porten (1) ; Mikaël Grasseau (1). Reprise de ces rencontres au deuxième semestre 2003.

§3. Exposés invités dans des colloques en Mathématiques et en Épistémologie

• *Reelle Methoden der Komplexen Analysis*, Oberwolfach, 28 Février au 6 Mars 1999. Organisé par Klas Diederich, Takeo Ohsawa et Edgar Lee Stout. Exposé : *Real analytic and real algebraic CR mappings.*

• *Le réel en mathématique : psychanalyse et objectivité.* Colloque international de Cerisy-la-Salle, 3 au 10 Septembre 1999. Organisé par Nathalie Charraud et Pierre Cartier. Exposé : *L'Obscur mathématique.*

• *Épistémologie des systèmes dynamiques.* Colloque organisé par l'équipe Rehseis les 26-27 Novembre 1999. Exposé : *Équations différentielles et feuilletages : remarques philosophiques.*

• *Espace, géométrie, algèbre*, exposé à la *Journée sur la pensée de l'espace* organisée par Alain Michel le 7 Avril 2000 au CEPERC (Aix, département de Philosophie).

• *Symmetries in Geometric Analysis*, Banach Center for Mathematical Sciences, Varsovie, du 26 au 30 Juin 2000, organisé par R. Dwilewicz et G. Schmalz.

• *Biholomorphic mappings conference*, Stanford University, San Fancisco, Palo Alto, du 30 Juillet au 5 Août 2000, organisé par J.E. Fornaess et S.G. Krantz.

• *Colloque 2000, Pensée et Science*, 22, 23, 24 et 25 Novembre 2000, organisé à l'Université de Berne par Charles Alunni et Éric Émery avec la collaboration du fonds Gonseth.

• *Colloque en l'honneur de Gilles Châtelet*, organisé par Charles Alunni, Paris, Collège International de Philosophie, et École Normale Supérieure, 27-28-29 Juin 2001.

• *Jounées Complexes du Sud*, organisées par Nicolas Eisen au CIRM, 3–4–5 Novembre 2001.

• *Final annual meeting of the European Network Project* ANACOGA, *Complex Analysis and Analytic Geometry*, organisé par Klas Diederich, Wuppertal, 1, 2, 3, 4 et 5 Juillet 2002.

• *Reelle Methoden der Komplexen Analysis*, Oberwolfach, February 23 – March 1, 2003, organisé par Klas Diederich, Takeo Ohsawa et Edgar Lee Stout. Exposé : *Symmetries of partial differential equations and CR geometry.*

• *Métaphysique de l'ouverture mathématique*, exposé au colloque *Philosophie et mathématique* organisé par Alain Badiou, Ivahn Smadja et Quentin Meillassoux à l'École Normale Supérieure (rue d'Ulm) le 25 Mai 2003.

• *Workshop Komplexen Analysis*, Leipzig, organisé par Judith Brinkschulte, 2–5 Juillet 2003. Deux exposés d'une heure chacun : *Formal equivalences of completely integrable systems of partial differential equations.*

• *Cauchy-Riemann analysis and geometry*, organisé par I. Lieb et G. Schmalz au Max-Planck Institut de Bonn, 22–27 Septembre 2003. Exposé : *Explicit Chern-Moser tensors.*

§4. Exposés dans des séminaires en France et à l'étranger

4.1. Séjours invités de courte durée à l'étranger.

• Uppsala University (Suède), Septembre 1999, 15 jours, invitation de Burglind Jöricke.

• Humbold Universität zu Berlin, Novembre 2000, 15 jours, invitation d'Egmont Porten, avec le soutien du Réseau européen Anacoga.

• Humbold Universität zu Berlin, Décembre 2001, 10 jours, *idem.*

• Göteborg University (une semaine), invitation de Nikolay Shcherbina. Uppsala University (une semaine), invitation de Burglind Jöricke, du 9 au 24 novembre 2002.

4.2. Exposés invités dans des séminaires extérieurs au laboratoire de rattachement.

• Uppsala, Septembre 1999 (Plurikomplexa Seminaret) : *Real analytic CR geometry : vector fields construction of Segre sets and nondegeneracy conditions for real analytic CR manifolds.*

• Berlin, Novembre 2000 : *A criterion for analytic non-integrability of dynamical systems (After S. Dovbysh).*

• Berlin, Décembre 2001 : *On wedge extendability of CR-meromorphic functions.*

• Séminaire de Philosophie et Mathématiques (Ex Maurice Loi), organisé par Pierre Cartier, Giuseppe Longo et Bernard Teissier (11 Février 2002) : *Complexité inattendue de problèmes mathématiques simples.*

• Séminaire d'épistémologie du CEPERC, Université de Provence, Aix, dirigé par Alain Michel (15 Janvier 2002) : *Émergence de la théorie des groupes de Lie.*

• Séminaire de Mathématiques Pures de l'École Normale Supérieure de Lyon (27 Mars 2002) : *Symétries des équations différentielles et classification des hypersurfaces analytiques réelles.*

• Séminaire d'Analyse, organisé par P. Dolbeault, G. Henkin, H. Skoda et J.-M. Trépreau, 14 Janvier 2003, *Sur la géométrie locale des systèmes différentiels analytiques complètement intégrables ; application à la géométrie CR.*

• Séminaire d'Analyse Complexe, Toulouse, Université Paul Sabatier, 22 Mai 2003. Exposé : *Variété des solutions d'un système rigide d'équations aux dérivées partielles.*

• Séminaire de Géométrie Complexe de l'Université Lille 1, 5 Juin 2003. Exposé : *Singularités éliminables de codimension un en dimension CR égale à un et en codimension supérieure ou égale à deux.*

4.3. Exposés dans le Séminaire d'Analyse et Géométrie Complexes de Marseille.

• *Convergence d'application CR formelles entre variétés CR analytiques réelles*, Mars 2000.

• *Analyticité de difféomorphismes CR de classe $\mathcal{C}^\infty$*, Février 2001.

• *Classification des équations différentielles (d'après Sophus Lie, Arthur Tresse et Élie Cartan)*, 29 Novembre 2001.

4.4. Interventions devant un public d'enseignants du second degré.

• *Journée d'étude sur les probabilités*, Réunion de rentrée des Inspecteurs Pédagogiques Régionaux de la région PACA, 30 Août 2001. *Introduction aux probabilités mathématiques.*

• Réunion IUFM entre enseignants en mathématiques du second degré, Lycée Émile Zola, 9 Janvier 2001 : *Problèmes mathématiques et recherche mathématique.*

4.5. Organisation et participation à des groupes de travail.

• Organisation d'un groupe de travail ("à guichets fermés" et non affiché, sauf sur ma page web) sur les *Symétries de Lie des équations différentielles et leurs applications à la Géométrie CR*, *cf.* §2.3 ci-dessus.

• Participation occasionnelle à un groupe de travail informel, auquel participent Jean-Yves BRIEND, Peter HAÏSSINSKY, Patrick IGLESIAS, Joël MERKER, Andrei TELEMAN.

• Participation à un Séminaire-Groupe de Travail à l'École Normale Supérieure (rue d'Ulm), organisé par Ivahn SMADJA et Jean-Jacques SZCZECINIARZ qui est consacré à l'œuvre philosophico-géométrique de Gauss et de Riemann. Quelques exposés prévus au printemps 2003.

• Création d'un groupe de travail sur l'application de la théorie de Lie à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, en collaboration avec Pascal Azerad

(Délégation CNRS au CMI) et Sergey Gavrilyuk (CPT), bénéficiant d'une délégation CNRS au LATP en 2002–2003.

§5. Participation à des colloques en tant qu'auditeur

• *Progrès récents en Analyse Complexe*, Colloque Sibony-Henkin, 24 au 28 Mai 1999, CIRM, Marseille.

• *Encre 1999.* École destinée aux jeunes entrants des promotions 1997 et 1998 du département SPM du CNRS. Autrans, 27 Mai au 3 Juin 1999.

• *Summer School : Complex Analysis, Symplectic Geometry and Cauchy-Riemann Geometry*, Marseille, CIRM, Luminy, 28 Juin au 9 Juillet 1999. J'étais co-organisateur avec Bernard Coupet.

• *Journées Complexes du Sud*, Autrans, Mai 2001.

• *Histoire de la Géométrie au vingtième siècle, II, 1950–2000*, Colloque international à l'IHP, 24–29 Septembre 2001.

• *Cinquièmes rencontres mathématiques de l'Université de Rouen en l'honneur de Makhlouf Derridj*, organisées par Gérard Grancher, Mont-Saint-Aignan, 19, 20 et 21 Juin 2002.

§6. Enseignements dispensés en 2000, 2001 et 2002

• *Analyse Fonctionnelle et théorie des distributions*, Maîtrise de mathématiques pures, avec H. Youssfi et H. Gaussier. Travaux dirigés, Université de Provence.

• *Géométrie analytique locale et géométrie de Cauchy-Riemann*, Université de Provence. Début : 10 Septembre 2000. Séances d'exposés aux deux étudiants en thèse Sylvain Damour et Patrick Lahondès que je co-encadrais avec Bernard Coupet.

• *Travaux d'encadrement et de recherche* (TER) de maîtrise (2000) : 1. Surfaces de Riemann et théorème de Riemann-Roch. 2. Théorie de Galois et périodes de Gauss.

• Cours et TD d'histoire et d'épistémologie des mathématiques, 25h (2001).

• *Travaux d'encadrement et de recherche* (TER) de Maîtrise (2001) : Séries de Fourier et séries trigonométriques (d'après J.-P. Kahane et S. Katznelson).

• Cours d'initiation à la Mécanique Quantique pour économistes. Espaces de Hilbert et formalisme de Dirac. 20h, à l'Université d'Aix-Marseille III (2000–2001).

• *Travaux d'encadrement et de recherche* (TER) de Maîtrise (2002) : Applications de la théorie des fonctions elliptiques à l'arithmétique, d'après K. Chandrasekharan).

• Cours et TD d'histoire et d'épistémologie des mathématiques, 25h (2002).

• Cours de DEA École Doctorale Option, Second Semestre 2001–2002, *Géométrie de Cauchy-Riemann, Géométrie sous-Riemannienne, Symétries de Lie et systèmes Pfaffiens* (45h).

• Cours de DEA École Doctorale Tronc Commun, Premier Semestre 2002-2003, *Introduction à l'Analyse complexe à plusieurs variables*, cinq étudiants. Thème : estimées L^2 de L. Hörmander afin de résoudre complètement le problème de Levi dans le cours. Quelques séances supplémentaires (au lieu des 20h prévues) ont été nécessaires. Une séance de plus le 7 Janvier avant l'examen pour introduire les théorèmes de préparation et de division de Weierstrass et le théorème de cohérence d'Oka, qui seront requis au second semestre.

• Cours et TD d'histoire et d'épistémologie des mathématiques, 45h (2003). Thème prévu cette année : histoire du calcul, philosophie de l'informatique et réflexions sur la place grandissante des ordinateurs dans les mathématiques pures et appliquées.

§7. Encadrement d'étudiants en thèse

• Depuis l'automne 2002, j'encadre par correspondance deux étudiants algériens, Raouf Dridi, Université d'Annaba, titulaire d'un poste de Maître Assistant après la soutenance d'un *Diplôme de Magistère*, lequel correspond approximativement à l'ancienne *Thèse de troisième cycle*, et Aicha Chouraqui, Université d'Oran, titulaire elle aussi d'un poste de Maître-Assistante et ayant suivi le même parcours. En Algérie, les jeunes mathématiciens semblent très motivés, mais ils manquent tout simplement d'encadrement et d'ouverture à la recherche.

§8. Références bibliographiques
Articles de mathématiques

8.1. Articles publiés dans des revues avec comité de lecture.

Références

[1] **Joël Merker**, *Global minimality of generic manifolds and holomorphic extendibility of CR functions*, International Mathematics Research Notices, 1994, no. 4, 329–343.

[2] **Joël Merker**, *On removable singularities for CR functions in higher codimension*, International Mathematics Research Notices, 1997, no. 1, 21–56.

[3] **Joël Merker and Francine Meylan**, *On the Schwarz symmetry principle in a model case*, Proceedings of the American Mathematical Society **127** (1999), no. 4, 1097–1102.

[4] **Joël Merker et Egmont Porten**, *Enveloppe d'holomorphie locale des variétés CR et élimination des singularités pour les fonctions CR intégrables*, C. R. Acad. Sci. Paris **328** (1999), 853–858.

[5] **Joël Merker et Egmont Porten**, *On removable singularities for integrable CR functions*, Indiana University Mathematics Journal **48** (1999), 805–856.

[6] **Joël Merker et Francine Meylan**, *Extension de germes de difféomorphismes CR pour une classe d'hypersurfaces analytiques réelles non essentiellement finies dans* $\mathbb{C}^3$, Complex variables Theory Appl. **40** (1999), no. 1, 19–34.

[7] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Metrically thin singularities of integrable CR functions*, Internat. J. Math. **11** (2000), no. 7, 857–872.

[8] **Joël Merker**, *Note on double reflection and algebraicity of holomorphic mappings*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse **9** (2001), no. 5, 689–721.

[9] **Joël Merker**, *Convergence of formal biholomorphisms between minimal holomorphically nondegenerate real analytic hypersurfaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **26** (2001), no. 5, 281–302.

[10] **Joël Merker**, *On the partial algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets*, Bulletin de la Société Mathématique de France **129** (2001), no. 3, 547–591.

[11] **Joël Merker**, *Étude de l'application de symétrie CR formelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), no. 3, 165–168.

[12] **Joël Merker, Bernard Coupet, Sylvain Damour et Alexandre Soukhov**, *Sur l'algébricité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **334** (2002), 953–956.

[13] **Joël Merker and Roman Dwilewicz**, *Hartogs-Bochner phenomenon and decomposition of CR functions*, Proceedings of the American Mathematical Society **130** (2002), no. 7, 1975–1980.

[14] **Joël Merker**, *On envelopes of holomorphy of domains covered by Levi-flat hats and the reflection principle*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 5, 1443–1523.

[15] **Joël Merker and Egmont Porten**, *On wedge extendability of CR meromorphic functions*, Math. Z. **241** (2002) 485–512.

[16] **Sylvain Damour et Joël Merker**, *Sur la convergence d'applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), 831–854.

8.2. Articles publiés dans des actes de colloque avec comité de lecture.

Références

[17] **Joël Merker et Egmont Porten**, *On the local meromorphic extension of CR meromorphic functions*, Volume spécial consacré aux Actes du Colloque *Complex Analysis and Applications*, Varsovie, Juillet 1997. Ann. Polon. Math. **70** (1998), no. 1, 163–193.

[18] **Joël Merker, Xiaojun Huang and Francine Meylan**, *Mappings between degenerate real analytic hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$, Analysis, geometry, number theory : the mathematics of Leon Ehrenpreis (Philadelphia, PA, 1998), 321–338. Contemp. Math., 251, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

8.3. Articles à paraître.

Références

[19] **Hervé Gaussier and Joël Merker**, *A new example of uniformly Levi degenerate hypersurface in* $\mathbb{C}^3$, Ark. Mat., 10pp., in press.

[20] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Sur l'algébrisabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques de* $\mathbb{C}^n$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (2003), à paraître, 4 pp.

[21] **Joël Merker**, *On the local geometry of generic submanifolds of* $\mathbb{C}^n$ *and the analytic reflection principle* (Part I), Viniti, to appear, 80 pp.

[22] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Géométrie des sous-variétés analytiques réelles de* $\mathbb{C}^n$ *et symétries de Lie des équations aux dérivées partielles*, Bull. Soc. Math. Tunisie (2003), à paraître, 18 pp.

[23] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Nonalgebraizable real analytic tubes in* $\mathbb{C}^n$, Math. Z., to appear, 36 pp.

[24] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Symmetries of partial differential equations*, Korean Math. J., to appear, 30 pp.

8.4. Travaux en préparation.

Références

[A] **Joël Merker**, *Sur la convergence d'applications CR formelles entre sous-variétés générique analytiques réelles.* Je prévois de soumettre cet article (qui développe les résultats annoncés dans la référence **[11]**) aux *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, acceptant ainsi la proposition de l'un des éditeurs de la revue.

[B] **Joël Merker**, On the local geometry of generic submanifolds of $\mathbb{C}^n$ and the analytic reflection principle (Part II), 100 pp. already written. Some more development required.

[C] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Local removability of real 2-surfaces contained in nonpseudocovex* $C^{2,\alpha}$*-smooth boudaries*, In progress.

[D] **Joël Merker and Egmont Porten**, *On local removability of codimension one singularities in CR manifolds of CR dimension one*, In progress.

[E] **Joël Merker and Egmont Porten**, Survey on holomorphic extension of CR functions and removable singularities, in preparation.

[F] **Joël Merker**, *Symmetries of completely integrable systems of analytic partial differential equations*, in preparation ; 40 pp. already written.

[G] **Joël Merker**, *An explicit differential characterizaion of the free particle system*,

[H] **Joël Merker**, *Characterization of the flat system* $y_{x_{j_1}x_{j_2}} = 0$, $j_1,j_2 = 1,\dots,n$, $n \geq 2$.

[I] **Joël Merker**, *Métaphysique de l'ouverture mathématique.*

[J] **Joël Merker**, *Explicit Chern-Moser tensors and a characterization of local sphericity.*

8.5. Travaux achevés mais non remaniés.

Références

[G] **Joël Merker**, *Vector fields construction of Segre sets*, Preprint University of Provence, **29**, December 1998. 26pp. Article qui fait clairement apparaître les paires de feuilletages comme objets géométriques fondamentaux. Modifié. Rejeté deux fois. À resoumettre. Devrait s'insérer dans **8.4**, [1].

[H] **Joël Merker**, *Convergence of S-nondegenerate formal CR maps between real analytic CR manifolds*, Preprint, Université de Provence, **1** (1999) *e-print*: `arXiv.org/abs/math.CV/9901027`, 38 pp. À re-soumettre. Devrait prendre place dans **8.4**, [1].

[I] **Joël Merker**, *Étude de la régularité analytique de l'application de symétrie CR formelle*, e-print: `arXiv.org/abs/math.CV/0005290`, 13pp. À re-soumettre fin février 2003. Devrait prendre place dans **8.4**, [1].

[J] **Joël Merker**, *Lie symmetries of integrable systems of holomorphic second order partial differential equations*, 46 pp. Impubliable : 40 pages de calculs bruts et violents. J'attends d'avoir terminé les 50 pages de calculs supplémentaires qui traitent le cas des systèmes d'ordre $\kappa \geq 3$ avant de penser à soumettre ce travail. À moins que ces résultats soient des corollaires de résultats connus en cohomologie des algébres de Lie.

8.6. Liste des références de travaux prépubliés sur le site de Los Alamos.

1. `arXiv.org/abs/math.CV/9901010`.
2. `arXiv.org/abs/math.CV/9901027`.
3. `arXiv.org/abs/math.CV/9902038`.
4. `arXiv.org/abs/math.CV/9902039`.
5. `arXiv.org/abs/math.CV/9902040`.
6. `arXiv.org/abs/math.CV/9905024`.
7. `arXiv.org/abs/math.CV/9906056`.
8. `arXiv.org/abs/math.CV/9906057`.
9. `arXiv.org/abs/math.CV/0005290`.
10. `arXiv.org/abs/math.CV/0006178`.
11. `arXiv.org/abs/math.CV/0012222`.
12. `arXiv.org/abs/math.CV/0012223`.

Pour préserver la confidentialité des recherches en cours, arrêt de ces messages "publicitaires" à partir de Janvier 2001.

§9. Références bibliographiques

Articles de vulgarisation et de philosophie des mathématiques

Références

[1] **Joël Merker**, *L'ontologie explicite des théorèmes d'existence en mathématiques*, Séminaire de Philosophie et Mathématiques (Maurice Loi, Pierre Cartier) (1996), 66 pp.

[2] **Joël Merker**, *La satisfaction mathématique : mise en perspective quasi-psychanalytique du non-savoir mathématique*, Prévu pour le Colloque Mathématiques et Inconscient, 28 pp.

[3] **Joël Merker**, *Penrose ou l'apothéose du platonisme*, Revue de l'HPMP (1998), 21–26.

[4] **Joël Merker**, *Article* Analyse Complexe, Encyclopédie d'Histoire et de Philosophie des Sciences, sous la direction de Dominique Lecourt, Presses Universitaires de France, 1999, 42–48.

[5] **Joël Merker**, *Deux infinis cousus main*, Revue de Synthèse, Numéro Pensée des Sciences, (1999), 163–172.

[6] **Joël Merker**, *L'Obscur mathématique ou l'Ouvert mathématique*, Communication au colloque *Le réel en mathématiques*, Cerisy, 3–10 Septembre 1999, à paraître dans les actes du colloque, 14 pp.

[7] **Joël Merker**, *L'île mathématique*, Revue Études, Octobre 2001 et Novembre 2001 (publié en deux parties), **395**, no. 4, 341–351 et **395**, no. 5, 493–504.

[8] **Joël Merker**, *Hommage à Gilles Châtelet*, Prépublication LATP, no. 7, 2001, 82pp.

[9] **Joël Merker**, *Itération et fractales dynamiques*, Communication au colloque *Épistémologie des systèmes dynamiques*, Paris, Novembre 1999. Éditions du CNRS, à paraître, 15 pp.

§10. Articles de philosophie des mathématiques en préparation

Références

[A] **Joël Merker**, *Espace, Géométrie, Algèbre*, texte de l'intervention à la Journée sur la Pensée de l'Espace, Aix, CEPERC.

[B] **Joël Merker**, *Note sur l'intuition en mathématiques : polymorphie, géométrie et surlangage*, En préparation.

[C] **Joël Merker**, *Questionnement méthodique et ouverture conceptuelle dans la mathématique philosophique de Bernhard Riemann*, En préparation.

§11. Mémoires et articles co-dirigés

Références

[1] **Julien Bonhomme**, *La philosophie du geste dans l'oeuvre de Jean Cavaillès*, Maîtrise de Philosophie (1997), 230 pp.

[2] **Sylvain Damour**, *Algébricité d'applications holomorphes*, Prépublication, Université de Provence **22** (1999), 46 pp. C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. **329** (1999), no. 6, 489–494.

[3] **Patrick Lahondès**, *Analyticité d'homéomorphismes CR entre hypersurfaces algébriques réelles*, Manuscrit, 2000, Pub. Mat., à paraître.

[4] **Sylvain Damour**, *On the analyticity of smooth CR mappings between real analytic CR manifolds*, Michigan Math. J. **49** (2001), no. 3, 583–603.

[5] **Patrick Lahondès**, *Propriétés de finitude des applications holomorphes entre variétés analytiques réelles* (toujours en préparation).

§12. Responsabilités, vie administrative, élaboration de projets scientifiques

• Depuis 1999 : Membre titulaire de la commission de spécialistes (Section 25 du CNU) de l'Université de Provence. Vice Président (Collège B) depuis 2001.

• Maintenance de la page web de l'Équipe d'Analyse et Géométrie Complexe du LATP, UMR6632 :

`http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/AC/index.html`.

• Printemps 2000 : élaboration d'un projet d'Action Concertée Incitative intitulé *Philosophies de l'actualité scientifique* (environ 40 pp.), qui n'a pas été retenu.

• Printemps 2002 : participation à l'élaboration d'un projet de GDR *Analyse et géométrie complexe en plusieurs variables*, dirigé par Pascal Thomas de l'Université Paul Sabatier à Toulouse.

• Referee pour *Inventiones Mathematicae* deux fois (plutôt négatives) entre Juin 2001 et Décembre 2002.

• Rédaction et mise à jour du rappport de l'Équipe d'Analyse et Géométrie Complexes pour la demande de renouvellement du Contrat Quadriennal (UMR 6632) du Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités, en Juin 2002 et en Novembre 2003.

• Rédaction d'un projet d'ACI Nouvelles Interfaces des mathématiques, soumis au ministère en Mai 2003. Le projet n'a pas été retenu parmi les 20 sur 150 qui ont été sélectionnés. Rapport complet : *Les rapporteurs ont souligné le très grand intérêt mathématique de l'étude proposée. Le projet est remarquablement bien rédigé, détaillant très clairement les objectifs à atteindre. Toutefois, il a semblé que les applications envisagées dans ce projet se trouvaient d'une certaine façon du côté des mathématiques, ce qui est louable en soi, mais n'est pas l'objectif principal de cette ACI. Des applications à d'autres domaines scientifiques que les mathématiques auraient été appréciées.*

Voir une copie de cette demande d'ACI ci-jointe. Elle compte d'ailleurs aussi comme une partie de mon programme de recherche actuel.

§13. Sélection de résultats en course à pied

13.1. Année 1999.

• La 6000D, Juillet, 55km, 3065m de dénivellation positive, Mâcot La Plagne (38), 20$^{\text{ième}}$ sur 640.

• L'Endurance Trail, Octobre, 125km, 3800m de dénivellation positive, Nant (12), 5$^{\text{ième}}$ sur 380.

13.2. Année 2000.

• La Traversée des Maures, Mai, 55km, 2000m de dénivellation positive, Collobrières (83), 26$^{\text{ième}}$ sur 450.

• La Grande Course des Templiers, Octobre, 65km, 2900m de dénivellation positive, Nant (12), 33$^{\text{ième}}$ sur 1400.

13.3. Année 2001.

• Les Biaous de Glaise, Septembre, 47km, 2500m de dénivellation positive, Glaise (05), 10$^{\text{ième}}$ sur 200.

• La Grande Course des Templiers, Octobre, 67km, 2700m de dénivellation positive, Nant (12), 51$^{\text{ième}}$ sur 1500.

13.4. Année 2002.

• Les Drayes du Vercors, Juin, 49km, 1700m de dénivellation positive, Vassieux en Vercors, 14$^{\text{ième}}$ sur 500.

• La Grande Course des Templiers, Octobre, 65km, 2900m de dénivellation positive, Nant (12), 49$^{\text{ième}}$ sur 1800.

13.5. Année 2003.

• La Fila Aubrac, 26 Janvier 2003, 44km, 1400m de dénivellation postitive, Laguiole (12), 89$^{\text{ième}}$ sur 1100.

• Le Grand Balcon, 17 Mai 2003, 52 km, 1800 m de dénivellation positive, 9$^{\text{ième}}$ sur 200.

• Chamonix-Courmayeur, 70 km, 4100 m de dénivellation positive, 24$^{\text{ième}}$ sur 240.

RENOUVELLEMENT DU PROGRAMME DE RECHERCHE EN ACCORD AVEC LE PROCHAIN CONTRAT QUADRIENNAL (À JOINDRE AU DOSSIER CNRS)

Joël Merker

Le 30 janvier 2003

Table des matières

1. Introduction .... **11.**
2. Sélection de résultats obtenus dans la période 1998–2002 .... **15.**
3. Programme de recherche immédiat pour les six mois à venir .... **31.**
4. Programme de recherche renouvelé pour les années 2003 à 2006 .... **45.**

§1. Introduction

1.1. Parcours CNRS. Depuis le 1er Octobre 1997, c'est-à-dire depuis cinq ans et quatre mois, je suis chargé de recherche au Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités, UMR6632 du CNRS, dans l'Équipe d'Analyse et Géométrie Complexes à l'Université de Provence. Ce poste me convient parfaitement et je souhaite vivement conserver cette position pour poursuivre mes recherches dans de bonnes conditions. À mesure que les années avancent, je ressens de plus en plus de satisfactions et de plaisir intellectuel à la recherche. Aussi ne céderai-je pas pour l'instant à la tentation de quitter le CNRS pour postuler sur un poste de Professeur à l'Université. L'enseignement est très attirant et très intéressant, mais lorsque la recherche devient fertile, ramifiée et enthousiasmante, il serait sûrement dommageable de devoir démobiliser une partie substantielle de son énergie et de son temps de travail. Nous savons tous combien est fragile et éphémère le sentiment d'avancer et de réussir dans la recherche, et combien les dépressions insidieuses minent par périodes la vie des enseignants-chercheurs, alors autant maintenir pleinement son engagement pendant que cela marche.

Depuis un an et demi, en m'initiant à un nouveau sujet (*voir* §4 ci-dessous), je découvre un continent entier de problèmes ouverts, centraux et accessibles, qui m'incitent fortement à un renouvellement culturel et thématique. Dans cette direction et avec cet état d'esprit, je travaille en collaboration suivie avec Hervé Gaussier, Maître de Conférences à l'Université de Provence, qui bénéficie pour le second semestre 2003 d'une délégation CNRS, et qui a fait une demande de renouvellement pour l'année 2004. Cinq de nos travaux en collaboration sont déjà acceptés pour publication (références **[8]**, **[11]**, **[12]**, **[13]** et **[14]** dans le §2.1 ci-dessous), mais il ne s'agit que d'un début, tant les problèmes s'ouvrent et s'enrichissent à mesure que nous progressons, discutons et écrivons ensemble.

En définitive, être chercheur au CNRS me semble être une chance incomparable, dont je prends pleinement conscience au fil de mes travaux. Je souhaite donc l'exploiter encore plus durant les prochaines années, afin de faire honneur à la confiance qui m'a été accordée lors de mon recrutement. Je suis intimement persuadé que l'esprit continue à progresser à grand pas, au moins jusqu'à ce qu'on atteigne la soixantaine, pourvu que l'on soit animé d'une exigence intérieure inflexible, et d'une persévérance acharnée dans le travail.

1.2. (Modeste) Philosophie de la recherche. Depuis l'année de Terminale C, je projette d'écrire des livres de philosophie des mathématiques avec un bagage technique qui se situe à un niveau contemporain, en m'attaquant surtout aux questions fondamentales, existentielles et métaphysiques, telles que par exemple "En quoi les mathématiques sont-elles indéfinies?", ou "Qu'est-ce qu'une bonne conjecture en mathématiques", ou encore, pour répondre à la naïveté populaire, "À quoi cela sert-il de résoudre telle ou telle question de mathématique abstraite?". Jusqu'à une période assez récente, on aurait pu éventuellement me considérer comme une sorte de philosophe des mathématiques potentiel, mais avec le temps, mon goût pour les mathématiques et tout particulièrement pour la recherche, dans ce qu'elle a d'exaltant et de varié, s'est affirmé et me semble maintenant fermement ancré. En vérité, la philosophie des sciences telle qu'elle est pratiquée par des "professionnels" à l'Université, m'a toujours semblé souffrir d'un certain décalage par rapport à la réalité concrète, et même souffrir d'une insensibilité réelle aux problématiques qui animent les scientifiques, en tant qu'ils sont chercheurs "d'or". Les considérations et les interventions de philosophes des sciences sont bien souvent ternes et laborieuses lorsqu'on les compare à la richesse des vies intuitives de mathématiciens confirmés. C'est pourquoi je choisis résolument maintenant de poursuivre tous les jours l'élaboration non écrite d'une (modeste) philosophie de la recherche mathématique, par la pratique journalière des mathématiques en tant que chercheur, plutôt que de prendre le risque de me faire reléguer en deuxième division en jouant contre des équipes de troisième division, si je puis me permettre cette petite métaphore footballistique [1], et quelque peu polémique.

1.3. Formation à l'écriture. La puissance d'écriture technique fait assurément partie des capacités que doit cultiver tout enseignant-chercheur. Au cours de la période 1999–2002, j'ai appris lentement et non sans douleur à manipuler avec de plus en plus de dextérité l'écriture sur un ordinateur portable à grand écran. J'ai appris aussi à corriger quelques défauts d'écriture qui étaient fermement ancrés dans mon "style" mathématique. Après avoir écrit de nombreux textes en insistant de plus en plus sur la précision et les corrections, j'éprouve aujourd'hui le sentiment d'écrire avec un certain plaisir, pour ne pas dire qu'il s'agit presque d'une drogue. En effet, depuis maintenant deux ans, je tape environ trois cents pages de mathématiques et de texte par an, sous Latex, la plupart du temps directement à l'écran, en utilisant seulement des schémas de contenu ébauchés auparavant à la main sur papier, lesquels requièrent bien évidemment une réflexion préalable. Tandis que les idées elles-mêmes nécessitent de la concentration et du geste manuel, les aspects purement techniques peuvent quant à eux prendre corps directement sous forme électronique. Grâce à une structuration mentale adaptée, je construis maintenant les textes en exploitant à fond les avantages du virtuel, c'est-à-dire du traitement de texte. J'ai cherché à donner au moment d'écriture sur écran autant de mouvement, de mobilité et de vie qu'à l'écriture manuelle, le tout en cultivant la vivacité, la souplesse syntaxique, la réorganisation immmédiate des phrases et des paragraphes, la puissance de synthèse et de compréhension des liens internes du texte, la redéfinition réitérée des plans,

1. Sauf votre honneur : "Longue vie à l'*Olympique de Marseille*, qui fut sacré Champion d'automne de Ligue 1 en Décembre 2002!"

l'insertion libre de nouveaux paragraphes, le souci permanent du lissage stylistique et de l'articulation des transitions, l'art de présenter incidemment les idées par anticipation afin d'entraîner l'intuition du lecteur, l'exigence d'évoquer et de décrire en mots de la langue naturelle la métaphysique interne aux démonstrations, la culture des métaphores éclairantes, et surtout, avant toute chose, l'exigence de rendre les textes fluides, accessibles et presque faciles à lire. Devant tout texte électronique vivant, mon esprit se comporte comme une herse inlassable qui émotte les syntaxes et brutalise avec frénésie les faiblesses de pensée et d'écriture jusqu'à ce qu'elles soient abrasées et disparaissent. Et de ce point de vue-là, le travail en collaboration que j'ai pu conduire récemment m'a permis d'*avancer beaucoup plus vite vers un texte qui se tient*: il ne s'agit pas d'échanger les textes pour élaborer chacun de son côté de nouvelles versions, mais de s'attacher à *un vrai travail en commun impliquant deux, trois ou quatre personnes assises devant l'écran et réfléchissant ensemble à l'écriture*[2].

1.4. Privilégier l'ouverture. Il est bien difficile de répondre intelligemment et de manière convaincante à la question "Qu'est-ce que la recherche?", surtout lorsqu'elle est posée par des personnes de bonne foi, mais qui sont hors du circuit universitaire et des compétitions intellectuelles. Le commun des mortels, que je côtoie par exemple dans les trains ou dans le milieu de la course à pied, s'amuse souvent à m'objecter avec un respect ironique qui est nourri en vérité par d'anciennes et légitimes rancœurs scolaires : "Alors tu es chercheur, cela veut dire que tu cherches, mais est-ce que tu *trouves*?". Sincèrement, je ne pense pas que le constat purement concret de l'existence d'universités, d'institutions diverses et d'organismes de recherche publique, puisse constituer une réponse recevable, non seulement par les profanes, mais aussi par les personnes qui prennent au sérieux la complexité des tensions historiques et des questions métaphysiques autours desquelles se sont cristallisées les institutions. Alors je réponds immédiatement que contrairement à ce que l'on pourrait croire, dans le domaine de la recherche, on trouve beaucoup trop de choses, on a beaucoup trop d'idées ; et surtout que les intuitions se bousculent tellement qu'il devient parfaitement impossible de mener à bien tous les projets qui marcheront à coup sûr et même de finir d'écrire tous les textes qui ne demandent plus aucune recherche intuitive. M. Gromov compare les mathématiques "humaines" à un tout petit nuage ténu et informe qui se déplace faiblement et sans morphologie clairement dessinée, à l'extrême base d'un arbre gigantesque et à vrai dire infini, l'"arbre de Hilbert", qui est le symbole concret et purement formel de l'indéfinité potentielle et conceptuelle dans laquelle s'engouffrent et se perdent avec certitude les mathématiques. Dans l'un des nombreux passages imagés de son testament mathématique *Récoltes et Semailles*, A. Grothendieck a écrit qu'il avait eu l'expérience de "sécher" pendant six mois sur une question mathématique précise, et qu'il avait compris à cette occasion qu'il fallait absolument se défier de tout échec, qu'il fallait éviter de traîner sur les problèmes et qu'il fallait au contraire répondre rapidement à toutes les questions et à toutes les sollicitations de travail, en laissant monter la mer pour submerger les montagnes et autres pics convoités par l'escalade mathématique. Avec raison, on pourra bien sûr objecter d'une part que A. Grothendieck est l'un des seuls mathématiciens qui puisse parler avec une telle assurance, et d'autre part que seul l'acharnement spirituel devant les problèmes qui résistent peut conduire à

2. Réciproquement, Saint Thomas d'Aquin, auteur d'une *Somme théologique* monumentale, usait d'un parallélisme inversé, puisqu'il dictait tour à tour et simultanément quatre textes distincts à quatre scribes installés en face de lui à leurs pupitres.

des découvertes conceptuelles profondes, comme l'irrationnalité de π ou le groupe de Galois d'une équation algébrique, ce avec quoi je suis entièrement d'accord.

En tout état de cause, à partir de ces deux exemples, je voudrais défendre la thèse que puisqu'en mathématiques les problèmes ouverts sont de la plus haute importance et que les idées ne peuvent que foisonner dans l'indéfini des possibles, il est alors absolument nécessaire de consacrer une partie substantielle de son énergie à formuler clairement ce qui est en germe et à donner toujours plus de sève, de corps et d'actualité à ce qui est en gestation dans le champ du virtuel. En définitive, les perspectives doivent prendre toujours plus d'ampleur que les résultats obtenus, les semailles doivent occuper l'âme et le corps plus que les récoltes. Bien entendu, la nécessité de s'imposer une discipline de fer pour mener à bien certains des projets que l'on aura formulés est corrélative de cette nécessité de *privilégier l'ouverture.* C'est pourquoi, dans ce dossier, je veux insister sciemment et fermement sur le programme de travail immédiat et sur les directions de recherche ultérieures plutôt que sur les résultats que j'ai obtenus récemment, en espérant être à même, dans quatre ans, de montrer que j'ai progressé sur ces questions.

1.5. Diplômes futurs. Dans les années qui viennent, je projette de passer une habilitation à diriger des recherches, mais seulement lorsque j'aurai bien avancé les recherches sur les symétries de Lie des équations aux dérivées partielles, notamment lorsque j'aurai achevé la classification locale des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^3$ d'après leur groupe de Lie, ce qui repousse probablement la date de soutenance à 2005 voire à 2007. Durant cette même période, je souhaiterais écrire un texte d'histoire et de philosophie des mathématiques sur l'émergence de la théorie des groupes de Lie et sur la partie de l'œuvre d'Élie Cartan qui se situe dans le prolongement direct des idées de Sophus Lie. J'ai longtemps hésité à entreprendre un travail doctoral en philosophie des mathématiques, mais aujourd'hui, l'occasion se présente à moi d'*associer le travail de recherche purement mathématique à un travail de réflexion épistémologique, dans une direction neuve, non balisée institutionnellement et techniquement difficile.*

1.6. Deux projets d'ouvrage mathématique. Dans les deux années à venir, je compte avoir constitué un projet de livre en géométrie CR d'environ quatre cents pages, dont les thèmes couvriraient la méthode dite des disques analytiques pour le prolongement CR, avec un point de vue "propagation", ainsi que les résultats du principe de réflexion analytique, deux sujets que j'ai étudiés à plusieurs reprises et qui nécessitent actuellement, à mon avis, encore un nouveau texte de synthèse. Un premier jet de ce livre est déjà en gestation, puisqu'entre le 28 Juin 2002 et le 15 Septembre 2002, j'en ai déjà écrit et tapé directement 250 pages, et il en manque encore environ 150, les plus agréables d'ailleurs, pour parvenir au bout de ce que je m'étais fixé. Tout livre mathématique étant une cathédrale technique qui ne demande qu'à être engloutie, submergée par de nouvelles idées et par de nouveaux livres, il me faudra bien sûr laisser évoluer le projet encore pendant plusieurs années, en tenant rigoureusement compte des avancées régulières du sujet et de la technique, afin de bénéficier du maximum de recul avant de prendre le risque souvent fatal de la publication. Mon but avoué est d'"enterrer" quasi-définitivement les sujets que j'ai abordés dans ma thèse et durant la période 1997–2001.

En effet, après avoir d'abord érigé des bases systématiques concernant le problème d'équivalence des structures différentielles analytiques, au sens de S. Lie et d'Élie Cartan, je souhaite mettre en œuvre un second projet d'ouvrage, et ce d'ici environ deux ans. Dans cet ouvrage, il sera notamment question du problème d'équivalence, de G-structures, d'algèbre différentielle, de complète intégrabilité des systèmes différentiels analytiques au point générique, de calcul formel appliqué à l'étude des groupes de symétries de Lie des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec un nombre quelconque de variables dépendantes et indépendantes, de programmation appliquée, *etc.* Afin de bien différencier cet ouvrage des ouvrages généralistes de géométrie différentielle appliquée à l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles, je me donnerai comme objectif de centrer les considérations précisément sur les problèmes de classification, en privilégiant la concrétude des calculs et l'exhaustivité technique par rapport aux considérations abstraites et redondantes, qui se recopient de livre en livre. Bien sûr, tout cela pourra sembler bien ambitieux, mais le sujet étant infiniment riche et complexe sur le plan calculatoire, il me faudra bien construire une nouvelle manière d'utiliser l'informatique pour progresser plus rapidement dans les problèmes qui explosent par nature en feux d'artifices de symboles. L'un de mes objectifs principaux est de constituer un domaine de recherche qui incorpore un vivier bien frétillant de problèmes ouverts et clairement explicités. Je veux entrer dans le monde de Sophus Lie et d'Élie Cartan, y demeurer, et faire partie des mathématiciens qui poursuivent ardemment leurs vastes programmes de recherche.

1.7. Évolution du dossier entre Janvier 2001 et Décembre 2002. Entre Janvier 2001, date de la rédaction du rapport pour la promotion au grade de CR1, et Novembre 2002, date de la rédaction du rapport quadriennal et de la demande de renouvellement d'UMR pour le LATP (UMR6632) à laquelle j'ai participé, c'est-à-dire pendant une période d'environ deux ans, deux faits majeurs ont fait évoluer ma recherche dans une direction psychologiquement, et je l'espère aussi, scientifiquement, positive :

(1) Quatorze nouveaux articles (ce qui a plus que doublé le nombre, égal à onze, d'articles publiés ou acceptés qui apparaissaient dans mon dossier de Janvier 2001), ont été acceptés durant cette période, *voir* §2.1 ci-dessous.

(2) En Mars 2001, en collaboration avec Hervé Gaussier, j'ai commencé à travailler dans une direction nouvelle, qui me semble très riche et très prometteuse : il s'agit d'appliquer la théorie des groupes de Lie locaux à l'étude des équations aux dérivées partielles.

Dans les paragraphes qui vont suivre, le lecteur trouvera un descriptif volontairement "simplifié, pédagogique et accessible" des problèmes que j'ai abordés au cours de ces dernières années, ainsi que des questions ouvertes que je me propose d'étudier dans les prochaines années. Conformément à mon principe d'après lequel les problèmes à résoudre ont par nature beaucoup plus de prégnance que les théorèmes que l'on a réussi à démontrer, et aussi parce qu'il est plus excitant de parler de l'avenir que du passé, j'insisterai surtout sur la formulation des résultats que je "vois", mais que je ne capture pas encore. C'est donc l'avenir qui suscite mon intérêt le plus vif[3].

---

3. Le ton de cette introduction montre certes beaucoup de détermination, mais cette détermination est conforme à ma nature et à mon cursus universitaire (entrée à l'ENS Ulm sans avoir suivi de classes préparatoires, double cursus de mathématiques et de philosophie, comprenant Deug, Licence, Maîtrise et Agrégation). En guise d'épilogue, citons l'extrait suivant d'une lettre de Gauss à Encke, datée du 18 août 1832 : "Je ne peux trouver aucun plaisir à des résultats fragmentaires, et un travail dans lequel je ne trouve aucun plaisir est un tourment pour moi. Que chaque personne travaille dans l'état d'esprit qui lui convient le mieux." Cette exigence formulée par Gauss d'aboutir à des résultats définitifs (*pauca, sed matura*) incite au respect et à l'admiration, mais on notera

§2. Sélection de résultats obtenus dans la période 1998–2002

2.1. Articles formellement acceptés pour publication entre Janvier 2001 et Décembre 2002.

Références

[1] **Joël Merker**, *Convergence of formal biholomorphisms between minimal holomorphically nondegenerate real analytic hypersurfaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **26** (2001), no.5, 281–302.

[2] **Joël Merker**, *On the partial algebraicity of holomorphic mappings between two real algebraic sets*, Bulletin de la Société Mathématique de France **129** (2001), no.3, 547–591.

[3] **Joël Merker and Roman Dwilewicz**, *Hartogs-Bochner phenomenon and decomposition of CR functions*, Proceedings of the American Mathematical Society **130** (2002), no.7, 1975–1980.

[4] **Joël Merker**, *Étude de l'application de symétrie CR formelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), no.3, 165–168.

[5] **Joël Merker, Bernard Coupet, Sylvain Damour et Alexandre Soukhov**, *Sur l'algébricité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **334** (2002), 953–956.

[6] **Joël Merker**, *On envelopes of holomorphy of domains covered by Levi-flat hats and the reflection principle*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 5, 1443–1523.

[7] **Joël Merker and Egmont Porten**, *On wedge extendability of CR meromorphic functions*, Math. Z. **241** (2002) 485–512.

[8] **Hervé Gaussier and Joël Merker**, *A new example of uniformly Levi degenerate hypersurface in* $\mathbb{C}^3$, Ark. Mat., 10pp., in press.

[9] **Sylvain Damour et Joël Merker**, *Sur la convergence d'applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), 831–854.

[10] **Joël Merker**, *On the local geometry of generic submanifolds of* $\mathbb{C}^n$ *and the analytic reflection principle* (Part I), Viniti, to appear, 80 pp.

[11] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Sur l'algébrisabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques de* $\mathbb{C}^n$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (2003), à paraître, 4 pp.

[12] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Géométrie des sous-variétés analytiques réelles de* $\mathbb{C}^n$ *et symétries de Lie des équations aux dérivées partielles*, Bull. Soc. Math. Tunisie (2003), à paraître, 18 pp.

[13] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Nonalgebraizable real analytic tubes in* $\mathbb{C}^n$, Math. Z., to appear, 36 pp.

[14] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Symmetries of partial differential equations*, Korean Math. J., to appear, 30 pp.

2.2. Description succinte de certains résultats obtenus dans ces quatorze références. Dans les références **[1]**, **[2]**, **[4]**, **[5]**, **[6]**, **[9]** et **[10]**, il est question de la géométrie locale des sous-variétés de Cauchy-Riemann analytiques réelles et de la régularité des applications CR. Au cours de ma progression, j'ai formulé clairement et sous forme purement géométrique l'existence d'une paire invariante de feuilletages présente sur la complexifiée d'une telle sous-variété CR générique analytique réelle de $\mathbb{C}^n$. Grâce à cette vision géométrique, il est possible de réinterpréter de manière uniforme tous les résultats de régularité des applications CR, en vertu du fait que les applications CR complexifiées doivent respecter ces paires de feuilletages, c'est-à-dire envoyer chaque feuille "horizontale" (resp. "verticale") de la sous-variété source sur une feuille "horizontale" (resp. verticale") de la sous-variété image, comme tente de l'illustrer la figure suivante[4], extraite de la référence **[10]**:

---

que Gauss se montre quand même ouvert vis-à-vis des mathématiciens nettement plus modestes, dont je fais partie.

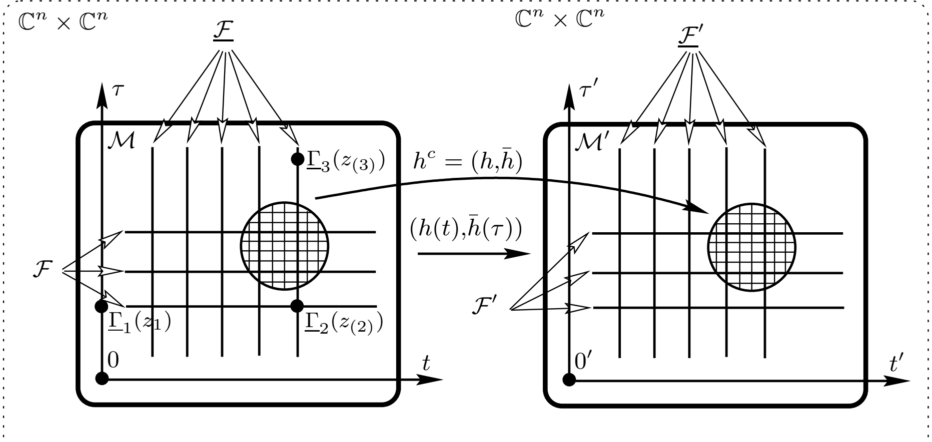


Figure 1 : Les applications complexifiées respectent les paires de feuilletages

Par exemple, le résultat classique de S.M. Webster (Invent. Math. **43** (1977), 53–68) d'après lequel tout biholomorphisme local $h : M \to M'$ entre deux hypersurfaces algébriques réelles (au sens de Nash) Levi non-dégénérées de $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) est algébrique (au sens de Nash) peut s'interpréter intuitivement en pensant que *la rigidité des deux paires de feuilletages algébriques de la Figure 1 impose au biholomorphisme local d'être aussi régulière que les paires de feuilletages des complexifiées $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$.*

Sans être formulées explicitement de cette manière, ces idées apparaissent dans un contexte "CR à singularité isolée" chez J.K. Moser et S.M. Webster (Acta Math. **150** (1983), 255–296) mais aussi dans un cadre restreint, qui ne recouvre pas la minimalité (au sens de J.M. Trépreau et A. Tumanov), dans un travail de R. Sharipov et A. Sukhov (Trans Amer. Math. Soc. **348** (1996), 767–780) et qui est appelé *Segre transversalité* par les auteurs, et enfin dans un travail de M.S. Baouendi, P. Ebenfelt et L.P. Rothschild (Acta Math. **177** (1996), 225–273), avec une vision ensembliste, plus calculatoire et non géométrique.

Par ailleurs, j'ai découvert l'existence d'un invariant plus général qu'une application CR, que j'ai appelé *Application de réflexion*. Son intérêt réside dans le fait que tous les résultats de régularité d'applications CR apparaissent comme des corollaires de la régularité de l'application de réflexion, régularité qui est valable sans avoir à imposer de condition de non-dégénérescence sur la sous-variété générique image.

Sans rentrer dans les détails précis des résultats qui sont énoncés dans ces références **[1]**, **[2]**, **[4]**, **[5]**, **[6]**, **[9]** et **[10]**, je vais en extraire trois groupes, qui tous résolvent des problèmes ouverts connus, lesquels sont notamment cités dans un article de survol paru récemment au Bulletin of American Mathematical Society [5].

Le premier groupe de résultats répond à une conjecture qui résistait depuis une bonne quinzaine d'années.

Théorème 1. *Soient M et M' deux hypersurfaces analytiques réelles connexes qui sont de type fini* (*au sens de J. D'Angelo*). *Alors toute application CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ de M à valeurs dans M' est analytique réelle en tout point de M.*

Je tiens à mentionner que K. Diederich et S. Pinchuk (*Regularity of continuous CR maps in arbitrary dimension*, Mich. Math. J. (2003), to appear) ont obtenu une

4. Attention, cette figure est légèrement inexacte, car la codimension est toujours strictement positive en géométrie CR; il faudrait plutôt s'imaginer deux feuilletages orthogonaux par des lignes horizontales dans l'espace euclidien à trois dimension.

5. Baouendi, M.S.; Ebenfelt, P.; Rothschild, L.P.: *Local geometric properties of real submanifolds in complex space*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000), no.3, 309–336.

version beaucoup plus forte et encore plus attendue de cet énoncé, car il supposent seulement l'application CR *continue*. Néanmoins, le cas $\mathcal{C}^\infty$ était jusqu'à présent tout aussi ouvert, et dans la référence **[6]**, j'obtiens en fait un résultat plus général, qui ne peut pas être couvert, en l'état actuel des choses, par la stratégie de K. Diederich et S. Pinchuk. En effet, ces auteurs utilisent de manière essentielle l'inexistence de courbes holomorphes dans M *et* dans M' (condition équivalente au type de D'Angelo fini pour des hypersurfaces analytiques réelles), alors que les hypersurfaces essentiellement finies qui apparaissent dans l'énoncé suivant peuvent fort bien être feuilletées par des courbes holomorphes, voire même des plans complexes de dimension $(n-2)$.

Théorème $1^{\rm bis}$. *Soient M et M' deux hypersurfaces analytiques réelles connexes dans $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ qui sont essentiellement finies (au sens de S.M. Baouendi, H. Jacobowitz et F. Treves) en tout point. Alors toute application CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ de M à valeurs dans M' dont le déterminant jacobien réel ne s'annule pas en au moins un point de M est analytique réelle en tout point de M.*

Le Théorème 1 est une conséquence directe du Théorème $1^{\rm bis}$, puisque le type de D'Angelo fini entraîne la finitude essentielle et puisque (lorsque M ne contient pas de courbe holomorphe), les fibres de h sont évidemment discrètes. La difficulté essentielle de ce type de résultats (qui explique pourquoi ils ont résisté un certain temps) réside dans le fait qu'on ne fait aucune hypothèse simplificatrice concernant le rang de l'application CR en tout point. Il peut donc fort bien se produire *a priori* que l'application CR soit plate en un point délicat de M, c'est-à-dire que sa série de Taylor en ce point s'annule identiquement. Aussi, les nombreux résultats de S.M. Baouendi, L.P. Rothschild et d'autres publiés dans les années 1985 à 2001, dans lesquels ces auteurs font toujours une hypothèse de non-dégénérescence sur la série de Taylor de l'application CR en le point considéré, ces résultats sont d'une certaine manière “hors-sujet” par rapport au problème à résoudre. Dans **[6]**, j'utilise au contraire un argument de propagation de l'analyticité, sans avoir à considérer l'éventualité de séries de Taylor identiquement nulles. Philosophiquement parlant, le point de vue “propagation de l'analyticité”, qui va de la théorie du prolongement analytique au sens de Weierstrass jusqu'au principe de réflexion de H. Lewy et S. Pinchuk, en passant par l'hypoellipticité analytique de certaines équations aux dérivées partielles, ce point de vue me semble vraiment adéquat pour résoudre des problèmes fins, et j'ai toujours rêvé (sans être parvenu pour l'instant à la construire) d'une théorie qui généralise pleinement aux applications CR les théorèmes de propagation de l'analyticité pour les fonctions CR dans un cadre $\mathcal{C}^\infty$, tels qu'ils apparaissent dans l'analyse microlocale, et notamment dans un travail de J.-M. Trépreau (Bull. Soc. Math. France **118** (1990), 403–450).

Le deuxième type de résultats concerne la régularité des applications de réflexion CR formelles ou de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans **[1]** et **[4]**, je démontre le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $h : (M,p) \to (M',p')$ une application CR formelle inversible d'une sous-variété générique analytique réelle de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ de codimension $d \geq 1$, à valeurs dans une autre sous-variété générique de $\mathbb{C}^n$ de même codimension, dont les équations complexes sont de la forme*

$$\bar{w}_j' - \Theta_j'(\bar{z}',t') = 0, \qquad j = 1,\dots,d,$$

dans des coordonnées $t' = (z',w') \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ s'annulant en p'. Soient $t = (t_1,\dots,t_n)$ des coordonnées s'annulant en p et supposons que (M,p) est minimale *(au sens de J.M. Trépreau et A. Tumanov). Alors l'application de réflexion associée*

$$\mathcal{R}'_h(t,\bar{t}') := \big(\bar{w}'_j - \Theta'_j(\bar{z}',h(t))\big)_{1\leq j\leq d}, \qquad t \in \mathbb{C}^n$$

(qui n'est a priori qu'une série purement formelle en les deux variables t et t') est une série formelle convergente *en les deux variables $(t,\bar{t}')$. En particulier, il en découle comme corollaire que si (M',p') est holomorphiquement non-dégénérée, alors l'application formelle h est convergente dans un voisinage de p. Un second corollaire énonce que deux sous-variétés génériques analytiques réelles minimales en leur point central sont formellement équivalentes si et seulement si elles sont biholomorphiquement équivalentes.*

Ces résultats généralisent des énoncés démontrés auparavant par S.M. Baouendi, P. Ebenfelt, L.P. Rothschild et d'autres, avec une hypothèse analogue à la Levi non-dégénérescence, dite *non-dégénérescence finie*. Sans une telle hypothèse, l'analyse du principe de réflexion en termes seulement de l'application de réflexion $\mathcal{R}'_h$ présente des obstacles conceptuels et techniques sur lesquels je me suis fortement concentré, et que je juge substantiels. On remarquera en effet que le Théorème 2 (mis à part ses deux corollaires) est formulé *sans condition de non dégénérescence sur la sous-variété générique* (M',p'), telle que par exemple "finiment non-dégénérée", "essentiellement finie", ou encore "holomorphiquement non-dégénérée". Dans un premier temps, j'avais formulé un schéma de démonstration qui utilise un théorème de désingularisation des morphismes analytiques, dit *Théorème d'aplatissement local*, dû à M. Lejeune, H. Hironaka et B. Teissier. Mais dans un second temps, je suis parvenu à interpréter conceptuellement la conjugaison complexe comme une symétrie naturelle, mais presque trop "évidente", du problème, ce qui m'a permis d'obtenir une autre démonstration, techniquement plus sobre, en utilisant seulement le théorème d'approximation de M. Artin comme outil non trivial de géométrie analytique locale. L'idée principale de la démonstration du Théorème 2 consiste à jouer avec deux paires d'identités de réflexion "conjuguées", qui sont en fait formellement mais non analytiquement équivalentes, idée nouvelle dans le sujet, et l'on observe ici une parenté profonde avec l'existence de paires de feuilletages qui s'échangent par opération de conjugaision complexe complexifiée (*cf.* FIGURE 1 ci-dessus).

En appliquant cette idée qui fut annoncée dans **[4]** et en se basant sur une technologie mise au point longtemps auparavant en 1988 (Invent. Math. **93** (1988), 481–500) et en 1990 (J. Diff. Geom. **31**, 473–499) par leurs soins, M.S. Baouendi et L.P. Rothschild, en collaboration avec N. Mir, ont ensuite généralisé le Théorème 2 en affaiblissant l'hypothèse que l'application formelle h est inversible [6]. Mais je tiens à souligner que l'obstacle principal par rapport aux précédents travaux de S.M. Baouendi, P. Ebenfelt, L.P. Rothschild ne résidait pas là, il consistait surtout à traiter des applications CR formelles à valeurs dans une sous-variété (M',p') qui est holomorphiquement non-dégénérée, voire même sans aucune condition de non-dégénérescence sur (M',p'), comme cela est énoncé dans le Théorème 2.

6. J. Geom. Anal. **12** (2002), 543–580, dont le preprint date de fin Décembre 2000 : `ArXiv.org/math/abs/Math.CV/0012243`. Plus de six mois auparavant, en Mai 2000, j'avais envoyé sur le site `ArXiv.org` un preprint en anglais (de cuisine) que j'ai ensuite réécrit en français, condensé en 13 pages et remplacé sur le même site en Juillet 2000. Ce preprint accompagnait l'annonce **[4]** soumise en Septembre 2000 et publiée au printemps 2001, le premier referee s'étant désisté après quatre mois d'examen. Je devrais aussi mentionner que N. Mir a démontré le Théorème 2 lorsque (M,p) est une hypersurface (Math. Res. Letters **7** (2000), 343–359; j'ai reçu le preprint de cet article début Mars 2000, immédiatement après que l'auteur l'a rédigé, parce que j'avais écrit auparavant un preprint qui contenait essentiellement le même résultat dans le cas de codimension un, texte que j'avais achevé en Novembre 2000 et transmis en Janvier 2000 à S.M. Baouendi, L.P. Rothschild ainsi qu'à N. Mir, avec qui j'ai échangé des courriers électroniques début Février 2000. Mon

Il est bien vrai que l'on pourrait aussi se demander comment éliminer le plus finement possible les hypothèses de non-dégénérescence sur l'application h, mais

preprint a donné la publication **[1]**. De plus, N. Mir a démontré le Théorème 2 lorsque (M',p') est algébrique (Comm. Anal. Geom., **10** (2002), 23–59). Mais je puis fort aisément argumenter de la *négligeabilité* (au sens de Baire) de ce dernier résultat [dans mes recherches sur les applications CR formelles, je me suis essentiellement interdit de travailler avec des sous-variétés génériques images (M',p') qui sont algébriques ; mais qu'on ne me fasse pas dire que les travaux de N. Mir ont été surévalués, parce que c'est exactement ce que je pense ! et je pense de nombreuses autres choses à ce sujet que je ne peux malheureusement pas écrire ; de toute façon, comme Gauss le suggérait dans la citation de la note de bas de page numéro 3, laissons un peu de champ libre aux mathématiques de tous niveaux]. En effet, voici deux arguments. Premièrement tous les spécialistes savent fort bien que l'algébricité de la sous-variété générique image (M',p') apporte une aide considérable dans les problèmes techniques, aide qui laisse le "vrai" chercheur d'autant plus insatisfait qu'elle ne fournit aucune inspiration valable pour le cas où (M',p') est vraiment analytique réelle. Deuxièmement, il se trouve que récemment, en collaboration avec Hervé Gaussier, j'ai établi des résultats qui démontrent que *la plupart (au sens de Baire) des sous-variétés génériques analytiques réelles ne peuvent être rendues algébriques dans aucun système de coordonnées holomorphes locales*, *voir* Théorème $3^{\rm bis}$ ci-dessous, de tels résultats étant totalement inconnus auparavant. Il en découle donc que tous les résultats sur la régularité des applications CR pour lesquelles l'image (M',p') est algébrique sont en vérité d'une portée intrinsèquement limitée, c'est-à-dire *négligeables* (au sens de Baire !).

Mais revenons-en à l'histoire du Théorème 2. Au total, grâce à une idée nouvelle et naturelle qui apparaissait déjà dans le preprint de l'article **[1]**, j'ai gagné la compétition sur le Théorème 2, parce que j'étais le premier à l'avoir démontré en codimension quelconque et sans supposer que la sous-variété CR image M' est algébrique, finiment non-dégénérée, essentiellement finie, voire même Segre non-dégénérée. Cette victoire a tout particulièrement irrité S.M. Baouendi et L.-P. Rothschild. En effet, lors du colloque *Biholomorphic mappings conference* qui s'est tenu à Palo Alto en Californie en Août 2000, S.M. Baouendi a demandé à l'organisateur principal S.G. Krantz de *parler en premier le lundi matin pour annoncer exactement le même résultat que j'avais mis sur le site* `ArXiv` *deux mois auparavant.* À part le fait d'écrire soigneusement au tableau le nom des personnes travaillant dans le sujet, de donner quelques définitions, et de signaler après coup que j'annonçais aussi le même résultat, S.M. Baouendi n'a quasiment rien dit dans son exposé qui puisse être considéré comme des mathématiques sérieuses (tout le monde sait qu'il n'expose pas bien). Lorsque j'ai demandé publiquement s'il pouvait donner à l'auditoire une idée de la preuve, il s'en est tiré à bon compte en prétextant que la preuve était beaucoup trop compliquée. Lorsque je lui ai demandé en privé de «parler mathématiques», de donner plus de détails, voire même de me donner un preprint, j'ai alors déclenché une aggressivité remarquable et remarquée par de nombreux participants au colloque. Par trois fois, S.M. Baouendi a crié assez fort dans la salle que j'étais fou, qu'il était absolument intolérable que je n'aie pas dit pendant mon exposé que eux aussi avaient le résultat (vraiment ? je devrais citer les copieurs d'un théorème qui a résisté aux efforts de la recherche ?), il a dit que je n'avais qu'à dégager au plus vite du sujet, *etc.* L.P. Rothschild et P. Ebenfelt silencieux, laissaient le "grand chef" exprimer sa colère. Quant à moi, j'ai parfaitement gardé mon calme, pour bien faire comprendre que je n'étais pas dupe de l'emprunt qui m'avait été fait. Les quelques cinq "ultra-spécialistes" de la question résolue par le Théorème 2 savaient parfaitement bien qu'il y avait une réelle difficulté à vaincre pour obtenir une condition nécessaire et suffisante de convergence d'applications CR formelles. Enfin, le 23 Décembre 2000 (c'est-à-dire sept mois après mon preprint), deux jours après que j'ai mis sur le site `ArXiv` le preprint de l'article **[6]**, S.M. Baouendi envoie sur le site `ArXiv` le preprint qui a donné la publication précitée en collaboration avec L.P. Rothschild et N. Mir [J. Geom. Anal. **12** (2002), 543–580]. Voici l'endroit où l'on parle de moi : «*We also mention here that Theorem 1.2, for the case of an invertible map was claimed by Merker in a preprint, http://xxx.lanl.gov/abs/math/9901027v1, but the proof was incorrect (see Closing Remark in* J. Amer. Math. Soc.*,* **13***, 697–723 , (2000)). While the present work was under completion, Theorem 1.2 (in the form of Theorem 2.6) was claimed a second time by Merker for invertible maps in the preprint http://xxx.lanl.gov/abs/math/0005290v1, and then again in a revision of that preprint in http://xxx.lanl.gov/abs/math/0005290v2. The authors of the present paper have been unable to check the proofs of the latter two preprints.*» Dans cette remarque, les auteurs prennent appui sur une erreur que j'ai commise en 1999, que j'ai corrigée ensuite sur le site `ArXiv`. J'avais obtenu un théorème de convergence pour les applications CR formelles dans le cadre analytique qui n'est valide que lorsque M' est *Segre non-dégénérée*, une hypothèse intermédiaire entre le fait que M' soit holomorphiquement non-dégénérée ou essentiellement finie. Je croyais alors je soutiendrai, argumentation à l'appui, que les idées développées par S.M.

(mais cela était erroné) que l'hypothèse de minimalité et de Segre non-dégénérescence impliquaient ensemble la non-dégénérescence holomorphe. Bref, la preuve restait la même avec cette hypothèse intermédiaire, qui allait de toute façon bien au-delà des sous-variétés essentiellement finies qui ont été étudiées *ad libitum*. Je dois mentionner que ce preprint n'a jamais été publié. Mais on remarquera la finesse de la perfidie dans cette citation : sans mentionner que j'avais corrigé l'erreur, les auteurs laissent entendre que mon preprint sur `ArXiv` de Juin 2000 est lui aussi très certainement faux. Malheureusement pour eux, il était juste. Et dans l'introduction, j'expliquais très clairement l'idée nouvelle qui débloquait la situation. Alors S.M. Baouendi, L.P. Rothschild et le pauvre petit N. Mir qui s'est laissé entraîner dans cette publication, plutôt que d'essayer de lire mon article, ont récupéré l'idée nouvelle, ce que je puis démontrer le plus facilement du monde, et l'ont ensuite masquée un peu dans les notations, en rajoutant tous les raffinements techniques qu'ils connaissaient pour être sûrs qu'ils avaient dépassé le cadre des applications CR formelles inversibles que j'avais étudiées, afin de me détruire dans les colloques en prétextant que de toute façon ce que je démontre est du niveau "corollaire" de leurs résultats. Mais au vu de la technologie connue, de tels raffinements étaient aisés –,juste d'un niveau de thèse, devrais-je dire – , surtout après le déblocage principal que j'avais achevé. Je trouvais quant à moi ridicule de se concentrer sur les raffinements immédiats une fois l'obstacle principal vaincu, mais aujourd'hui, je commence à comprendre qu'il est nécessaire d'être très méfiant avec ces gens-là, et qu'il est préférable de cacher ses résultats jusqu'à ce que plus aucun raffinement superficiel ne soit possible. Pour terminer sur cette affaire, leur preprint a d'abord été soumis à Duke Math. J., et rejeté par un Sergey Pinchuk plutôt goguenard expliquant aux éditeurs que si les auteurs S.M. Baouendi, N. Mir et L.P. Rothschild n'étaient pas parvenus à lire mon preprint noyé dans les calculs formels, lui non plus ne parvenait pas du tout à lire leur preprint qui était tout aussi noyé dans les calculs formels. Dans la version qui fut resoumise et publiée ensuite le plus rapidement possible au J. Geom. Anal., via les relations d'entente cordiale entre S.M. Baouendi et S.G. Krantz, l'extrait que j'ai cité a disparu – pour quelle raison? À cause de l'exigence de bienséance éditoriale ou bien parce que le vent de l'opinion avait déjà tourné en ma faveur?. En tout cas, dans cet article, on ne trouve aucune mention de ma note aux Comptes Rendus **[4]** publiée bien avant, et d'ailleurs plus aucune référence à J. Merker. La stratégie de la «Baouendi-Rothschild company» consiste maintenant à m'ignorer complètement.

À ce sujet, si le lecteur de ce rapport devait aussi écrire un rapport sur la Délégation CNRS obtenue par N. Mir en 2002-2003, il pourra d'ailleurs sûrement observer que N. Mir ne parle pas une seule fois de J. Merker dans ses publications et dans ses rapports de recherche, le danger pour l'évaluation de ses travaux étant visiblement bien trop grand. Le lecteur pourra se demander pourquoi donc parlé-je de toutes ces histoires. La réponse est simple : pendant que S.M. Baouendi, P. Ebenfelt, L.P. Rothschild et N. Mir obtenaient quatre publications dans des revues cotées, leur quatrième et dernière publication étant le travail (définitif) au J. Geom Anal. mentionné au début de cette note de bas de page, je n'obtenais quant à moi que la publication **[1]** dans une revue assez modeste et la Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **[4]**, pour laquelle il a d'ailleurs fallu que je me batte très sévèrement parce que P. Lelong m'objectais qu'avoir mis un preprint sur le site *ArXiv* consituait une publication, ce qui n'est pas vrai. Pendant une longue période, j'ai beaucoup souffert de ces histoires, personne ne voulant reconnaître ma contribution, cela m'ayant rendu très agressif. Un lion que l'on a longtemps nourri au yaourt et à la salade peut devenir particulièrement dangereux.

Par ailleurs, au sujet de ces applications CR dont l'image est algébrique, pour ma conscience, je dois reconnaître avoir cosigné la publication **[5]**, qui traite des applications CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans un ensemble algébrique réel, mais je l'ai fait parce que S. Damour, étudiant de l'Université de Provence que j'ai co-encadré avec B. Coupet, avait travaillé dans cette direction depuis trois mois, et parce qu'il a fallu le défendre, au moment précis où nous avons reçu un preprint de F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev, annonçant le même type de résultats sur le site `ArXiv` le 28 Janvier 2002. Pour montrer combien l'arbitrage défavorable qui m'a été implicitement accordé en France ou à l'étranger suite à toutes ces affaires pendant une période qui est maintenant fort heureusement révolue, pour montrer combien cet arbitrage défavorable n'a pu prendre de sens au sein de l'opinion que parce que je suis un être indépendant de fort caractère et peu soucieux de diplomatie scientifique, *mais pas en vertu de faits tangibles*, voici maintenant une autre histoire véridique très intéressante. Dans l'article principal de sa thèse (Michigan Math. J. **49** (2001), no.3, 583–603), S. Damour a démontré un théorème de régularité d'applications CR en codimension arbitraire. Grâce à une discussion que nous avons eue ensemble en Avril 2000, S. Damour a surmonté une difficulté substantielle, bien connue des spécialistes : dans la construction de A. Tumanov de

Baouendi et L.P. Rotshchild que je viens d'évoquer à l'instant ne se dirigent peut-être pas dans la bonne direction. En effet, dans un cadre algébrique (mais je suis

disques de défaut nul attachés à des sous-variétés CR génériques minimales en un point p, la direction de sortie des disques varie dramatiquement lorsque l'on rétrécit les ouverts centrés en p auxquels ces disques sont attachés : la méthode *ne donne pas de contrôle de la direction de sortie.* En trois heures au tableau, sans y avoir réfléchi auparavant, et en utilisant bien sûr les idées de ma thèse et de mes travaux en collaboration avec E. Porten sur les wedges attachés et sur les déformations de sous-variétés CR dans lesdits wedges attachés, j'ai suggéré à S. Damour un schéma de démonstration valide, qu'il a acceptée trois mois plus tard seulement et qu'il a ensuite rédigée seul, rigoureusement, sous forme parfaite et sans aucune aide supplémentaire. Mais en Octobre 2000, invité par J.E. Fornæss à donner un exposé lors d'une «Midwest Conference», S. Damour se fait publiquement attaquer pendant son exposé, de manière orale, par P. Ebenfelt, qui l'accuse d'avoir «volé» un preprint de F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev. P. Ebenfelt devait probablement être rapporteur pour ce preprint soumis dans une revue, ou en avoir une copie, *mais ni S. Damour ni moi-même n'avions jamais vu ce preprint.* Malaise dans la salle. [Il faut dire que S.M. Baouendi, L.P. Rothschild et leur groupe (auquel appartient P. Ebenfelt) avaient été passablement irrités en 1999 lorsque S. Damour avait repéré une erreur substantielle dans un article de D. Zaitsev qui devait paraître (et qui est paru après révision sans mention de la contribution de S. Damour) à *Acta Mathematica*, et dont ils étaient les rapporteurs, et il faut reconnaître aussi qu'ils avaient été encore plus irrités que je fasse circuler une lettre expliquant cette affaire qui les ridiculisaient.] Après l'exposé de S. Damour, J.-P. Rosay, J.E. Fornæss et d'autres insistent : «alors, c'est vrai, tu as écrit ton résultat en disposant du preprint de F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev sous la main, c'est honteux !» Mais lorsque S. Damour rétorque que son preprint à lui a été soumis en Janvier 2000, qu'il est *déjà accepté depuis Avril 2000* et qu'il n'a jamais vu le preprint que cite oralement P. Ebenfelt, on se rend à l'évidence parmi les curieux. Ensuite, J.E. Fornæss aurait «passé un savon» à P. Ebenfelt, qui s'est alors excusé, au début de son exposé (qui avait lieu le lendemain), d'avoir fait une telle accusation publique désobligeante. Mais ce n'est pas tout. P. Ebenfelt et S. Damour s'expliquent alors entre eux. Que se passe-t-il dans ces cas-là ? Bien sûr : S. Damour donne plus de détails oralement sur sa preuve, il explique le point le plus délicat concernant la nécessité de construire des wegdes attachés, et enfin il donne une version de son preprint à P. Ebenfelt ! *Catastrophe* ! C'était inciter encore une fois à une triche ultra-facile ! De plus, S. Damour avait mis à la disposition du public son preprint sur sa page web personnelle, et grâce à un mouchard installé par un informaticien du LIF (Laboratoire d'Informatique Fondamentale, voisin du LATP au CMI à l'Université de Provence), S. Damour a pu vérifier que des machines se sont connectées sur sa page web depuis l'Université de San Diego (où sont employés L.P. Rothschild, S.M. Baouendi et P. Ebenfelt) deux jours après son retour des États-Unis. [Je vérifie quant à moi que des machines de Rouen (mais pas de Nantes, Bordeaux, Strasbourg ou Perpignan) et aussi de Suisse, se connectent sur ma page web environ une fois par semaine, amusant n'est-ce pas ?] La suite est facile à deviner : P. Ebenfelt transmet le preprint de S. Damour à F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev (mais seul ce dernier aura vraiment participé à la rédaction des corrections) qui corrigent immédiatement leur preprint et le resoumettent sous forme révisée courant décembre 2000. L'article paraîtra rapidement dans le journal de Baouendi-Rothschild. Enfin, je termine avec l'histoire de la note **[5]**. Ainsi donc, fin Janvier 2002, nous voyons arriver sur le site `ArXiv` un autre preprint (qui n'est pas encore publié ni accepté à ma connaissance) de F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev, dans la bibliographie duquel est annoncé que l'article qui a été «emprunté» à S. Damour paraîtra dans le journal *Mathematical Research Letters*, détenu par S.M. Baouendi et L.P. Rothschild. Ces trois auteurs se sont bien sûr gardés de mettre cet article sur le site `ArXiv`, car ils sont malins, les coquins ! En tout cas, sur la version finale de l'article de F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev (Math. Res. Lett. **9** (2002), no. 1, 73–93), S.M. Baouendi et L.P. Rothschild, n'auront pas jugé nécessaire de préciser "revised version received December 2002" (en décembre, d'après mes déductions), et l'on voit la mention "received June 19, 2001", comme si F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev avaient toujours travaillé avec des wedges attachés, comme s'ils étaient fins connaisseurs des techniques de A. Tumanov, comme si de rien n'était ! Mais on ne me fera pas dire que S.M. Baouendi et L.P. Rothschild sont des mathématiciens surfaits qui veulent toujours s'accaparer les résultas des autres lorsqu'ils sont dépassés et qu'ils incitent les jeunes de leur groupe à se comporter de la même manière, parce que c'est exactement ce que je pense ! Ce qui est drôle dans cette histoire, c'est que, suite à cette affaire dont il a lui-même fait les frais, S. Damour qui me trouvait auparavant plutôt «subjectif» dans mes jugements sur la «compagnie Baouendi-Rothschild» a complètement changé d'avis, qu'il a adopté la position «il faut se méfier de ces gens-là» et qu'il a trouvé que mon point de vue avait quelque fondement. Ainsi, non content d'avoir aidé indirectement D. Zaitsev une première fois à publier un article juste dans *Acta* bien loin aujourd'hui d'obtenir un analogue dans le cas analytique), en utilisant la notion de *degré de transcendance* d'une application CR, introduite en 1990 par S. Pinchuk et A. Pushnikov dans un cadre Levi non-dégénéré puis exploitée plus à fond dans plusieurs travaux en collaboration par B. Coupet, F. Meylan, S. Pinchuk et A. Sukhov en 1999, j'ai démontré le résultat suivant dans **[2]** (qui est équivalent au résultat principal de l'article), et ce non seulement sans aucune hypothèse de non-dégénérescence sur M', mais aussi sans aucune hypothèse sur le rang de h :

Théorème 2^{bis}. *Soit une application holomorphe locale $h : M \to M'$ entre deux sous-variétés génériques de $\mathbb{C}^n$ et de $\mathbb{C}^{n'}$ telles que M est minimale en un point Zariski-générique. Sans perte de généralité, on peut supposer que M' est un morceau lisse de l'unique ensemble algébrique minimal pour l'inclusion parmi les sous-ensembles algébriques réels contenant l'image de h (il suffit de prendre leur intersection, qui est un ensemble algébrique) et que M' est localement représentée par des équations complexes de la forme $\bar{w}'_{j'} - \Theta'_{j'}(\bar{z}',t') = 0$, $j' = 1,\dots,d'$. Alors l'application de réflexion associée*

$$\mathcal{R}'_h(t,\tau') := \left(\xi'_{j'} - \Theta'_{j'}(\zeta',h(t))\right)_{1\leq j'\leq d'},$$

Mathematica, S. Damour aidait encore une seconde fois D. Zaitsev, F. Meylan et N. Mir à publier un article juste dans le journal *Mathematical Research Letters*, détenu par S.M. Baouendi et L.P. Rothschild. En guise de dessert, voici maintenant le texte complet de ma recension [pour Zentralblatt Math.] de cet article «emprunté» à S. Damour par F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev : «*This article is about the analytic regularity of $\mathcal{C}^\infty$-smooth CR mappings between real analytic submanifolds of complex euclidean spaces of different dimensions. The main technical tool is borrowed from a general framework introduced in two previous articles by B. Coupet, S. Pinchuk and A. Sukhov (C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** *(1999), 489–494; Math. Z.* **235** *(2000), 541–557) where similar results are dealt with codimension one source CR manifold, and the geometric notion of wedges attached to generic submanifolds is borrowed from an article by J. Merker and E. Porten (Indiana Univ. Math. J.* **48** *(1999), 805–856) and from the deeps works of A.E. Tumanov. One should be aware that the main result of the paper is the same, with exactly the same proof as the main result of a paper by S. Damour (Michigan Math. J.* **49** *(2001), 583–603), which was received by the Michigan Math. J. on January 30, 2001, which had circulated as a preprint before publication, whereas the paper under review was sent to Math. Res. Lett. later on June 19, 2001, without the mention that the first version of the paper submitted by F. Meylan, N. Mir and D. Zaitsev, whose first proof had an essential gap and of which the reviewer has obtained a copy, has been revised substantially after a conference talk of S. Damour in October 2001 in Ann Arbor.*» On notera que j'écris avoir reçu après coup une copie de leur premier preprint qui était faux, ce qui est inexact, la seule preuve dont je dispose pour prouver qu'ils ont triché étant fondée sur les raisonnements précédents et sur le fait que F. Meylan l'a quasiment reconnu devant moi quand je la questionnais avec insistance au Colloque de Rouen (Juin 2002) en l'honneur de M. Derridj.
Alors, finalement, qui pille qui ? S'il connaît d'autres versions de ces histoires, le lecteur pourra certes s'interroger. En tout cas, les versions personnelles que j'ai développées lui permettront sûrement de compléter et d'affiner ses opinions. Il faut bien comprendre que je ne prends le "risque" d'exposer mes points de vue critiques dans ce rapport que parce que j'ai décidé de quitter le sujet des applications CR pour entrer dans un sujet beaucoup plus vaste et beaucoup plus prometteur. On trouvera par ailleurs sur la page http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/Rapports/mir.html un rapport public que j'ai dû écrire récemment sur un projet de publication de N. Mir. Le principal, c'est que, de mon propre point de vue, il ne fait maintenant plus aucun doute que je suis meilleur chercheur que L.P. Rothschild, S.M. Baouendi, D. Zaitsev, N. Mir, et F. Meylan (ce qui n'est certes guère difficile), même réunis en un groupe compact : c'est un peu comme en course à pied de longue distance, avec le temps, on voit les écarts se creuser. Et à la question «qui pille qui ?», je réponds immédiatement que j'ai enfin compris qu'il fallait que je «coupe le robinet» : plus d'aide, plus de preprint, plus d'idées substantielles que ces gens-là généraliseraient superficiellement après coup. Et lorsque l'on me dit «Arrête toutes ces histoires, Joël, tout le monde sait bien que Baouendi-Rotshchild sont incorrigibles, tu perds ton temps !», je l'accepte ! Comme l'écrivait Gauss, laissons libre cours aux mathématiques de tous niveaux !

se prolonge comme application algébrique des deux variables $(t,\tau') := (t,\zeta',\xi') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'-d'} \times \mathbb{C}^{d'}$.

Quitte à décentrer infinitésimalement le point de référence, l'algébricité des objets géométriques considérés permet en effet de se placer en un point où l'ensemble algébrique réel minimal pour l'inclusion qui contient $h(M)$ est lui-même lisse. J'appelle *principe de délocalisation* ce déplacement possible du point central. Ce principe simplifie considérablement les démonstrations, en vertu du fait général que *la globalité interne des objets algébriques permet de les saisir entièrement à partir d'un voisinage quelconque d'un point arbitraire qui leur appartient*. Cette "saisissabilité par délocalisation" explique pourquoi les raffinements du principe de réflexion ont un caractère aussi achevé dans le cadre algébrique. Mais lorsque les sous-variétés CR sont vraiment analytiques (*cf.* Théorèmes 3^{bis} et 3^{quart} ci-dessous), il est absolument impossible de délocaliser les points centraux.

En vertu du Théorème 2^{bis}, il semble clair que l'hypothèse la plus naturelle à énoncer pour se débarrasser de toute condition de rang sur h est de supposer que l'image M' est minimale pour l'inclusion contenant $h(M)$. On est donc loin des hypothèses presque *ad hoc* faites sur la série de Taylor de h en un point de référence, avec lesquelles S.M. Baouendi, L.P. Rothschild et d'autres ont travaillé *ad libitum*. Mais lorsque M' est analytique, le sous-ensemble analytique réel minimal pour l'inclusion contenant $h(M)$ possède *a priori* des singularités, et on ne peut pas délocaliser comme dans le cas algébrique. Cette remarque doit naturellement conduire à formuler et à démontrer des versions du principe de réflexion pour des applications CR entre ensembles analytiques réels avec singularités éventuelles. Mais pour l'instant, je suis toujours un peu dans le flou et je ne parviens toujours pas à formuler des généralisations du principe de réflexion pour des applications "CR avec singularités" entre *deux* ensembles analytiques réels *avec singularités*.

Malgré ce flou, poursuivons la discussion. Au sujet de la fonction de réflexion, j'ai formulé dans **[6]** une conjecture forte que je considère comme la généralisation presque complète (à ceci près que j'ignore encore comment faire totalement disparaître l'hypothèse de rang) du *principe de réflexion de Schwarz* à plusieurs variables complexes.

Conjecture 2^{ter}. *Soit* $h : M \to M'$ *une application CR continue entre deux hypersurfaces analytiques réelles globalement minimales* (*au sens de J.M. Trépreau et A. Tumanov*) *de* $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$. *On suppose que le prolongement holomorphe de* h *à un voisinage unilatéral de* M *est de rang générique égal à* n. *Alors la fonction de réflexion se prolonge holomorphiquement en tout point* $p \times \overline{h(p)}$ *du graphe de* $\bar{h}$. *De plus, si* M' *est holomorphiquemen non-dégénérée, alors* h *se prolonge holomorphiquement au voisinage de tout point de* M.

Pour se rendre compte de la portée et de la difficulté de cette conjecture (que je me sens bien incapable d'aborder aujourd'hui), je dirai d'une part que la littérature actuelle ne contient même pas la démonstration de l'analyticité de la fonction de réflexion au point générique sous ces hypothèses, et d'autre part que ce n'est que tout récemment que K. Diederich et S. Pinchuk sont parvenus à démontrer un tel type d'énoncé, *en utilisant constamment l'hypothèse que* M' *ne contient pas de courbe holomorphe*, hypothèse qui ne devrait en principe pas apparaître dans les généralisations les plus complètes du principe de réflexion de Schwarz.

Il est facile de formuler un exemple pour lequel la Conjecture 2^{ter} est mise en défaut lorsque le rang générique de h n'est pas égal à n, la raison d'être principale d'un tel exemple étant que M' n'est pas minimale pour l'inclusion contenant $h(M)$. Pour être encore plus puriste concernant une telle conjecture, il faudrait donc la formuler *sans aucune hypothèse de rang sur h.* Cela donnerait la formulation approximative suivante : *Soit $h : M \to X'$ une application CR continue d'une hypersurface analytique réelle globalement minimale à valeurs dans un sous-ensemble analytique réel de $\mathbb{C}^n$, minimal pour l'inclusion contenant l'image de h. Alors la fonction de réflexion se prolonge holomorphiquement en tout point de M.* Mais à ce point précis, il manque un morceau à mon puzzle : bien qu'y ayant plusieurs fois réfléchi, je ne sais même pas comment définir la fonction de réflexion en un point où l'ensemble X' n'est pas lisse! De plus, pour être encore plus général, il faudrait remplacer l'hypersurface M par un ensemble analytique réel quelconque X, il faudrait trouver des formulations satisfaisantes de la minimalité, définir clairement la notion de fonction CR sur X et démontrer une version optimale de l'extension unilatérale des fonctions CR sur X, ainsi que des résultats de propagation de l'extension des fonctions CR sur X. Par ailleur, il faudrait aussi tenter d'éliminer l'hypothèse de minimalité d'une manière ou d'une autre, mais les idées manquent encore plus.

Toutes ces spéculations ne suffiront pas, et pour renchérir encore d'insatisfaction mathématique, je rappellerai que malgré l'existence de nombreux travaux sur la régularité au bord des applications holomorphes, nul n'est en mesure d'approcher aujourd'hui, même de loin, la généralisation du Théorème de C. Fefferman (d'après lequel tout biholomorphisme entre deux domaines bornés strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$ se prolonge de manière $\mathcal{C}^\infty$ jusqu'au bord du premier domaine) au cas de domaines à bords lisses non nécessairement pseudoconvexes, ou encore de démontrer un analogue complet, à plusieurs variables complexes, du Théorème de Carathéodory (d'après lequel un biholomorphisme entre deux domaines délimités par une courbe de Jordan dans $\mathbb{C}$ se prolonge continûment en un homéomorphisme entre les deux courbes de Jordan). De tels résultats seraient sûrement célestes.

Mais revenons aux mathématiques terrestres. Toujours dans le second groupe de résultats et toujours dans **[6]**, en mariant le principe de réflexion avec la technique des disques analytiques pour décrire une partie de l'enveloppe d'holomorphie d'un domaine recouvert par un "chapeau" Levi-plat, objet que tente de décrire la figure suivante:

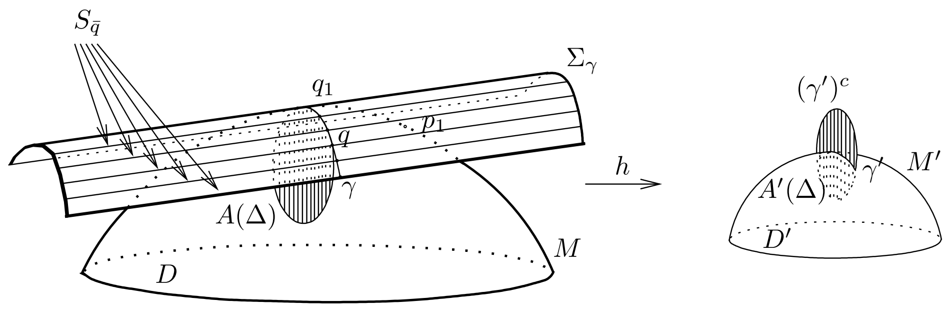


Figure 2: Un domaine de $\mathbb{C}^n$ recouvert par un "chapeau" Levi-plat

,

je démontre le résultat suivant, sur lequel j'ai travaillé plus de quatre années :

Théorème 2^{quart}. *Soit $h : M \to M'$ un difféomorphisme CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre deux hypersurfaces analytiques réelles connexes et globalement minimales de $\mathbb{C}^n$ ($n \geq$*

2). *Soit p un point arbitraire de M, soient $t = (t_1, \ldots ,t_n)$ des coordonnées centrées en p, et soit*

$$\bar{w}' = \Theta'(\bar{z}',t'),$$

l'équation complexe de M' dans des coordonnées $t' = (z',w') \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ centrées en le point $p' := h(p)$. Alors l'application de réflexion associée

$$\mathcal{R}'_h(t,\bar{t}') := \bar{w}' - \Theta'(\bar{z}',h(t)), \qquad t \in \mathbb{C}^n$$

(qui est a priori seulement CR par rapport à la variable t) se prolonge holomorphiquement au voisinage de $p \times \overline{h(p)}$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. En particulier, il en découle comme corollaire que si (M',p') est holomorphiquement non-dégénérée, alors h est analytique réelle en tout point de M.

Dans ce dernier théorème, je fais une hypothèse de non-dégénérescence (CR-difféomorphisme), que je pourrais bien sûr affaiblir. Et même si de nombreux raffinements (hypothèses de non-dégénérescence plus faibles portant sur la série de Taylor de h en p, telle que déterminant jacobien non identiquement nul, *etc.*) sont déjà écrits ou sont encore possibles, il n'en demeure pas moins qu'on aimerait bien énoncer un théorème dans lequel *on voit les hypothèses de non-dégénérescence se propager en tout point de M*, comme dans les Théorèmes 1 et 1^{bis}. Il se trouve que très peu de temps après que l'article **[6]** soit définitivement accepté, j'ai découvert une manière simple et naturelle d'éliminer l'hypothèse "h est un difféomorphisme CR" dans le Théorème 2'. Tout repose sur l'énoncé suivant, dont je n'ai pas encore eu le temps d'écrire la démonstration, et dont une sous-version a déjà été démontré par E.M. Chirka et C. Rea (Duke Math. J. **94** (1998), 325–340) :

Théorème 2^{quint} de Hopf pour les applications CR. *Soit $h : M \to M'$ une application CR de classe $\mathcal{C}^2$ entre deux sous-variétés génériques connexes de $\mathbb{C}^n$. On suppose que M est globalement minimale, c'est-à-dire consiste en une seule orbite CR. Soit $p \in M$, soit $p' := h(p)$ et notons r_p le rang transversal de h en p, c'est-à-dire le rang de l'application différentielle quotient*

$$dh(p) : T_pM/T_p^cM \longrightarrow T_{p'}M'/T_{p'}^cM',$$

qui est bien définie parce que l'on a $dh(p)(T_p^cM) \subset T_{p'}^cM'$, en vertu du fait que h est une application CR. Alors le rang transversal r_p est constant sur M. En d'autres termes, le rang transversal des applications CR se propage et il est constant le long des orbites CR.

Étant donné que dans la démonstration du Théorème 2^{quart}, on n'utilise essentiellement que la non-annulation du rang transversal de l'application CR, en voici une généralisation qui repose sur ce Théorème de Hopf pour les applications CR :

Corollaire 2^{sixt}. *Le Théorème 2^{quart} reste vrai en supposant seulement, comme dans le Théorème 1^{bis}, que le déterminant jacobien de h ne s'annule pas en au moins un point de M. A posteriori, il en découle que le déterminant jacobien de h est non-identiquement nul en tout point de M.*

Il est à noter aussi que le Théorème de Hopf pour les applications CR redonne une seconde démonstration des Théorèmes 1 et 1^{bis}, plus rapide est plus naturelle que celle écrite dans **[6]**. De plus, il va sans dire qu'il existe une version purement formelle du Théorème de Hopf pour les applications CR, et des corollaires correspondants au sujet de la régularité des applications CR formelles. Je ne les ai pas encore formulés, et je ne sais même pas quand j'aurai le temps de travailler à ces raffinements.

Voici maintenant une description rapide du troisième groupe de résultats. Dans les références **[13]** et **[11]** (qui sera une annonce), en collaboration avec Hervé Gaussier, je me suis attaqué à la question de savoir s'il existe de "vraies" sous-variétés analytiques réelles génériques de $\mathbb{C}^n$, qui ne sont pas "algébrisables". On dira qu'une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$ est *localement algébrisable en un de ses points* p s'il existe un système de coordonnées holomorphes centrées en p dans lesquelles M est algébrique (au sens de Nash). Concrètement, en dimension deux, la question revient à déterminer s'il existe des hypersurfaces Levi non-dégénérées analytiques réelles locales de $\mathbb{C}^2$ qui ne sont algébriques dans aucun système de coordonnées holomorphes locales. La réponse à cette question semble "bien évidemment" être positive, à ceci près que

(1) toute sous-variété totalement réelle analytique réelle de dimension réelle $k \leq n$ dans $\mathbb{C}^n$ est bien évidemment localement algébrisable, puisqu'elle est localement biholomorphe à son plan tangent en un point ;

(2) toute sous-variété complexe de dimension complexe $k \leq n$ est elle aussi bien évidemment algébrisable, puisqu'elle est ainsi localement biholomorphe à son plan tangent en un point ;

(3) plus généralement, toute sous-variété CR analytique réelle Levi plate est algébrisable, puisqu'elle est localement biholomorphe à son plan tangent ;

(4) seulement deux exemples de sous-variétés CR non algébrisables étaient connus auparavant : d'une part, une hypersurface non minimale et non Levi-plate de $\mathbb{C}^2$ (et plutôt exotique) construite par P. Ebenfelt en 1996 pour exhiber un phénomène de non-unicité dans un problème de Cauchy associé à des applications CR et qui pouvait être réutilisé facilement comme exemple d'hypersurface non algébrisable (cet exemple est cité dans la référence de la note de bas de page numéro 5), mais son défaut majeur est de n'être même pas minimale en le point considéré ; et d'autre part, l'hypersurface Levi non-dégénérée $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Im} w = e^{|z|^2}\}$ étudiée par X. Huang, S. Ji et S. Yau, qui consacrent la totalité des quinze pages de calculs formels d'un de leurs articles (Ark. Mat. **39** (2001), no.1, 75–93) à démontrer que cet exemple n'est pas algébrisable ;

(5) il faut bien faire attention aux pièges : l'hypersurface $\operatorname{Im} w = \ln(1 + z\bar{z})\}$ est quant à elle algébrisable, puisqu'elle est biholomorphe à la sphère de Heisenberg $\{\operatorname{Im} w = z\bar{z}\}$. Puisque toutes les transformations biholomorphes locales transcendantes sont autorisées, le problème d'algébrisabilité locale d'hypersurfaces analytiques réelles est assez subtil.

La méthode de X. Huang, S. Ji et S. Yau n'est pas éclairante : elle consiste à calculer explicitement les sept invariants différentiels de la connexion projective de Cartan-Chern-Moser pour l'hypersurface $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Im} w = e^{|z|^2}\}$, à vérifier qu'il n'existe pas de relation algébrique entre ces sept invariants, et à démontrer par ailleurs, que si cette hypersurface était algébrisable, alors il existerait une relation algébrique non triviale entre ces sept invariants. Il écrivent explicitement dans leur article qu'il ne semble pas facile de formuler des classes d'exemples en utilisant la même recette.

Puisque la théorie de Cartan-Chern-Moser n'aboutit, à ma connaissance, que pour les hypersurfaces Levi non-dégénérées de $\mathbb{C}^n$ (et encore, je pourrais facilement argumenter que, contrairement à ce que croient tous les spécialistes, l'analyse de Chern-Moser est profondément incomplète par rapport à la classification de Cartan des hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$, la raison essentielle étant due au fait que lesdits spécialistes n'ont pas lu ni les travaux d'Élie Cartan, ni ceux de S. Lie sur lesquels ces travaux se sont érigés, voir la Section 4 ci-dessous), et puisque les calculs qu'elle soulève sont très lourds, il vaut mieux procéder autrement. Tout d'abord, dans la référence **[13]**, nous démontrons le théorème suivant qui servira à construire des classes infinies d'exemples de sous-variétés non algébrisables et non équivalentes entre elles, en codimension quelconque.

Théorème 3. *Soit M une sous-variété générique algébrique réelle de $\mathbb{C}^n$, passant par l'origine, minimale et finiment non dégénérée en* 0. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, les trois conditions suivantes sont satisfaites :*
(a) *Le (pseudo)groupe G_M des biholomorphismes locaux de $\mathbb{C}^n$ définis sur le polydisque $\Delta_n(0,\varepsilon)$ et stabilisant M est un groupe de Lie local algébrique réel de dimension finie m ne dépendant que de la géométrie locale de M au voisinage de l'origine.*
(b) *Il existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et une application* algébrique *H_M, constructible algorithmiquement à partir des équations définissantes de M, définie au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, vérifiant $H_M(t,0) \equiv t$, et telle que toute application holomorphe $h : \Delta_n(0,\varepsilon') \to \Delta_n(0,\varepsilon)$ suffisamment proche de l'identité, stabilisant M, vérifie $h = H_M(.,e_h)$ pour un unique $e_h \in \mathbb{R}^m$.*
(c) *L'application $(t,e) \mapsto H_M(t,e)$ définit un groupe de Lie local algébrique de biholomorphismes algébriques stabilisant M.*

Le point important dans ce théorème est que *si la sous-variété générique est algébrique, alors son groupe d'automorphismes CR locaux est un groupe de Lie algébrique réel, c'est-à-dire que la loi de multiplication totale définie par l'application $(t,e) \mapsto H_M(t,e)$ est algébrique.* Cet énoncé n'est absolument pas contenu dans le théorème de Webster, qui établit seulement que les biholomorphismes stabilisant M sont algébriques et ne dit rien (et ne peut rien dire) sur l'algébricité par rapport au paramètre des familles à un paramètre de biholomorphismes stabilisant M. Il est à noter que M.S. Baouendi, P. Ebenfelt et L.P. Rothschild (Math. Ann. **315** (1999), 205–249) ont obtenu une version partielle de ce théorème, puisqu'ils ont établi que le groupe d'*isotropie* d'un point central fixé $p_0 \in M$ est un groupe de Lie algébrique réel global. Néanmoins, ce résultat est d'une porté limitée, puisque c'est surtout la partie *transitive* du groupe de transformation qui présente de l'intérêt, notamment dans la recherche de sous-variétés CR homogènes, mais alors il faut utiliser le concept de *groupe de Lie local*, tel que Sophus Lie lui-même l'avait introduit dans ses travaux bien avant que Chevalley ne remodèle complètement la théorie sous un point de vue abstrait et global. Travailler pour l'étude du groupe de Lie local complet demande beaucoup de soin, parce qu'il est nécessaire de préciser explicitement les polydisques dans lesquels on travaille, comme l'illustre la figure suivante, extraite de **[13]**, où pas moins de cinq polydisques emboîtés doivent être introduits :

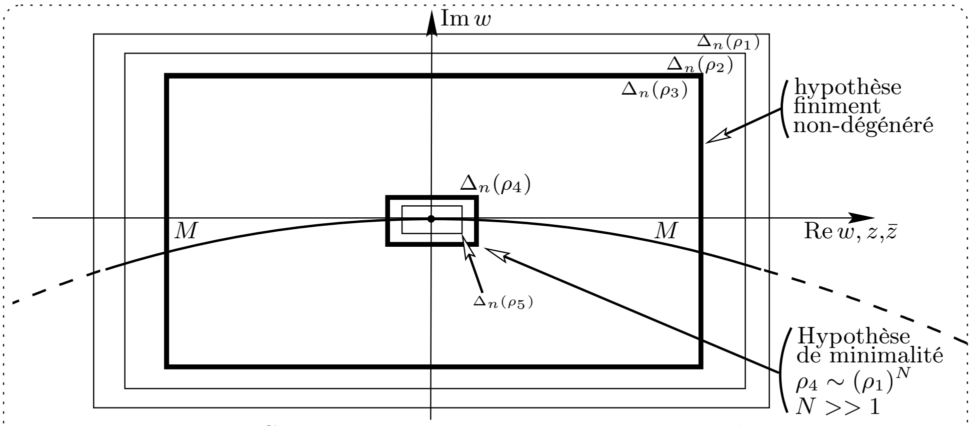


FIGURE 3: COLLECTION DE POLYDISQUES CENTRÉS À L'ORIGINE

On considère maintenant la famille $\mathcal{T}_n^d$ des sous-variétés analytiques réelles génériques de $\mathbb{C}^n$, définies au voisinage de l'origine, de codimension d, minimales et finiment non dégénérées en 0, dont le groupe G_M est commutatif, de dimension n. Il existe alors, pour tout élément M de $\mathcal{T}_n^d$, un système local de coordonnées holomorphes centré à l'origine $(z,w) = (x + iy, u + iv) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ et d fonctions analytiques réelles $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ s'annulant en 0, tels que M soit représenté au voisinage de 0 par les équations $v_1 = \varphi_1(y), \ldots, v_d = \varphi_d(y)$. Dans ce cas, M est finiment non dégénéré en 0 si et seulement s'il existe $(n-d)$ multiindices $\beta^1, \ldots, \beta^{n-d} \in \mathbb{N}^{n-d}$ de longueur strictement positive et des entiers $1 \leq k_1, \ldots, k_{n-d} \leq d$ tels que l'application réelle

$$\psi(y) := \left(\frac{\partial^{|\beta^1|}\varphi_{k_1}(y)}{\partial y^{\beta^1}}, \ldots, \frac{\partial^{|\beta^{n-d}|}\varphi_{k_{n-d}}(y)}{\partial y^{\beta^{n-d}}} \right)$$

est de rang $(n-d)$ à l'origine dans $\mathbb{R}^{n-d}$. On note $y' \mapsto (\psi'_1(y'), \ldots, \psi'_{n-d}(y'))$ l'application réciproque de ψ. Le résultat principal de **[13]** est le suivant :

Théorème 3^{bis}. *Soit M appartenant à $\mathcal{T}_n^d$, définie par les équations*

$$v_1 = \varphi_1(y), \ldots, v_d = \varphi_d(y),$$

minimale et finiment non dégénérée en 0*. Si M est localement algébrisable à l'origine, les dérivées partielles $\partial\psi'_j / \partial y'_l$ sont algébriques réelles pour $1 \leq j,l \leq n-d$* .

Cette condition d'algébrisabilité locale s'exprime très simplement lorsque M est une hypersurface Levi non dégénérée de $\mathbb{C}^n$, définie par l'équation $v = \varphi(y)$: il est équivalent de dire que les fonctions $\partial\psi'_j / \partial y'_l$ sont algébriques réelles pour $1 \leq j,l \leq n-1$ et que les dérivées partielles secondes $\partial^2\varphi / \partial y_j \partial y_l$ sont des fonctions algébriques des dérivées partielles premières $\partial\varphi/\partial y_1, \ldots, \partial\varphi/\partial y_{n-1}$ pour $1 \leq j,l \leq n-1$.

La raison profonde de l'existence de l'exemple de X. Huang, S. Ji et S. Yau apparaît maintenant clairement. Puisqu'en un point $p = (z_p, w_p) \in \mathbb{C}^2$ avec $z_p \neq 0$, l'hypersurface $\operatorname{Im} w = v = e^{z\bar{z}} - 1$ est biholomorphiquement équivalente à l'hypersurface tube M_a d'équation $v = \varphi^a(y) := e^{a(e^y - 1)} - 1$ avec $a = |z_p|^2$, et puisqu'on peut vérifier directement que M_a appartient à $\mathcal{T}_2^1$, en appliquant le Théorème 3^{bis}, on voit que M_a n'est pas localement algébrisable à l'origine, parce que les deux fonctions $\varphi_{yy}^a(y) = ae^y e^{a(e^y-1)} + a^2 e^{2y} e^{a(e^y-1)}$ et $\varphi_y^a(y) = ae^y e^{a(e^y-1)}$ sont algébriquement indépendantes. Il n'y a donc presque plus de calculs.

Le Théorème 3^{bis} montre qu'un élément de $\mathcal{T}_n^d$ pour lequel une dérivée $\partial\psi_j'/\partial y_l'$ n'est pas algébrique réelle (ce qui est génériquement le cas au sens de Baire) n'est pas localement algébrisable à l'origine. Le corollaire suivant exhibe une famille explicite d'exemples de sous-variétés analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$, qui ne sont pas localement algébrisables à l'origine :

Corollaire 3^{ter}. **(a)** *Soient* $\chi_1,\dots,\chi_{n-1}$ *des fonctions analytiques réelles arbitraires, définies au voisinage de* $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$. *Les hypersurfaces* $M_{\chi_1,\dots,\chi_{n-1}}$ *de* $\mathbb{C}^n$ *d'équation*

$$v = \sum_{k=1}^{n-1} [y_k^2 + y_k^6 + y_k^9 y_1 \cdots y_{k-1} + y_k^{n+8}\chi_k(y_1,\dots,y_{n-1})]$$

appartienent à la famille $\mathcal{T}_n^1$ *et sont deux à deux non biholomorphiquement équivalentes. De plus, pour un choix générique (au sens de Baire) de fonctions* $\chi_1,\dots,\chi_{n-1}$, $M_{\chi_1,\dots,\chi_{n-1}}$ *n'est pas localement algébrisable à l'origine.*

(b) *Les hypersurfaces de* $\mathbb{C}^2$ *d'équation* $v = \sin(y^2)$, $v = \sinh(y^2)$ *et d'équation* $v = \exp(\exp(y) - 1) - 1$ *appartiennent à* $\mathcal{T}_2^1$ *et ne sont pas localement algébrisables à l'origine.*

Pour vérifier l'appartenance de M à la famille $\mathcal{T}_n^1$, on utilise la théorie analytique des symétries des équations aux dérivées partielles (*cf.* Section 4 ci-dessous) appliquée à la géométrie CR.

Dans le même état d'esprit, le théorème suivant donne un éclairage différent du résultat de X. Huang, S. Ji et S. Yau :

Théorème 3^{quart}. *Soit* $M : v = \varphi(z\bar{z})$ *une hypersurface analytique réelle, Levi non dégénérée dans* $\mathbb{C}^2$, *passant par l'origine, dont l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux est engendrée par* $\partial/\partial w$ *et* $iz\partial/\partial z$. *Si* M *est localement algébrisable à l'origine, la dérivée de* φ *est algébrique. Ainsi, les hypersurfaces de* $\mathbb{C}^2$ *d'équations* $v = \mathrm{e}^{z\bar{z}} - 1$, $v = \sin(z\bar{z})$ *et* $v = \sinh(z\bar{z})$ *ne sont pas localement algébrisables à l'origine.*

Je reviendrai dans la Section 4 sur les problèmes ouverts dans cette direction. On remarquera que ces théorèmes et d'autres qui sont formulés dans **[13]** et que je passe sous silence montrent clairement que la plupart des hypersurfaces analytiques réelles ne sont pas algébrisables, et montrent aussi que la plupart des principes de réflexion dans lesquels on suppose que la sous-variété image M' est algébrique sont d'une porté limitée (*cf.* la note de bas de page numéro 6 ci-dessus).

En définitive, c'est son groupe de Lie local d'automorphismes holomorphes qui gouverne l'algébrisabilité d'une sous-variété générique. Bien que cette remarque semble aller de soi, nul ne l'avait faite auparavant. Par ailleurs, l'article à paraître **[13]** est la première référence qui démontre complètement et rigoureusement que le groupe d'automorphismes CR d'une sous-variété analytique réelle générique minimale et finiment non-dégénérée est un groupe de Lie local, dont la structure peut être déterminé algorithmiquement (j'y reviendrai dans la Section 4). Même dans le cas d'hypersurfaces Levi non-dégénérées de $\mathbb{C}^n$, il n'existe aucune référence rigoureuse où un tel théorème soit énoncé et démontré complètement, ce qui fournit un exemple supplémentaire accréditant la thèse que la géométrie CR manque cruellement de fondations solides, à la fois sur le plan conceptuel et sur le plan technique. Comparé à l'état actuel d'achèvement qu'a atteint l'analyse des équations aux dérivées partielles, par exemple la technologie des estimées L^2 pour la résolution de l'opérateur $\overline{\partial}$ dues à L. Hörmander et exploitées par de nombreux continuateurs, la géométrie CR se trouve dans un état bien embryonnaire et manque encore fort de bons livres de synthèse[7]. C'est pourquoi, je me suis décidé récemment à travailler dans un avenir proche pour ériger des fondations solides (*cf.* le §1.6 ci-dessus et *cf.* encore la Section 4 ci-dessous).

§3. Programme de recherche immédiat pour les six mois à venir

3.1. Articles actuellement en préparation véritable ou en retard pressant. Ma stratégie est la suivante : je veux me débarrasser d'abord le plus vite possible de la rédaction des articles urgents ou en retard afin de pouvoir passer au plus vite à la recherche sur les symétries d'équations aux dérivées partielles.

Références

[A] **Hervé Gaussier, Joël Merker and Alexandre Soukhov**, *Symmetries of completely integrable systems of analytic partial differential equations*, in preparation ; 40 pp. already written.

[B] **Joël Merker**, *Sur la convergence d'applications CR formelles entre sous-variétés générique analytiques réelles.* Je prévois de soumettre cet article (qui développe les résultats annoncés dans la référence **11**) aux *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, acceptant ainsi la proposition de l'un des éditeurs de la revue.

[C] **Joël Merker**, *Thématiser l'ouverture mathématique*, 15 pages prévues pour le colloque *Pensée et Science*, organisé par Éric Emery à Crêt-Bérard (canton de Vaud, Suisse) du 21 au 25 Novembre 2000.

[D] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Local removability of real 2-surfaces contained in nonpseudoconvex $C^{2,\alpha}$-smooth hypersurfaces*, In progress.

[E] **Joël Merker**, *Questionnement méthodique et ouverture conceptuelle dans la mathématique philosophique de Bernhard Riemann*, En préparation.

3.2. Janvier puis Avril, Mai, Juin 2003 : Théorie générale des symétries de Lie des systèmes complètement intégrables d'équations aux dérivées partielles analytiques. Dans un premier temps, je dois terminer de rédiger le premier jet de la première partie du travail en préparation *Symmetries of completely integrable systems of analytic partial differential equations*, en collaboration avec Hervé Gaussier et Alexandre Soukhov. Quarante pages ont déjà rédigées entre le 25 Novembre 2002 et le 2 Janvier 2003, il a fallu que j'interrompe le travail entre le 3 et le 15 Janvier 2003, et il me reste encore environ un quinzaine de pages qui seront achevées avant le 22 Janvier 2003, j'espère. Décrivons-en rapidement le contenu.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$ et soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$ et soit $u = (u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{K}^m$. Soit $\kappa \in \mathbb{N}$ avec $\kappa \geq 2$. Pour $j = 1, \dots, m$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, pour alléger l'écriture des formules, on note les dérivées partielles $\partial^{|\alpha|} u^j / \partial x^\alpha$ en indice, ce qui donne $u^j_{x^\alpha}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 1$ et on considère une collection de p multiindices notés $\beta(1), \dots, \beta(p) \in \mathbb{N}^n$ avec $|\beta(q)| \geq 1$ pour $q = 1, \dots, p$ et $\max_{1 \leq q \leq p} |\beta(q)| = \kappa - 1$, et aussi p nombres entiers $j(1), \dots, j(p)$ avec $1 \leq j(q) \leq m$ pour $q = 1, \dots, p$. Dans ce manuscrit en préparation, nous étudions les systèmes d'équations aux dérivées partielles analytiques sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et complètement intégrables de la forme

$$(\mathcal{E}) \qquad u^j_{x^\alpha}(x) = F^j_\alpha \left(x, u(x), (u^{j(q)}_{x^{\beta(q)}}(x))_{1 \leq q \leq p} \right),$$

7. Dans cette direction, on pourra noter l'existence du livre relativement récent de M.S. Baouendi, P. Ebenfelt et L.P. Rothschild [*Real submanifolds in complex space and their mappings.* Princeton Mathematical Series, **47**, Princeton University Press Princeton, NJ, 1999], mais il est clair que les trois groupes de théorèmes que j'ai énoncés dans cette Section 2 peuvent faire penser que ce livre n'est plus à jour.

où $(j,\alpha) \neq (j(1),\beta(1)),\dots,(j(p),\beta(p))$ et $j = 1,\dots,m$, $|\alpha| \leq \kappa$. Ici, les fonctions F^j_α sont $\mathbb{K}$-analytiques ou de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Le but de cet article est d'énoncer et de démontrer quelques résultats de régularité concernant le groupe de symétrie de Lie de ce système, en s'inspirant de résultats récents en géométrie CR. Dans un premier temps, nous lui associons une sous-variété des solutions $\mathcal{V}_\mathcal{S}(\mathcal{E})$, définie par des équations de la forme

$$u^j = \Omega^j(x,\nu,\chi), \qquad j = 1,\dots,m,$$

ù l'application $x \mapsto \big(\Omega^j(x,\nu,\chi)\big)_{1\leq j\leq m}$ est la solution générale du système $(\mathcal{E})$ et où les paramètres $(\nu,\chi) \equiv (u(0),(u^{j(q)}_{x^{\beta(q)}}(0))_{1\leq q\leq p})$ sont les "conditions initiales". La construction de cette sous-variété des solutions se fait en redressant le feuilletage qui intègre la distribution de contact sur le squelette associé à $(\mathcal{E})$ dans l'espace des jets, via une application redressante $\mathcal{A}$, comme le symbolise la figure suivante (les lignes pointillées dans le tube représentent des sous-variétés intégrales du système de Pfaff associée à $\mathcal{E}$ et leur image par $\mathcal{A}$ est représentée par les lignes horizontales $\mathcal{F}_h$ de la figure de droite) :

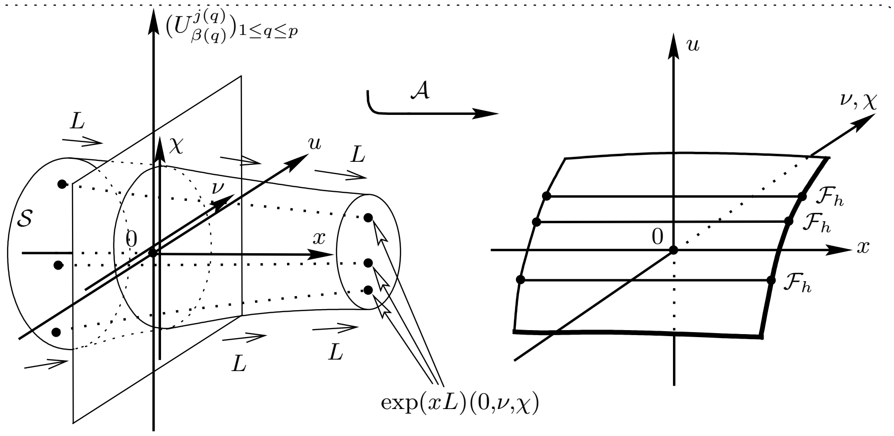


FIGURE 4: NAISSANCE GÉOMÉTRIQUE DE LA VARIÉTÉ DES SOLUTIONS

Ce qui est remarquable ici est que la sous-variété des solutions $\mathcal{V}_\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est elle aussi équippée d'une paire de feuilletages invariants comme l'est la complexifiée d'une sous-variété générique analytique réelle. En effet, si on pose $t := (x,u)$ et $\tau := (\nu,\chi)$, on peut définir le *feuilletage par les paramètres* $\mathcal{F}_p$ dont les feuilles sont les intersections de $\mathcal{V}_\mathcal{S}(\mathcal{E})$ avec les ensembles $\{\tau = ct.\}$ et le *feuilletag par les variables* $\mathcal{F}_v$ dont les feuilles sont les intersections de $\mathcal{V}_\mathcal{S}(\mathcal{E})$ avec les ensembles $\{t = ct.\}$. *Alors toute symétrie de Lie $t' = h(t)$ de $(\mathcal{E})$ se tranfère en une symétrie $(t',\tau') = (h(t),\phi(\tau))$ de $\mathcal{V}_\mathcal{S}(\mathcal{E})$ stabilisant la paire de feuilletages $(\mathcal{F}_p,\mathcal{F}_v)$.* Cette propriété nous permet d'obtenir, entre autres le théorème suivant, qui généralise considérablement le principe de réflexion de Lewy-Pinchuk et a des conséquences nouvelles pour la théorie géométrique locale des équations aux dérivées partielles (puisque je ne donne pas tous les détails permettant de comprendre et d'apprécier la pertinence des hypothèses techniques, le théorème peut être lu sans s'attarder) :

Théorème 4. *Soient $(\mathcal{E})$ et $(\overline{\mathcal{E}})$ deux systèmes complètement intégrables d'équations aux dérivées partielles $\mathbb{K}$-analytiques locales, avec le même choix $(j(q),\beta(q))$ pour $q = 1,\dots,p$. Soit h une équivalence purement formelle ou de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre $(\mathcal{E})$*

et $(\overline{\mathcal{E}})$. On suppose que la paire fondamentale de feuilletages $(\mathcal{F}_p,\mathcal{F}_v)$ recouvre un voisinage de l'origine sur la sous-variété des solutions associée $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ et on note $(\mu_0,\mu_0^*) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ le type de la paire de feuilletage. On suppose que la sous-variété des solutions $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(\overline{\mathcal{E}})$ est $\overline{\ell}_0$-résoluble par rapport aux paramètres et qu'elle est $\overline{\ell}_0^*$-résoluble par rapport aux variables. Soit $\kappa_0 : \mu_0^*(\overline{\ell}_0+\overline{\ell}_0^*)$ et soit $\kappa_0^* := \mu_0(\overline{\ell}_0+\overline{\ell}_0^*)$. Alors il existe deux applications $\mathbb{K}$-analytiques locales H_{κ_0} et $\Phi_{\kappa_0^*}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^{n+m}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^{m+p}$, qui peuvent être construites algorithmiquement au moyen seulement des équations définissantes de $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ et de $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(\overline{\mathcal{E}})$ telles que les identités suivantes sont satisfaites

$$(*) \qquad \begin{cases} h(t) \equiv H_{\kappa_0}(t,J_t^{\kappa_0}h(0)), \\ \phi(\tau) \equiv \Phi_{\kappa_0^*}(\tau,J_\tau^{\kappa_0^*}\phi(0)), \end{cases}$$

dans $\mathbb{K}[\![t]\!]^{n+m}$ et dans $\mathbb{K}[\![\tau]\!]^{m+p}$, si h est formelle, ou pour t et τ dans un voisinage de l'origine, si h est de classe $\mathcal{C}^\infty$; ici $J_t^{\kappa_0}h(0)$ désigne le jet d'ordre κ_0 de h à l'origine et de même pour $J_\tau^{\kappa_0^*}\phi(0)$. En particulier, comme corollaire, on a les deux énoncés suivants de régularité automatique :

(1) *Puisque les deux applications H_{κ_0} et $\Phi_{\kappa_0^*}$ sont $\mathbb{K}$-analytiques, il découle immédiatement de $(*)$ que les deux applications formelles ou $\mathcal{C}^\infty$ que sont $h(t)$ et $\phi(\tau)$ sont en fait $\mathbb{K}$-analytiques.*

(2) *Si, de plus, les deux sous-variétés des solutions $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(\overline{\mathcal{E}})$ sont $\mathbb{K}$-algébriques au sens de Nash, alors les deux applications H_{κ_0} et $\Phi_{\kappa_0^*}$ sont aussi $\mathbb{K}$-algébriques et il découle immédiatement de $(*)$ que les deux applications formelles ou $\mathcal{C}^\infty$ que sont $h(t)$ et $\phi(\tau)$ sont en fait $\mathbb{K}$-algébriques.*

De nombreux autres résultats sont déjà rédigés ou attendent encore de l'être. Une partie importante de ce travail sera consacrée à l'élaboration de programmes informatiques sous Maple qui pourront calculer explicitement des générateurs de l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales du système $(\mathcal{E})$. Je tiens énormément à cet aspect-là, car le calcul formel par ordinateur devient indispensable lorsque l'on a affaire à des hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$, avec $n \geq 3$, tant les calculs explosent. Au programme des réjouissances, qui dureront forcément jusqu'au mois de Juin, il y aura :

(1) Délimitation d'un cadre qui permet de travailler avec un nombre arbitraire de variables indépendantes et dépendantes.

(2) Écriture d'un programme qui applique l'algorithme de Lie à la détermination de l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales de $(\mathcal{E})$. Il faut que ce programme soit pertinent pour des systèmes *non polynomiaux*, c'est-à-dire vraiment analytiques, or la plupart des algorithmes (bases de Gröbner en algèbre différentielle, algorithme de Buchberger, *etc.*) sont surtout construits pour s'appliquer à des systèmes polynomiaux. *Il faudra donc réfléchir sur la manière de tronquer les systèmes d'EDP et sur la pertinence de telles troncatures, qui n'a rien d'évident, puisqu'il est parfaitement clair qu'il doit exister des systèmes incoporant des symétries qui disparaissent dans toute troncature.*

(3) Écriture d'un programme qui permet de calculer le développement de Taylor de la sous-variété des solutions $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$.

(4) Écriture d'un programme qui permet de calculer les symétries de $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ en utilisant le nouvel algorithme développé dans l'article en préparation. *Et surtout, de manière importante, comparaison de la rapidité de cet algorithme avec l'algorithme de Lie.*

(5) Écriture d'un programme qui permet le développement en série de Taylor des deux applications H_{κ_0} et $\Phi_{\kappa_0^*}$.

Il faut dire que cette intention informatique n'a rien de gratuit. L'école russe qui s'est développée autour de A.G. Vitushkin (N.G. Kruzhillin, V.K. Beloshapka, V.V. Ezhov, A.V. Isaev, G. Schmalz, A. Čap, A.V. Loboda, N. Ershova et d'autres) a beaucoup exploré les calculs qui permettent de déterminer les automorphismes CR infinitésimaux d'une hypersurface analytique réelle Levi non-dégénérée de $\mathbb{C}^n$. Il est bien connu que les calculs explosent, et découragent. L'idée de B. Segre, reprise et développée par Alexandre Sukhov, qui consiste à remplacer une hypersurface analytique réelle par un système d'équations aux dérivées partielles, et à appliquer la théorie de Lie à ce système, possède alors une pertinence véritable, parce que des physiciens et des mathématiciens ont déjà implémenté divers algorithmes sur ordinateur permettant de déterminer de manière plus ou moins automatique les symétries de Lie d'un système. *Or ce que nous faisons dans le travail en préparation décrit ci-dessus n'est ni plus ni moins que de thématiser l'équivalence entre deux points de vue, le point de vue original de Lie, qui consiste à travailler dans les espaces de jets, et le point de vue qui consiste à travailler dans la sous-variété des solutions, et grâce à cette équivalence, nous pouvons créer un dictionnaire de résultats et comparer l'effectivité algorithmique de chacun des deux points de vue.*

Par exemple, en collaboration avec Hervé Gaussier, dans l'article à paraître **[8]**, nous avons fait des calculs à la main pour calculer une base d'automorphismes CR infinitésimaux de l'hypersurface de $\mathbb{C}^3$ définie par

$$M_0 = \{w + \bar{w} = \frac{2z_1\bar{z}_1 + z_1^2\bar{z}_2 + \bar{z}_1{}^2 z_2}{1 - z_2\bar{z}_2} : \; |z_2| < 1\},$$

dont la forme de Levi est de rang un en tout point, mais qui est 2-finiment nondégénérée (on sort alors du cadre de l'article de S.S. Chern et J.K. Moser). P. Ebenfelt (Duke Math. J. **110** (2001), no.1, 37–80) a tenté, mais sans succès, comme il me l'a dit oralement, de caractériser le tube au-dessus du cône de lumière bidimensionnel de $\mathbb{R}^3$ (qui, concrètement, est l'hypersurface de $\mathbb{C}^3$ d'équation $(\operatorname{Re} z_1)^2 + (\operatorname{Re} z_2)^2 - (\operatorname{Re} z_3)^2 = 0$) comme unique modèle ayant un groupe d'automorphismes CR de dimension maximale, égale à 7 en l'occurence. La forme de Levi de cette hypersurface est aussi de rang un en tout point, et elle est aussi 2-nondégénérée en tout point. Croyant nous aussi que cette hypersurface devrait être un modèle unique, nous avons cherché des arguments sans les trouver, puis nous avons construit un peu par hasard l'exemple M_0 et ensuite nous nous sommes attaqués à déterminer ses automorphismes CR infinitésimaux. Voici une comparaison flagrante : en utilisant la méthode classique, il a fallu résoudre 65 équations aux dérivées partielles linéaires avec 17 inconnues ; en transformant l'hypersurface M_0 en un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre trois, et en appliquant la méthode de Lie, nous avons résolu 9 équations aux dérivées partielles à 3 inconnues. Le générateur qui nous avait échappé lors de la première méthode (ou nous trouvions une algèbre de Lie de dimension seulement égale à 6) a été récupéré grâce à la deuxième méthode. Au total, de tels calculs sont de toute façon très lourds à la main, même avec la deuxième méthode. Aussi l'intérêt d'exploiter l'informatique devient-il évident. *Mais il s'agit là d'un véritable travail de recherche, puisque les paquetages informatiques existants sont surtout orientés vers les équations différentielles ordinaires, ou bien ils se limitent aux systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre deux.*

Dans cette direction, nous comptons renforcer les liens avec l'équipe de Michel Petitot au Laboratoire d'Informatique Fondamentale de l'Université de Lille 1, puisque ses membres se sont déjà intéressés à l'application de l'informatique aux méthodes de S. Lie et d'Élie Cartan *à plusieurs variables.*

3.3. Février 2003 : Article pour le colloque "Pensée et Science" organisé en Novembre 2000 par Éric Emery à Crêt-Bérard (canton de Vaud, Suisse). Il s'agira d'un article de 15 pages, intitulé *Thématiser l'ouverture mathématique*, dans lequel je compte rédiger et développer les notes de ma communication orale. J'insisterai sur le paradoxe de la disparition apparente, mais non réelle de la pensée spéculative dans la science technique contemporaine, sur les architectures de questions et sur l'unité de la mathématique qui leur est corrélative, unité que la pensée fragmentaire tend bien malheureusement à perdre de vue, et sur les moyens qui sont à notre disposition pour ressaisir les actes de pensée qui conduisent aux idées dominatrices. Je ferai état, à partir de mon expérience personnelle, de l'avantage que procure une formation philosophique dans la recherche mathématique professionnelle. Le problème du statut de l'intuition mathématique dans une théorie de la connaissance ouverte m'amènera à soutenir que l'intuition recouvre des constructions mentales polymorphes et des "surlangages" orientés vers la résolution de questions mathématiques précises. Temps de travail : 15 jours de relectures et de méditations préalables, et entre 10 et 14 jours d'écriture avant d'envoyer le texte au responsable du colloque. Si tout le monde tient tant à ce que j'écrive des textes de philosophie des mathématiques, j'accepte, mais à condition que cela me prenne le moins de temps possible sur mon temps de recherche.

3.4. Février 2003 : Convergence d'applications CR formelles entre sous-variétés générique analytiques réelles. Il s'agira de rédiger une version civilisé et publiable de la prépublication de 13 pages qui accompagnait la Note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **[4]**, c'est-à-dire de rédiger avec plus d'explications la démonstration du Théorème 2 ci-dessus. Le seul travail de réécriture devrait coûter 7 jours, sans distraction. Si le temps le permet, je tenterai de réfléchir auparavant sur des raffinements possibles, qui vont au-delà des raffinements apportés par mes concurrents après circulation sur Internet de mon preprint (`ArXiv.org/abs/math.CV/0005290`). Il est possible que je décide d'y intégrer l'essentiel des résultats de la prépublication *Vector fields construction of Segre sets*, qui elle non plus n'a pas encore été publiée, et qui me tient à cœur, puisque c'est dans ce travail qu'est formulée l'existence de paires de feuilletages sur la complexifiée d'une sous-variété générique analytique réelle. Dans ce cas, il y aura environ 10 à 14 jours de rédaction, sans distraction.

3.5. Mars 2003 : Élimination des surfaces qui sont totalement réelles en dehors d'un nombre fini de points hyperboliques. Ce projet en collaboration avec Egmont Porten est en attente depuis maintenant deux ans, à cause de cette négligence bien universelle que chacun d'entre nous justifie hypocritement par un soi-disant "manque de temps". Comme les résultats et les preuves sont presque abouties, je vais me permettre de décrire maintenant les résultats de ce projet d'article **[D]** très en détail.

Mais tout d'abord, décrivons rapidement un résultat publié récemment. Dans l'article **[7]**, écrit en collaboration avec Egmont Porten, nous avons démontré le résultat suivant, où l'on note $H^d(\cdot)$ la mesure de Hausdorff d-dimensionnelle :

Théorème 5. *Soit M une sous-variété générique de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ de $\mathbb{C}^{m+n}$ de codimension $n \geq 1$ et de dimension CR égale à $m \geq 1$ qui est globalement minimale, c'est-à-dire consiste en une seule orbite CR. Soit E un sous-ensemble fermé de M tel que la sous-variété générique $M \backslash E$ est aussi globalement minimale* *et tel que* $H^{2m+n-2}(E) = 0$*. Alors l'ensemble* E *est* $\mathcal{W}$*-éliminable et* $L^{\rm p}$*-éliminable pour tout* $\rm p \geq 1$*, ce qui signifie précisément que*

(1) *Pour tout wedge* $\mathcal{W}_1$ *attaché à* $M \backslash E$*, il existe un wedge* $\mathcal{W}_2$ *attaché à* M *tel que pour toute fonction holomorphe* $f \in \mathcal{O}(\mathcal{W}_1)$*, il existe une fonction holomorphe* $F \in \mathcal{O}(\mathcal{W}_2)$ *qui coïncide avec* f *dans un sous-wedge* $\mathcal{W}_3 \subset \mathcal{W}_1$ *attaché à* $M \backslash E$ *; et que*

(2) *Toute fonction* $f \in L^{\rm p}(M)$ *telle que* f *est CR au sens des distributions sur* $M \backslash E$ *est en fait CR sur la sous-variété générique* M *tout entière.*

Des résultats dans cette direction ont été obtenus auparavant par T.-C. Dinh et F. Sarkis (Math. Z. **238** (2001), no. 3, 639–653) avec une hypothèse de Levi-nondégénérescence de M, puis par E. Porten et moi-même lorsque M est analytique réelle, puis la partie **(2)** seulement lorsque M est lisse (Internat. J. Math. **11** (2000), no. 7, 857–872), mais *sans obtenir la partie* **(1)**. Pour démontrer ce théorème (qui nous aura donc résisté un certain temps), en utilisant la théorie de Globevnik pour augmenter l'espace des déformations possibles de disques de Bishop, nous avons introduit des hélices qui augmentent les indices partiels et permettent de décrire un cône à partir de disques attachés et passant par un point q dans un wedge partiellement rempli avec des disques de A. Tumanov, comme l'illustre intuitivement la figure suivante :

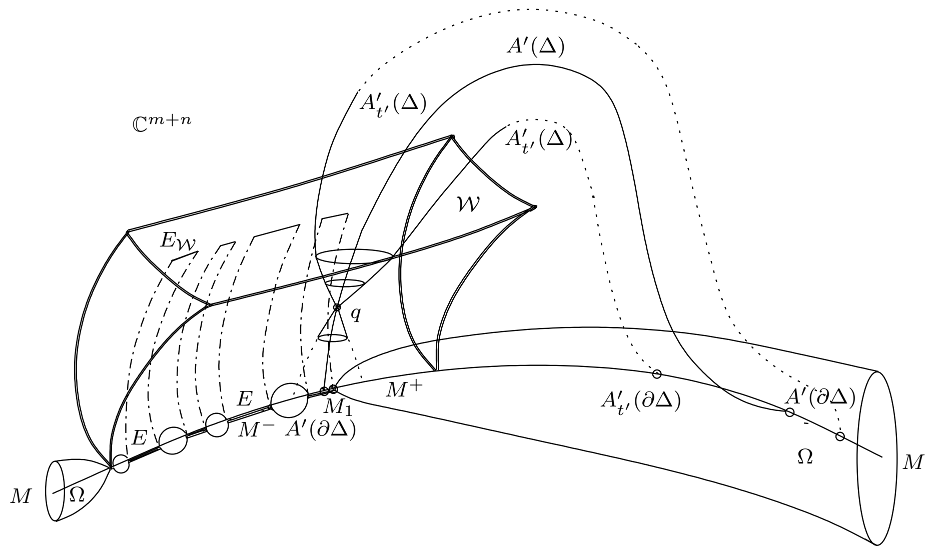


FIGURE 4: DÉFORMATIONS DU DISQUE A' EN BALAYANT UN CÔNE DE SOMMET q

Il est à noter que les hypothèses de type minimalité locale ou globale, telles qu'elles ont été étudiées dans les travaux de J.-M. Trépreau et A. Tumanov, sont non seulement plus modernes que les hypothèses de Levi non-dégénérescence, mais sont surtout plus adéquates et plus profondes, notamment en vertu du fait que la minimalité locale est une condition nécessaire et suffisante pour le prolongement des fonctions CR à un wedge. C'est pourquoi nous avons insisté dans cette direction de recherche. De plus, il faut noter que les disques de défaut nul au sens de A. Tumanov ne sont pas assez riches pour obtenir des déformations coniques comme dans la FIGURE 4.

Grâce aux travaux précédents de F. Sarkis, (Université de Lille 1) qui a établi le fait que l'ensemble d'indétermination d'une fonction CR-méromorphe est en général un tel ensemble E de mesure de Hausdorff $(2m+n-2)$-dimensionnelle nulle, nous avons pu déduire du Théorème 5 le théorème suivant, qui en constituait la motivation principale :

Théorème 5^{bis}. *Soit M une sous-variété générique de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ de $\mathbb{C}^{m+n}$ de codimension $n \geq 1$ et de dimension CR égale à $m \geq 1$ qui est localement minimale en tout point. Alors il existe un wedge $\mathcal{W}$ attaché à M tel que toutes les fonctions CR-méromorphes sur M se prolongent méromorphiquement à M.*

L'hypothèse que M soit localement minimale en tout point est bien sûr moins générale que l'hypothèse, faite dans le Théorème 5, que M soit globalement minimale, mais comme il existe des exemples pour lesquels M est globalement minimale mais $M \backslash E$ ne l'est pas et pour lesquels le Théorèmes 5 est mis en défaut, il est nécessaire de faire une hypothèse sur M qui assure que pour tout sous-ensemble E de M satisfaisant $H^{2m+n-2}(E)=0$, la sous-variété générique complémentaire $M \backslash E$ est globalement minimale. Or l'hypothèse que M est localement minimale en tout point convient et semble d'une généralité assez grande.

Venons-en maintenant à la description des résultats de l'article en préparation **[D]**, *Local removability of real 2-surfaces contained in nonpseudoconvex $\mathcal{C}^{2,\alpha}$-smooth hypersurfaces.* En 1988, B. Jöricke a démontré un théorème qui a motivé toutes ses recherches ultérieures dans les années 1990 à 2002, d'après lequel un compact K contenu dans un disque totalement réel $S \subset \partial\mathbb{B}^2$ plongé dans le bord de la boule unité $\mathbb{B}^2$ de $\mathbb{C}^2$ est *éliminable*, c'est-à-dire que les fonctions CR sur $\partial\mathbb{B}^2 \backslash K$ se prolongent holomorphiquement à l'intérieur de la boule. Peu de temps après, cet énoncé a été redémontré par F. Forstnerič et E.L. Stout grâce au remplissage de sphères dû à E. Bedford et N. Klingenberg. En 1992, J. Duval démontrait que tout compact K contenu dans une surface S (pas forcément difféomorphe au disque unité) contenue dans un bord strictement pseudoconvexe qui est totalement réelle en dehors d'un nombre fini de points complexes tangents qui sont hyperboliques au sens de Bishop, est polynomialement convexe, et par là-même éliminable, en appliquant un théorème de E.L. Stout. Récemment, E. Porten dans un travail intitulé *Totally real discs in non-pseudoconvex boundaries* (Ark. Mat., to appear) a obtenu une généralisation du théorème de B. Jöricke dans laquelle il élimine l'hypothèse de pseudoconvexité.

Tous ces articles ont un point en commun : ils utilisent des méthodes globales (remplissage de sphères par des sous-variétés Levi-plates, caractérisation d'Oka pour la polynomiale convexité, isotopies topologiques). D'ailleurs, dans un article en collaboration (Duke Math. J. **102** (2000), no.1, 87–100), B. Jöricke et N. Shcherbina se sont interrogés sur l'influence de la topologie sur l'éliminabilité. En extrapolant facilement, la généralisation à $\mathbb{C}^n$ pour $n \geq 3$ du théorème original de B. Jöricke devrait énoncer que tout compact K contenu dans une sous-variété générique M_1 plongée dans le bord $\partial\mathbb{B}^n$ de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ *qui est difféomorphe à une boule réelle de dimension* $(2n-2)$, devrait, comme pour le cas $n=2$, être éliminable. Des résultats démontrés auparavant par B. Jöricke (J. Geom. Anal. **9** (1999), no.3, 429–456) au moment où j'ai écrit ma thèse montraient que ce sont les orbites CR de M_1 que l'on ne parvient pas à éliminer en appliquant la méthode des disques analytiques, et il est facile de voir que localement, ces orbites CR peuvent fort bien constituer de vrais obstacles à l'éliminabilité, parce qu'elles peuvent coïncider avec l'intersection de M avec une hypersurface complexe transverse. Par ailleurs, sur le bord de la boule unité et d'un point de vue global, il est bien connu d'après les travaux de J. Milnor que les sous-variétés CR de dimension $(2n-3)$ qui sont les intersections de la sphère unité avec une hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^n$ passant par le centre de la boule unité n'ont jamais une topologie triviale. Alors une question bien subtile s'offrait d'elle-même : aurait-il été possible que la topologie triviale de M_1 (qui doit par hypothèse être difféomorphe à une boule $(2n-2)$-dimensionnelle) lui interdise de contenir des nœuds de Milnor de dimension $(2n-3)$ (qui seraient des orbites CR de M_1) ? L'article de B. Jöricke et N. Scherbina est consacré à démontrer que contrairement aux espoirs de B. Jöricke, il est effectivement possible qu'une sous-variété 4-dimensionnelle générique et difféomorphe à une 4-boule réelle, contenue dans la sphère unité de $\mathbb{C}^3$, contienne l'intersection $X_\varepsilon \cap \partial\mathbb{B}^3$ de l'hypersurface algébrique $X_\varepsilon := \{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 z_2 z_3 = \varepsilon\}$ avec $\partial\mathbb{B}^3$, où $0 < \varepsilon < 1/3$, (cette intersection $X_\varepsilon \cap \partial\mathbb{B}^3$ est difféomorphe à $(S^1)^3$). *Ainsi, à cause de ce résultat, on pourrait croire que contrairement au cas $n = 2$, dans le cas $n = 3$, la topologie de la sous-variété générique $M_1 \subset \partial\mathbb{B}^n$ n'influe pas positivement sur l'éliminabilité de ses sous-ensembles compacts.* En effet, dans le cas $n = 2$, il pourrait sembler que c'est *parce que la surface $S \subset \partial\mathbb{B}^2$ est difféomorphe à un disque 2-dimensionnel que ses compacts sont éliminables.*

Or je prétends que cette interprétation n'est pas la meilleure. La vérité me semble plutôt être la suivante : en dimension $n = 2$, le disque S est feuilleté par les courbes intégrales de la distribution caractéristique $S \ni p \mapsto T_pS \cap T_p^c\partial\mathbb{B}^2$. D'après le Lemme de Hopf, une variété complexe à bord (par exemple un disque analytique, qui est le candidat naturel pour la non-éliminabilité) dont le bord serait contenu dans S devrait avoir un bord *partout transverse au feuilletage caractéristique*, et alors le feuilletage caractéristique devrait contenir une transversale fermée. Or c'est à cause de sa topolgie **et** de sa dimension deux que le disque S *ne peut pas contenir une courbe qui est transversale au feuilletage caractéristique* (d'après un sous-cas de la théorie de Poincaré-Bendixson, mais on peut le voir facilement avec des arguments simples), ce n'est pas seulement à cause de sa topologie ! Ainsi, il serait erroné de croire que pour $n \geq 3$, la topologie d'une boule réelle M_1 de dimension $(2n-2)$ devrait interdire l'existence d'orbites CR compactes de dimension $(2n-3)$, parce qu'on est en dimension ≥ 4, ce qui offre plus de libertés topologiques. C'est d'ailleurs ce que démontre l'exemple de B. Jöricke et N. Shcherbina.

En tout cas, provisoirement, après ces spéculations, on pourrait retenir qu'il y a une différence de taille entre le cas $n = 2$ et le cas $n \geq 3$, du point de vue de la structure CR : alors que les surfaces $S \subset \partial\mathbb{B}^2$ sont totalement réelles, donc vides du point de vue CR, les sous-variétés génériques $M_1 \subset \partial\mathbb{B}^n$ pour $n \geq 3$ sont de dimension CR au moins égale à un (ce fait est utilisé fortement par B. Jöricke dans son article de 1999, puisqu'elle attache des disques de Bishop à M_1 pour en éliminer ses compacts qui ne contiennent pas d'orbite CR de M_1). On pourrait retenir aussi que la division entre le cas $n = 2$ et le cas $n \geq 3$ est essentielle, non seulement à cause des considérations du paragraphe précédent, mais aussi parce qu'il y a une différence profonde entre les techniques *globales* utilisées par B. Jöricke, F. Forstnerič, E.L. Stout, J. Duval et E. Porten pour établir des résultats d'éliminabilité dans le cas $n = 2$, et les techniques purement locales utilisées par B. Jöricke dans son article de 1999, pour établir des résultats d'éliminabilité dans le cas $n \geq 3$. B. Jöricke avec qui j'ai discuté en Novembre 2000 à Berlin m'a dit être persuadée que les résultats d'élimination de surfaces totalement réelles dans le cas $n = 2$ ne pouvaient être traités qu'avec des méthodes globales.

Mais alors je soutiens au contraire que l'absence d'uniformité entre le cas $n = 2$ et le cas $n \geq 3$ est moins grande que ce que l'on a tendance à croire. En effet, dans l'article en préparation **[D]**, nous sommes parvenus à localiser les démonstrations d'éliminabilité dans le cas $n = 2$. De plus, notre technique permet de traiter le cas d'une singularité M_1 de codimension un dans une sous-variété CR générique de dimension CR égale à un dans $\mathbb{C}^n$ pour $n \geq 3$, ce qui est nouveau, et ne pouvait pas du tout être démontré ni avec les idées géométriques de l'article de 1999 de B. Jöricke, ni avec les techniques de l'article de ma thèse (International Mathematics Research Notices, 1997, no. 1, 21–58). Nos résultats relancent donc les interprétations dans une direction opposée, puisqu'il est possible de relire les théorèmes d'élimination dans les cas $n = 2$ et $n \geq 3$, grâce à un dictionnaire analogique rigoureux, qui montre l'homogénéité des deux types de résultats. Tout d'abord, nous généralisons les résultats de B. Jöricke (Ark. Mat. 1988) et E. Porten (Ark. Mat., to appear), en traitant l'existence de points hyperboliques isolés, problème ouvert dans le sujet :

Théorème 6. *Soit M une hypersurface globalement minimale de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ dans $\mathbb{C}^2$ et soit S une surface difféomorphe au disque unité de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ plongée dans M qui est totalement réelle en dehors d'un nombre fini de points complexes tangents qui sont hyperboliques au sens de Bishop. Alors tout compact K contenu dans S est éliminable, c'est-à-dire que les fonctions CR sur $M \backslash K$ se prolongent à un voisinage unilatéral de M dans $\mathbb{C}^n$ (y compris au-dessus des points de K).*

Dans le cas où M n'est pas strictement pseudoconvexe, il est à noter que les démonstrations qui suivent une stratégie globale via un remplissage de sphères ne peuvent pas aboutir en l'état actuel des choses, parce que personne ne sait remplir des sphères qui ne sont pas contenues dans un bord strictement pseudoconvexe, même après perturbation générique.

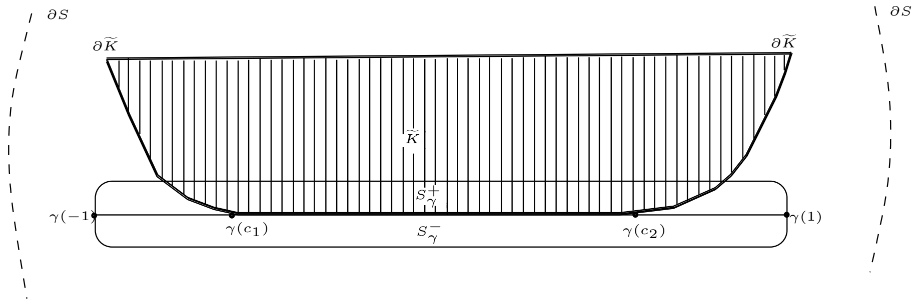
Pour démontrer ce théorème, on découpe la surface en morceaux totalement réels délimités par les séparatrices qui forme un arbre sans cycle joignant tous les points hyperboliques. Pour éliminer chacun de ces morceaux, nous avons formulé un énoncé semi-local, qui s'applique pour des surfaces à topologie arbitraire, et qui fait seulement intervenir la topologie du feuilletage caractéristique. Pour terminer la démonstration du Théorème 6, il reste à éliminer les séparatrices, mais ce dernier pas provient de résultats déjà connus. L'énoncé semi-local dit que K est éliminable si on peut disposer n'importe quel sous-compact $\widetilde{K} \subset K$ d'un seul côté (semi-localement) d'une courbe caractéristique :

Théorème 6^{bis}. *Soit M une hypersurface globalement minimale de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ de $\mathbb{C}^2$ et soit $S \subset M$ une surface* arbitraire *plongée dans M et de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ qui est totalement réelle. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage caractéristique de S, dont les feuilles sont les courbes intégrales de la distribution définie par le fibré en droites $TS \cap T^cM|_S$. Soit K un sous-ensemble compact de S. On suppose que la condition topologique suivante est satisfaite :*

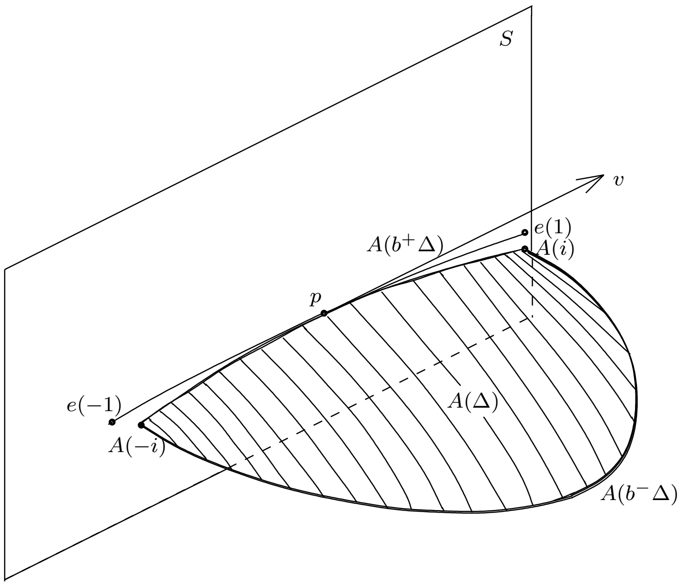
(∗) *Pour tout sous-ensemble compact $\widetilde{K} \subset K$, il existe une courbe $\gamma : [-1,1] \to M_1$ dont l'image $\gamma([-1,1])$ est contenue dans une seule ligne caractéristique de $\mathcal{F}$ avec $\gamma(-1) \notin \widetilde{K}$, $\gamma(0) \in \widetilde{K}$ et $\gamma(1) \notin \widetilde{K}$, et il existe un voisinage ouvert V_1 de $\gamma([-1,1])$ dans S tel que $\widetilde{K} \cap V_1$ se situe d'un seul côté de $\gamma([-1,1])$, relativement à la topologie de la surface $M_1 \cap V_1$.*

Alors il existe un voisinage unilatéral de M dans $\mathbb{C}^n$ auquel se prolongent holomorphiquement toutes les fonctions CR sur $M \backslash K$.

Cette condition topologique est automatiquement satisfaite lorsque S est difféomorphe à un disque, mais aussi pour de nombreuses autres surfaces, et elle peut être illustrée de la manière suivante :



Pour démontrer cet énoncé, en raisonnant par l'absurde, on se ramène à démontrer qu'un seul point de K est éliminable, et on localise les constructions autour d'un tel point, convenablement choisi. La démonstration utilise comme ingrédient essentiel des disques holomorphes dont la moitié du bord est attaché à la surface S :



Il est à noter que notre démonstration locale a l'avantage de se transférer facilement en codimension supérieure. Ainsi, en ajoutant des paramètres naturels dans les familles de disques à moitié attachés, et en choisissant essentiellement de la même manière un point spécial à éliminer, nous pouvons démontrer un énoncé qui généralise le théorème 6^{bis} à l'élimination de certaines singularités totalement réelles dans les sous-variétés CR de dimension CR égale à un :

Théorème 6^{ter}. *Soit M une sous-variété générique globalement minimale de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ de codimension $(n-1)$ dans $\mathbb{C}^n$, où $n \geq 2$, donc de dimension CR égale à un. Soit M_1 une sous-variété maximalement réelle de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ et de codimension 1 dans M, qui est donc générique dans $\mathbb{C}^n$. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage caractéristique de M_1, dont les feuilles sont les courbes intégrales de la distribution définie par le fibré en droite $TM_1 \cap T^cM|_{M_1}$. Soit K un sous-ensemble compact de M_1. On suppose que la condition topologique suivante est satisfaite :*

($*$) *Pour tout sous-ensemble compact $\widetilde{K} \subset K$, il existe une courbe $\gamma : [-1,1] \to M_1$ dont l'image $\gamma([-1,1])$ est contenue dans une seule ligne caractéristique de $\mathcal{F}$*

avec $\gamma(-1) \notin \widetilde{K}$, $\gamma(0) \in \widetilde{K}$ *et* $\gamma(1) \notin \widetilde{K}$, *il existe une sous-variété* $H \subset M_1$ *de dimension* $(n-1)$ *transversale à la courbe* γ *et passant par le point* $\gamma(0)$ *et il existe un voisinage ouvert* V_1 *de* $\gamma([-1{,}1])$ *dans* M_1 *tel que si* $\pi_{\mathcal{F}} : V_1 \to H$ *désigne la projection semi-locale parallèle aux courbes caractéristiques de* $\mathcal{F}$, *alors* $\gamma(0)$ *se situe dans le bord, relativement à la topologie de* H, *de l'ensemble* $\pi_{\mathcal{F}}(\widetilde{K} \cap V_1)$.

Cette condition est bien sûr indépendante du choix de la transversale H *et du choix du voisinage* V_1 *; de plus, dans le cas* $n = 2$, *cette condition signifie précisément que* $\widetilde{K} \cap V_1$ *se situe d'un seul côté de la courbe* $\gamma([-1{,}1])$, *relativement à la topologie de la surface* $M_1 \cap V_1$.

Alors il existe un wedge attaché à M *auquel toutes les fonctions CR continues sur* $M \backslash K$ *se prolongent holomorphiquement.*

Je passerai sous silence la formulation d'un théorème qui généralise le Théorème 6 en se basant sur le Théorème 6^{ter}. Ces résultats répondent à des problèmes ouverts qui me semblaient inaccessibles il y a deux ans. À vrai dire, nous avons trouvé la démonstration sans trop y réfléchir, pour la raison que l'utilisation de disques à moitié attachés à S (ou M_1), dont nous avons discuté avec E. Porten à Berlin en Novembre 2000, permettait immédiatement de localiser et de surmonter la difficulté principale (modulo une quantité d'arguments que je passe sous silence).

Enfin, je voudrais conclure le paragraphe spéculatif qui a précédé les énoncés de ces résultats. En vérité, les différences qualitatives entre la sphère $\partial\mathbb{B}^2$ et la sphère $\partial\mathbb{B}^n$ pour $n \geq 3$ sont surtout causées par le fait que la dimension CR de $\partial\mathbb{B}^2$ est égale à 1 tandis que la dimension CR de $\partial\mathbb{B}^n$ pour $n \geq 3$ est supérieure ou égale à 2. Ainsi, dans la discussion qui suit, comparons les deux cas où la sous-variété générique M est de dimension CR donnée par $m = 1$ ou de dimension CR donnée par $m \geq 2$, avec des compacts K contenus dans une sous-variété $M_1 \subset M$ de codimension 1 qui est totalement réelle ou de dimension CR égale à $m - 1 \geq 1$.

N'est-il pas vrai, comme le montre le Théorème de Hartogs d'élimination des singularités compactes, que les cas d'une et de plusieurs variables complexes sont qualitativement et théoriquement différents ? *Or l'art de signaler les différence entre deux niveaux théoriques ne doit pas se limiter à des considérations approximatives et superficielles et il relève au contraire d'une véritable recherche dans l'adéquation conceptuelle.* Alors, au vu des théorèmes précédents, voici maintenant quelques arguments qui accréditent la thèse d'une plus grande homogénéité entre les cas où la dimension CR est égale à un et où elle est égale à $m \geq 1$, et qui pointent plus rigoureusement la différence rémanente.

Tout d'abord, ce n'est pas la topologie de M_1 qui possède de l'influence sur l'éliminabilité de ses compacts, mais *c'est la disposition, par rapport au compact* K *à éliminer, des courbes caractéristiques qui sont tracées sur* M_1 *dans le cas* $m = 1$ *ou des orbites CR de* M_1 *qui sont de dimension* $(2m + n - 2)$ *dans le cas* $m \geq 2$. De plus, les deux types de résultats peuvent être établis localement, en développant des enveloppes d'holomorphie locales grâce au Kontinuitätssatz, et c'est pourquoi la topologie globale de M_1 n'influe pas véritablement. Dans les deux cas, si la disposition énoncée par les théorèmes d'éliminabilité est mise en défaut, alors il existe des exemples de compacts qui ne sont vraiment pas éliminables. Bien entendu, la question de savoir si tout compact qui infirme la disposition qui le rendrait éliminable est bel et bien non-éliminable, cette question est laissée ouverte et semble hors d'atteinte avec les techniques actuelles, notamment dans les cas où les feuilletages caractéristiques ou les orbites CR spiralent. Bien entendu, on peut se demander sous quelles hypothèses globales portant sur M_1 et sur son feuilletage caractéristique ou ses orbites CR de dimension $(2m+n-2)$, la condition d'éliminabilité est *automatiquement satisfaite*, mais il serait alors préférable d'énoncer de telles hypothèses dans un second temps.

Quant à la différence rémanente, elle me semble résider dans la géométrie différentielle du fibré $T^cM \cap TM_1$, On peut penser en effet que les courbes caractéristiques de M_1 dans le cas $m = 1$ sont remplacées par les courbes T^cM_1-tangentes dans le cas $m \geq 2$, mais alors ces deux types de courbes ne se comportent pas de la même manière, *parce que dans le cas $m = 1$, toute distribution de droites est forcément intégrable, tandis que dans le cas $m \geq 2$, la distribution CR de M_1 n'est pas forcément intégrable.* En vérité, cette différence est directement due à la différence entre les dimensions CR. Ainsi, à cause de cette dialectique entre distributions intégrables et distributions non intégrables, on voit s'incarner une différence précise entre les hypothèses d'éliminabilité :

(1) En dimension CR égale à 1, ce sont les compacts qui sont partout transversaux au feuilletage caractéristique que lon ne parvient pas à éliminer ; les intersections avec M_1 d'hypersurfaces complexes ont en effet une telle structure ; si toute courbe caractéristique touche le bord de tout sous-compact $\widetilde{K} \subset K$ sans rentrer dans son intérieur, alors K est éliminable.

(2) En dimension CR supérieure ou égale à 2, ce sont les compacts qui contiennent des orbites CR de dimension $(2m + n - 2)$ de M_1 que l'on ne parvient pas à éliminer ; les intersections avec M_1 d'hypersurfaces complexes ont en effet une telle structure ; si les courbes CR tracées dans M_1 et issues d'un point quelconque de K peuvent sortir de K, alors K est éliminable.

Pour terminer ce paragraphe, je voudrais mentionner que d'autres questions ouvertes sont soulevées par B Jöricke (Université d'Uppsala) se présentent encore. En voici une dont la réponse devrait en principe être très simple. N. Shcherbina et B. Jöricke se demandent comment perturber "le plus simplement possible" une sous-variété générique connexe de classe $\mathcal{C}^\infty$ plongée dans $\mathbb{C}^n$ de manière à la rendre globalement minimale, voir même, ce qui serait plus désirable localement minimale en tout point. On sent bien que l'énoncé doit être vrai, mais N. Scherbina aurait observé que le théorème de transversalité de Thom pointe le bout de son nez quelque part, avec des calculs pénibles dans les espaces de jets. Or, je n'en suis pas si sûr, et je pense qu'il doit exister une démonstration grossière, directe et sobre de cet énoncé, et que les calculs fins dans les espaces de jets ne sont nécessaires que si l'on cherche à minimiser les ordres de déformation. D'ailleurs, ce problème relance le théorème de minimalisation de B. Jöricke (J. Geom. Anal. **6** (1996), no.4, 555–611). En effet, il faut diviser le problème de la minimalisation de structures CR suivant le cas où l'on s'autorise des déformations non plongeables et le cas où l'on impose la contrainte que les structures déformées soient toujours plongées (ce qui est le cas étudié par B. Jöricke). Il est bien évident que sans la contrainte de plongeabilité, le problème de la minimalisation doit se simplifier considérablement. En vérité, je n'ai pas vraiment réfléchi sur cette question, car la réponse et la démonstration seront probablement simples et par là-même décevantes.

3.6. Février, Mars, Avril 2003 : Questionnement méthodique et ouverture conceptuelle dans la mathématique philosophique de Bernhard Riemann. J'ai décidé de participer de manière assez assidue à un séminaire organisé par Ivahn Smadja et Jean-Jacques Szczeciniarz à l'École Normale Supérieure sur l'histoire et la philosophie de la géométrie, à partir de la lecture des *Disquisitiones circa generales superficias curvas* de C.F. Gauss et du texte qui servit à la défense orale d'habilitation de B. Riemann, *Über di Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Les séances ont lieu environ toutes les deux semaines le vendredi à 16h30. Normalement, je devrais donner quelques exposés au printemps. Mais mon intention la plus ferme est de me décider enfin à écrire un texte sur la «méthode originale» de B. Riemann, à partir d'une lecture minutieuse de ses travaux de thèse et d'habilitation. Je ne décide donc de me déplacer à Paris que parce que ce sera l'occasion de travailler et surtout, d'écrire. La philosophie des sciences étant une maîtresse parfois bien triste, il faut bien trouver de l'excitation en quelque manière !

3.7. Avril, Mai, Juin 2003 et au-delà : Classification de Lie-Cartan des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$. Et voilà le premier gros morceau ! Dans un premier temps, en collaboration avec Hervé Gaussier, je vais moderniser la partie I de l'article d'Élie Cartan intitulé «*Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*» [I, Ann. di Mat. **11** (1932), 17–90, (ou Oeuvres II, 1231–1304); *II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **1** (1932), 333–354, (ou Oeuvres III, 1217–1238)]. Cet article repose sur la classification de Lie des actions de groupes continus locaux sur des ouverts de $\mathbb{C}^2$ et sur la correspondance, observée par B. Segre en 1931, entre hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$ et équations différentielles du second ordre. Néanmoins, la plupart des travaux de S. Lie et d'Élie Cartan qui vont dans cette direction n'ont pas encore été modernisés, ni par les chercheurs russes formés à l'Université de Moscou par A.G. Vitushkin, ni par les géomètres CR fondateurs dans les années 1970-80, ni même par P.J. Olver, L.V. Ovsiannikov, N.H. Ibragimov et d'autres qui ont relancé les méthodes de S. Lie en physique et en mathématiques [8]. De plus, le théorème fondamental de classification de toutes les actions de groupes de Lie locaux agissant sur des ouverts locaux de $\mathbb{C}^2$ qui a été achevée par S. Lie en 1880 dans son premier véritable article sur les groupes continus que l'on appelle maintenant «groupes de Lie» (Math. Ann. **16** (1880), 441–528) n'a pas, lui non plus été modernisé ou simplifié, à tel point d'ailleurs que la seule référence que je connaisse pour comprendre ce théorème n'est autre que l'article original, traduit par M. Ackerman et commenté par R. Hermann (*Sophus Lie's 1880 Transformation Group paper*, Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975). C'est justement parce qu'il fallait d'abord moderniser la théorie de S. Lie et parce que la «vague structuraliste des années Bourbaki» n'a pas assimilé l'œuvre d'Élie Cartan que personne n'a compris jusqu'à présent les détails de nombreux mémoires rédigés par Élie Cartan.

Or donc, je disais que la classification des hypersurfaces analytiques réelles locales de $\mathbb{C}^2$ et celle des équations différentielles ordinaires du second ordre sont très similaires, la seule différence provenant du fait qu'il existe une symétrie supplémentaire pour les hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$ due à leur invariance par conjugaison complexe. Je rappelle la classification des équations différentielles du second ordre d'après leur groupe de symétries de Lie, suivant qu'il est de dimension 0, 1, 2, 3 ou 8 (les seules possiblités), telle qu'elle est tirée (et recopiée depuis plus d'un siècle de livre en livre sans évoquer de démonstration) des travaux de S. Lie :

8. La seconde partie de l'article précité d'Élie Cartan, qui repose sur l'application de sa «méthode d'équivalence» au cas particulier des hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$, a quant à elle déjà été modernisée et généralisée, notamment grâce au travail de S.-S. Chern et J.K. Moser (Acta Math. **133** (1974), 219–271) ou à un livre plus récent de H. Jacobowitz sur les structures CR.

	Groupe de symétrie	Dimension	Équation invariante
(1)		0	$u_{xx} = F(x,u,u_x)$
(2)	∂_u	1	$u_{xx} = F(x,u_x)$
(3)	∂_x, ∂_u	2	$u_{xx} = F(u_x)$
(4)	∂_x, $e^x\partial_u$	2	$u_{xx} - u_x = F(u_x - u)$
(5)	∂_x, $\partial_x - u\partial_u$, $x^2\partial_x - 2xu\partial_u$	3	$u_{xx} = \frac{3u_x^2}{2u} + cu^3$
(6)	∂_x, $x\partial_x - u\partial_u$, $x^2\partial_x - (2xu+1)\partial_u$	3	$u_{xx} = 6uu_x - 4u^3 + {} +c(u_x - u^2)^{3/2}$
(7)	∂_x, ∂_u, $x\partial_x + \alpha u\partial_u$, $\alpha \neq 0,\frac{1}{2},1,2$	3	$u_{xx} = c(u_x)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}$
(8)	∂_x, ∂_u, $x\partial_x + (x+u)\partial_u$	3	$u_{xx} = ce^{-u_x}$
(9)	∂_x, ∂_u, $u\partial_x$, $x\partial_u$, $u\partial_u$, $x^2\partial_x + xu\partial_u$, $xu\partial_x + u^2\partial_u$	8	$u_{xx} = 0$

Mon programme de recherche en collaboration avec Hervé Gaussier est très précis : il s'agit d'écrire un article complet qui modernise les travaux de S. Lie et d'Élie Cartan au sujet des équations différentielles du second ordre et des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$. Voici un plan de travail progressif :

(A) Établir de manière autonome et auto-contenue la classification des algèbres de Lie de dimension 3 qui peuvent se réaliser comme algèbres de symétries de Lie d'une équation différentielle ordinaire du second ordre.

(B) Caractériser l'équation $u_{xx} = 0$ et la sphère unité de $\mathbb{C}^2$.

(C) Établir que 3 est la dimension sous-maximale de l'algèbre de Lie d'une telle équation du second ordre, que les algèbres d'isotropie se réduisent alors à 0 et enfin retrouver les formes normales de S. Lie et d'Élie Cartan (en précisant les hypothèses et en corrigeant les erreurs éventuelles de calcul).

(D) *Et surtout*: étudier plus précisément les classes d'équations du second ordre ou d'hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$ non homogènes, c'est-à-dire qui possèdent un groupe de symétrie de dimension 0, 1 ou 2. *Cette étude n'est faite ni par S. Lie ni par Élie Cartan.* En effet, les équations différentielles **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(4)** du tableau ci-dessus peuvent fort bien dégénérer dans les formes **(5)**, **(6)**, **(7)**, **(8)** ou **(9)** lorsque les fonctions F sont spéciales. *Il faut donc trouver des formes normales pour les fonctions F qui apparaissent dans les équations différentielles* **(1)**, **(2)**, **(3)** *et* **(4)** *du tableau ci-dessus qui assurent que le groupe de symétrie est bien de dimension* 0, 1 *ou* 2 *; pour cela, il faut travailler en un point générique et trouver des conditions sur les fonctions F qui sont valables en un point générique.* Ainsi, notre travail ne consistera pas seulement à réécrire des travaux anciens dans un langage moderne. L'étude complète des cas non homogènes **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(4)** au cas par cas n'est pas faite dans la littérature. De manière analogue, il est bien connu que la forme normale de J.K. Moser pour les hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$ ne respecte en général pas les symétries qui sont données au départ ; par exemple, la forme normale d'une hypersurface rigide $\operatorname{Im} w = \varphi(z,\bar{z})$ Levi non-dégénérée (l'équation différentielle du second ordre qui lui est associée est de la forme **(2)**) n'est pas en général rigide, ce qui constitue à mon avis un des défauts majeurs de l'approche uniforme de J.K. Moser. Au contraire, il est nécessaire de construire des formes normales spécifiques pour chacun des types d'équations différentielles **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(4)**. *Au total, il faut obtenir des résultats qui exhibent une parfaite correspondance tripartite entre le groupe de symétries d'une hypersurface analytique réelle (ou d'une équation différentielle du second ordre), entre sa forme normale et entre ses invariants différentiels.*

Une telle recherche représente environ un an de travail pour un mémoire finement structuré de cent à cent cinquante pages. Le but principal sera de «nettoyer» au maximum la technicité des preuves ainsi que de recadrer les classifications dans le langage moderne de la théorie des représentations d'algèbres de Lie. Il va sans dire que ce ne sera qu'un préliminaire qui servira à s'aiguiser les dents pour qu'elles soient assez longues et assez solides pour pouvoir attaquer le même problème en dimension complexe égale à trois.

Par ailleurs, je projette aussi de comparer cette approche avec l'application de la méthode d'équivalence d'Élie Cartan, en modernisant d'abord la deuxième partie du mémoire précité, puis en analysant plus à fond ce qu'elle peut donner dans les cas non homogènes, c'est-à-dire en étudiant séparément les cas **(1)**, **(2)**, **(3)** et **(4)** ci-dessus.

3.8. Caractérisation de l'algébrisabilité des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$. Une fois que tous ces travaux de classification seront achevés, il sera très certainement possible de formuler des *conditions nécessaires et suffisantes* pour l'algébrisabilité d'une hypersurface analytique réelle de $\mathbb{C}^2$. Je tiens particulièrement à résoudre cette question de manière satisfaisante.

§4. Programme de recherche renouvelé pour les années 2003 à 2006

4.1. Programme informatique pour le calcul des automorphismes CR infinitésimaux des hypersurfaces analytiques réelles Levi non dégénérées de $\mathbb{C}^3$. Soit M une hypersurface analytique réelle Levi non-dégénérée de $\mathbb{C}^3$ passant par l'origine. Soient $(z_1,z_2,w) \in \mathbb{C}^3$, des coordonnées s'annulant à l'origine telles que M est représentée par $2\,\mathrm{Re}\,w = \varphi(z,\bar{z},\mathrm{Im}\,w)$, où la fonction analytique réelle φ s'annule ainsi que ses dérivées partielles d'ordre 1 à l'origine. On dit que M est *sphérique* si sa courbure de Chern s'annule identiquement. Dans ce cas, M est localement biholomorphe à l'une (et l'une seulement) des deux quadriques modèles

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\,w = |z_1|^2 + |z_2|^2, \\ 2\,\mathrm{Re}\,w = |z_1|^2 - |z_2|^2. \end{cases}$$

De plus le groupe d'automorphismes holomorphes locaux stabilisant ces deux modèles homogènes est de dimension 15. Soit à nouveau $M : 2\,\mathrm{Re}\,w = \varphi(z,\bar{z},\mathrm{Im}\,w)$ une hypersurface arbitraire et soit $\mathrm{Hol}\,M$ son (pseudo)groupe d'automorphismes holomorphes locaux. Soit $\mathfrak{Hol}(M)$ l'algèbre de Lie associée, qui consiste en les champs de vecteurs $X = Q^1(x,u)\,\partial_{x_1} + Q^2(x,u)\,\partial_{x_2} + R(x,u)\,\partial_u$ à coefficients holomorphes dans un voisinage de M tels que $X + \overline{X}$ est tangent à M. C'est une algèbre de Lie *réelle*, les constantes de structure étant réelles. On notera $\mathfrak{Hol}(M,0)$ l'algèbre de Lie d'isotropie de l'origine, c'est-à-dire les champs X appartenant à $\mathfrak{Hol}(M)$ qui s'annulent en 0. D'après une annonce de A.V.Loboda (Funk. analysis and its appl. (russian) **33** (1999), no. 1, 68–71), l'algèbre de Lie *réelle* d'isotropie $\mathfrak{Hol}(M,0)$ satisfait l'inégalité

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{Hol}(M,0) \leq 3,$$

A.V. Loboda annonce aussi que dans le cas où $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{Hol}(M,0) = 3$, l'hypersurface M est nécessairement biholomorphe à l'hypersurface dite de J. Winkelmann

$$2\,\mathrm{Re}\, w = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + |z_1|^4. \tag{4.1.1}$$

Plus récemment, A.V. Loboda a fait une nouvelle annonce par courrier électronique, sans faire circuler aucune démonstration. Il aurait classifié toutes les autres hypersurfaces homogènes Levi non-dégénérées de $\mathbb{C}^3$ dont la forme de Levi a une valeur propre positive et une valeur propre négative et dont le groupe d'isotropie est de dimension 2 ou 1, celles donc qui viennent juste après l'hypersurface de J. Winkelmann. À ma connaissance, il n'a pas annoncé de résultat concernant les hypersurfaces dont la forme de Levi a ses deux valeurs propres positives. Voici ses résultats :

Théorème . (A.V. Loboda) *Les hypersurfaces analytiques réelles locales homogènes non sphériques de $\mathbb{C}^3$ dont la forme de Levi a une valeur propre positive et une valeur propre négative et dont les algèbres d'isotropie $\mathfrak{hol}(M,0)$ sont de dimension 2 sont données par la liste suivante*

I. *Hypersurfaces de type Winkelmann :*

$$2\mathrm{Re}\, w = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + (1+\varepsilon|z_1|^2)\ln(1+\varepsilon|z_1|^2), \quad \varepsilon = \pm 1; \tag{4.1.2}$$

II. *Hypersurfaces de type Cartan :*

$$2\mathrm{Re}\, w = \ln(1 + z_1\bar{z}_2) + \ln(1 + z_2\bar{z}_1); \tag{4.1.3}$$

III. *Hypersurfaces de type pseudo-Cartan :*

$$2\mathrm{Re}\, w = \ln(1 - |z_1|^2) - b\ln(1 - |z_2|^2), \qquad 0 < b < 1; \tag{4.1.4}$$

$$2\mathrm{Re}\, w = \ln(1 + |z_1|^2) + b\ln(1 - |z_2|^2), \qquad 0 < b < \infty; \tag{4.1.5}$$

$$2\mathrm{Re}\, w = \ln(1 + |z_1|^2) - b\ln(1 + |z_2|^2), \qquad 0 < b < 1; \tag{4.1.6}$$

$$2\mathrm{Re}\, w = |z_2|^2 - \varepsilon\ln(1 + \varepsilon|z_1|^2), \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{4.1.7}$$

Théorème . (A.V. Loboda) *Les hypersurfaces analytiques réelles locales homogènes non sphériques de $\mathbb{C}^3$ dont la forme de Levi a une valeur propre positive et une valeur propre négative et dont les algèbres d'isotropie $\mathfrak{hol}(M,0)$ sont de dimension 1 sont données par la liste suivante*

IV. *Hypersurfaces de type Winkelmann :*

$$v = x_1x_2 + (1 + x_1)^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,2,3,4\}\ ; \tag{4.1.8}$$

$$2\mathrm{Re}\, w = x_1x_2 + \exp(x_1) - 1)\ ; \tag{4.1.9}$$

$$2\mathrm{Re}\, w = x_1x_2 + \ln(1 + x_1)\ ; \tag{4.1.10}$$

$$2\mathrm{Re}\, w = x_1x_2 + (1 + x_1)^2\ \ln(1 + x_1)\ ; \tag{4.1.11}$$

$$2\mathrm{Re}\, w = x_1x_2 + (1 + x_1)^3\ \ln(1 + x_1)\ ; \tag{4.1.12}$$

(4.1.13)
$$2\mathrm{Re}\, w = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + (1 + z_1)^A\overline{(1 + z_1)^A}, \qquad A \in \mathbb{C}\backslash\{-1,0,1,2\}, \qquad A \sim (1 - A)\ ;$$

$$2\mathrm{Re}\, w = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + \ln(1 + z_1)\ \ln(1 + \bar{z}_1)\ ; \tag{4.1.14}$$

V. *Hypersurfaces de type Cartan :*

$$1 + |z_1|^2 - |z_2|^2 + |w|^2 = a|A + z_1^2 - z_2^2 + w^2|, \qquad a > 1\ ; \tag{4.1.15}$$

$$1 + |z_1|^2 - |z_2|^2 - |w|^2 = a|1 + z_1^2 - z_2^2 - w^2|, \qquad 0 < a < 1\ ; \tag{4.1.16}$$

(4.1.17) $$2\mathrm{Re}\,w = \sqrt{1 - x_1x_2}\ ;$$

VI. *Hypersurfaces de type pseudo-Cartan :*

(4.1.18) $$2\mathrm{Re}\,w = x_2^2 + (1 + x_1)^\alpha, \qquad \alpha \in (0,1)\ ;$$

(4.1.19) $$2\mathrm{Re}\,w = x_2^2 - (1 + x_1)^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash[0,1],\ \alpha \neq 2\ ;$$

(4.1.20) $$2\mathrm{Re}\,w = x_2^2 - (1 + x_1)\,\ln(1 + x_1).$$

En exceptant (4.1.15) et (4.1.16), voici les 18 systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre associés à ces hypersurfaces, grâce au principe de B. Segre, que je résume comme suit. Tout d'abord, partons d'une équation telle que les 18 équations ci-dessus, qui est de la forme générale

$$2\,\mathrm{Re}\,w = w + \bar{w} = \varphi(z_1,z_2,\bar{z}_1,\bar{z}_2),$$

où φ ne dépend pas de la variable $\mathrm{Im}\,w$. Pour revenir à des notations plus standard, on change de notations : on remplace w par u et $z = (z_1,z_2)$ par $x = (x_1,x_2)$, puis $\bar{w}$ par $-\nu$ et $(\bar{z}_1,\bar{z}_2)$ par (χ_1,χ_2), ce qui donne

$$u = \nu + \varphi(x_1,x_2,\chi_1,\chi_2).$$

Ensuite, on dérive u par rapport à x_1 et par rapport à x_2, ce qui donne

$$\begin{cases} u_{x_1} = \varphi_{x_1}(x_1,x_2,\chi_1,\chi_2), \\ u_{x_2} = \varphi_{x_2}(x_1,x_2,\chi_1,\chi_2). \end{cases}$$

L'hypothèse de Levi non-dégénérescence dit exactement que l'on peut résoudre (en appliquant le théorème des fonctions implicites) ces deux équations par rapport aux deux variables (χ_1,χ_2), ce qui donne une expression de la forme

$$(\chi_1,\chi_2) = \Pi(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2}).$$

Ensuite, on dérive l'équation de départ par rapport à x_1x_1, par rapport à x_1x_2 et par rapport à x_2x_2 et l'on remplace les valeurs de (χ_1,χ_2) obtenues, ce qui donne un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre deux :

$$\begin{cases} u_{x_1x_1} = \varphi_{x_1x_1}(x_1,x_2,\chi_1,\chi_2) = \varphi_{x_1x_1}(x_1,x_2,\Pi(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})), \\ u_{x_1x_2} = \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2,\chi_1,\chi_2) = \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2,\Pi(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})), \\ u_{x_2x_2} = \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2,\chi_1,\chi_2) = \varphi_{x_2x_2}(x_1,x_2,\Pi(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})). \end{cases}$$

En effectuant cette procédure pour les 18 hypersurfaces ci-dessus, on obtient :

O. Hypersurface dite de Winkelmann :

(4.1.1') $$\begin{cases} u_{x_1x_1} = 2\,(u_{x_2})^2, \\ u_{x_1x_2} = 0, \\ u_{x_2x_2} = 0. \end{cases}$$

I. Hypersurfaces de type Winkelmann :

(4.1.2') $$\begin{cases} u_{x_1x_1} = \dfrac{(u_{x_2})^2}{1 + \varepsilon x_1 u_{x_2}}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \\ u_{x_1x_2} = 0, \\ u_{x_2x_2} = 0. \end{cases}$$

II. Hypersurfaces de type Cartan :

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= -(u_{x_1})^2,\\ u_{x_1x_2} &= 0,\\ u_{x_2x_2} &= -(u_{x_2})^2. \end{aligned}\right. \tag{4.1.3'}$$

III. Hypersurfaces de type pseudo-Cartan :

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= -(u_{x_1})^2,\\ u_{x_1x_2} &= 0,\\ u_{x_2x_2} &= \frac{1}{b}\,(u_{x_1})^2, \qquad 0<b<1. \end{aligned}\right. \tag{4.1.4'}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= -(u_{x_1})^2,\\ u_{x_1x_2} &= 0,\\ u_{x_2x_2} &= -\frac{1}{b}\,(u_{x_2})^2, \qquad 0<b<\infty. \end{aligned}\right. \tag{4.1.5'}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= -(u_{x_1})^2,\\ u_{x_1x_2} &= 0,\\ u_{x_2x_2} &= \frac{1}{b}\,(u_{x_2})^2, \qquad 0<b<1. \end{aligned}\right. \tag{4.1.6'}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= \varepsilon\,(u_{x_1})^2, \qquad \varepsilon=\pm 1,\\ u_{x_1x_2} &= 0,\\ u_{x_2x_2} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4.1.7'}$$

IV. Hypersurfaces de type Winkelmann :

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= \alpha(\alpha-1)\,(u_{x_2})^{\alpha-2}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0,1,2,3,4\},\\ u_{x_1x_2} &= 0,\\ u_{x_2x_2} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4.1.8'}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= \exp(u_{x_2}),\\ u_{x_1x_2} &= 0,\\ u_{x_2x_2} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4.1.9'}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= -\frac{1}{(1+u_{x_2})^2},\\ u_{x_1x_2} &= 1,\\ u_{x_2x_2} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4.1.10'}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= 3+\ln(1+u_{x_2}),\\ u_{x_1x_2} &= 1,\\ u_{x_2x_2} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4.1.11'}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_{x_1x_1} &= 5(1+u_{x_2})+6(1+u_{x_2})\,\ln(1+u_{x_2}),\\ u_{x_1x_2} &= 1,\\ u_{x_2x_2} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4.1.12'}$$

$$(4.1.13')\qquad \begin{cases} u_{x_1x_1} &= A(A-1)\,(1+x_1)^{A-2}(1+u_{x_2})^A, \\ u_{x_1x_2} &= 0, \\ u_{x_2x_2} &= 0. \end{cases}$$

$$(4.1.14')\qquad \begin{cases} u_{x_1x_1} &= -\dfrac{\ln(1+u_{x_2})}{(1+x_1)^2}, \\ u_{x_1x_2} &= 0, \\ u_{x_2x_2} &= 0. \end{cases}$$

V. Hypersurfaces de type Cartan :

(4.1.15') À compléter

(4.1.16') À compléter

$$(4.1.17')\qquad \begin{cases} u_{x_1x_1} &= -\dfrac{1}{4}\,(u_{x_1})^2\,(1+4u_{x_1}u_{x_2})^{1/2}, \\ u_{x_1x_2} &= -\dfrac{1}{4}\,u_{x_1}u_{x_2}\,(1+4u_{x_1}u_{x_2})^{1/2}, \\ u_{x_2x_2} &= -\dfrac{1}{4}\,(u_{x_2})^2\,(1+4u_{x_1}u_{x_2})^{1/2}. \end{cases}$$

VI. Hypersurfaces de type pseudo-Cartan :

$$(4.1.18')\qquad \begin{cases} u_{x_1x_1} &= \alpha(\alpha-1)\,\left(\dfrac{u_{x_1}}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}, \qquad \alpha\in(0,1), \\ u_{x_1x_2} &= 0, \\ u_{x_2x_2} &= 2. \end{cases}$$

$$(4.1.19')\qquad \begin{cases} u_{x_1x_1} &= -\alpha(\alpha-1)\,\left(-\dfrac{u_{x_1}}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\backslash[0,1],\ \alpha\neq 2, \\ u_{x_1x_2} &= 0, \\ u_{x_2x_2} &= 0. \end{cases}$$

$$(4.1.20')\qquad \begin{cases} u_{x_1x_1} &= -\exp(1+u_{x_1}), \\ u_{x_1x_2} &= 0, \\ u_{x_2x_2} &= 2. \end{cases}$$

Dans un premier temps, je souhaiterais obtenir un programme Maple qui permette de calculer directement les symétries de Lie de ces 18 systèmes d'équations aux dérivées partielles. Le programme devrait être constitué de telle manière qu'il s'applique aux systèmes d'équations aux dérivées partielles analytiques réelles ou complexes à deux variables indépendantes $x=(x_1,x_2)$ et une variable indépendante u qui sont de la forme

$$\begin{cases} u_{x_1x_1} = F_{1,1}(x_1,x_2,u,u_{x_1},u_{x_2}), \\ u_{x_1x_2} = F_{1,2}(x_1,x_2,u,u_{x_1},u_{x_2}), \\ u_{x_2x_2} = F_{2,2}(x_1,x_2,u,u_{x_1},u_{x_2}). \end{cases}$$

Ici, les seconds membres ne sont pas forcément polynomiaux, ils peuvent être analytiques. Le programme désiré devrait incorporer les éléments suivants :

1. Entrées : Les fonctions $F_{1,1}$, $F_{1,2}$, $F_{2,2}$, qui sont soit des fonctions spéciales transformées en séries formelles, soit des polynômes.

2. Procédures : Faire d'abord un test de compatibilité du système. Définir une procédure de troncature de séries de Taylor qui devra s'appliquer lorsque les fonctions $F_{i,j}$ sont vraiment non polynomiales. Calculer le prolongement de Lie d'ordre deux d'un champ de vecteurs $X = Q^1(x,u)\,\partial_{x_1} + Q^2(x,u)\,\partial_{x_2} + R(x,u)\,\partial_u$. Écrire "jusqu'à un ordre K prédéfini" les équations définissantes de l'algèbre de Lie des symétries du système. Ajouter une option permettant d'afficher ce système d'équations aux dérivées partielles linéaires si on le souhaite.

3. Sorties : Générateurs de l'algèbre de Lie des symétries du système. Dimension de l'algèbre de Lie.

4. Vérification : Écrire une procédure qui permet de vérifier que les champs de vecteurs forment bien une algèbre de Lie et sont bien des symétries de Lie du système donné.

Attention, il y a une difficulté concernant les troncatures de séries formelles : tronquer à partir d'un ordre K seulement par rapport aux variables de jets d'ordre non nul (u_{x_1},u_{x_2}), mais pas par rapport aux variables (x,u), ne produit pas d'effets indésirables, parce les équations de Lie que l'on obtient font intervenir des vraies fonctions de (x,u) non tronquées et ses solutions donneront des vraies symétries du système étudié. Mais si l'on doit aussi tronquer par rapport aux variables (x,u), alors on peut perdre certaines symétries infinitésimales. Afin de ne pas oublier de symétries, il faut donc introduire la notion de *symétries de Lie approchées à l'ordre* K, c'est-à-dire des champs de vecteurs

$$X = Q^1(x,u)\,\partial_{x_1} + Q^2(x,u)\,\partial_{x_2} + R(x,u)\,\partial_u \quad \mathrm{Mod}(\mathrm{O}(K+1))$$

dont les coefficients sont eux-mêmes tronqués à l'ordre K et qui satisfont le critère de Lie *à l'ordre* K.

4.2. Algorithme général pour le calcul des symétries de Lie. Plus généralement, je souhaiterais écrire un programme qui calcule les symétries de Lie d'un système d'équations aux dérivées partielles complet non linéaire complètement intégrable de la forme suivante. *La généralisation n'est absolument pas gratuite, parce que j'ai en vue des quantités d'exemples qui ou bien apparaissent dans la littérature ou bien sont des modèles naturels de sous-variétés génériques uniformément Levi dégénérées et dont le calcul des symétries à la main est vraiment trop fastidieux.*

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$ et soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$ et soit $u = (u^1,\dots,u^m) \in \mathbb{K}^m$. Soit $\kappa \in \mathbb{N}$ avec $\kappa \geq 2$. Pour $j = 1,\dots,m$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, pour alléger l'écriture des formules, on note les dérivées partielles $\partial^{|\alpha|}u^j/\partial x^\alpha$ en indice, ce qui donne $u^j_{x^\alpha}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 1$ et on considère une collection de p multiindices notés $\beta(1),\dots,\beta(p) \in \mathbb{N}^n$ avec $|\beta(q)| \geq 1$ pour $q = 1,\dots,p$ et $\max_{1\leq q\leq p} |\beta(q)| = \kappa-1$, et aussi p nombres entiers $j(1),\dots,j(p)$ avec $1 \leq j(q) \leq m$ pour $q = 1,\dots,p$. Le but est d'étudier les systèmes d'équations aux dérivées partielles analytiques sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et complètement intégrables de la forme

$$(\mathcal{E}) \qquad u^j_{x^\alpha}(x) = F^j_\alpha\left(x,u(x),(u^{j(q)}_{x^{\beta(q)}}(x))_{1\leq q\leq p}\right),$$

où $(j,\alpha) \neq (j(1),\beta(1)),\dots,(j(p),\beta(p))$ et $j = 1,\dots,m$, $|\alpha| \leq \kappa$. Ici, les fonctions F^j_α sont $\mathbb{K}$-analytiques. Le programme désiré devrait incorporer les éléments suivants :

1. Entrées : Les entiers $n \geq 1$, $m \geq 1$, $p \geq 1$, les entiers $j(1),\dots,j(p)$, les multiindices $\beta(1),\dots,\beta(p)$, l'entier $\kappa \geq 2$, les seconds membres F^j_α, fonctions spéciales transformées en séries formelles ou polynômes.

2. Procédures : Faire d'abord un test de compatibilité du système. Définir une procédure de troncature de séries de Taylor si les fonctions F_α^j sont vraiment non polynomiales. Calculer le prolongement de Lie d'ordre κ d'un champ de vecteurs X. Écrire "jusqu'à un ordre K prédéfini" les équations définissantes de l'algèbre de Lie des symétries du système. Ajouter une option permettant d'afficher ce système d'équations aux dérivées partielles linéaires si on le souhaite.

3. Sorties : Générateurs de l'algèbre de Lie des symétries du système. Dimension de l'algèbre de Lie.

4. Vérification : Écrire une procédure qui permet de vérifier que les champs de vecteurs forment bien une algèbre de Lie et sont bien des symétries de Lie du système donné.

Comme ci-dessus, il faudra faire très attention aux troncatures qui peuvent faire perdre des symétries.

L'intérêt d'écrire un tel programme est évident : il existe dans la littérature de nombreux exemples de variétés CR explicites dont le calcul des automorphismes CR infinitésimaux était jusqu'à maintenant effectué, malgré la lourdeur des calculs, à la main. Par exemple, en ne retenant que les termes principaux des équations obtenues par P. Ebenfelt pour les hypersurfaces 2-non-dégénénérées mais Levi dégénérées à l'origine dans $\mathbb{C}^3$, on obtient les sept hypersurfaces suivantes :

$$\begin{cases}
\operatorname{Im} w = |z_1|^2(z_2+\bar z_2) + r(z_1^2\bar z_2 + \bar z_1^2 z_2), \qquad r>0, \\
\operatorname{Im} w = |z_1|^2(z_2+\bar z_2) + (z_1^2\bar z_2 + \bar z_1^2 z_2) + i|z_1|^2(z_1-\bar z_1), \\
\operatorname{Im} w = |z_1|^2(z_2+\bar z_2) + (z_1\bar z_2^2 + \bar z_1 z_2^2) + |z_2|^2(\lambda z_2 \bar{+} \lambda\bar z_2), \qquad \lambda\in\mathbb{C},\ \lambda\neq 0, \\
\operatorname{Im} w = |z_1|^2(z_1+\bar z_1) + |z_2|^2(z_2+\bar z_2) + (\mu z_1^2\bar z_1 + \bar\mu\bar z_1^2 z_2) + (\nu z_1\bar z_2^2 + \bar\nu\bar z_1 z_2^2), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mu,\nu\in\mathbb{C},\ \mu\nu\neq 1, \\
\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + |z_2|^2(z_2+\bar z_2) + \gamma(z_1^2\bar z_2 + \bar z_1^2 z_2), \qquad \gamma = 0,1, \\
\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + (z_1^2\bar z_2 + \bar z_1^2 z_2), \\
\\
\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + |z_2|^2(z_1+\bar z_1).
\end{cases}$$

Une élève de V. Beloshapka, A.E. Ershova s'est amusée à calculer à la main une base d'automorphismes CR infinitésimaux de ces hypersurfaces dans l'article *Automorphisms of* 2*-nondegenerate hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$, Math. Notes **69**, no. 2, 188–195. Tout le monde sait que c'est un travail réellement fastidieux, mais puisqu'il s'agit essentiellement de calculs algorithmiques, il est préférable d'utiliser l'informatique. En effet, l'algorithme de constitution de bases de Gröbner dans un système d'équations aux dérivées partielles polynomiales est déjà implémentée dans la version commerciale de Maple et est due à François Boulier, Maître de Conférence au Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille 1 (François Boulier a effectué ce travail dans sa thèse sous la direction Michel Petitot).

Mais le projet d'écrire un tel programme va bien au-delà de la vérification et de la confirmation des résultats déjà établis «à la main». En effet, en raisonnant essentiellement comme dans l'article **[8]** du §2.1, il serait naturellement possible de construire rapidement à la main des modèles naturels d'hypersurfaces Levi-dégénérées de $\mathbb{C}^4$ qui satisferaient l'une des trois conditions suivantes de non-dégénérescence :

(i) Avoir une forme de Levi de rang deux en tout point et être 2-non-dégénérée.
(ii) Avoir une forme de Levi de rang un en tout point et être 2-non-dégénérée.
(iii) Avoir une forme de Levi de rang un en tout point, et être 3-non-dégénérée.

Mais au contraire, il serait quasiment impossible de calculer à la main des générateurs de l'algèbre de Lie de leurs automorphismes CR infinitésimaux. Ainsi, l'informatique viendrait à la rescousse pour dévoiler l'extraordinaire richesse insoupçonnée des hypersurfaces uniformément Levi dégénérée.

Plus généralement, pour les hypersurfaces analytiques réelles holomorphiquement non-dégénérées dans $\mathbb{C}^n$, dont l'équation complexifiée en coordonnées $(t,\tau) = (z,w,\zeta,\xi) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ est

$$\xi = \Theta(\zeta,z,w),$$

où Θ est une série analytique complexe convergente, on peut définir (*cf.* la référence **[10]**) une suite d'entiers qui généralise la Levi non-dégénéréscence en un point Zariski-générique :

$$\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}\left((t,\tau) \mapsto J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_\tau\right) = 1 + \lambda_{1,M} + \cdots + \lambda_{k,M},$$

où la notation $\mathrm{genrk}_{\mathbb{C}}(\Psi)$ désigne le rang générique d'une application holomorphe Ψ et où l'application de *jets de variétés de Segre conjuguées complexifiées* est définie par

$$J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t := \left(\zeta, \left(\frac{1}{\beta!}\,\partial^\beta_\zeta \Theta(\zeta,t)\right)_{\beta\in\mathbb{N}^{n-1}\ |\beta|\leq k}\right).$$

Si M est holomorphiquement non-dégénérée (ce qui revient essentiellement à dire que son étude ne se ramène pas à l'étude d'une hypersurface dans $\mathbb{C}^{n-1}$) il apparaît qu'il existe un entier ℓ_M avec $1 \leq \ell_M \leq n-1$ et des entiers $\lambda_{1,M} \geq 1, \dots, \lambda_{1,\ell_M} \geq 1$, tels que l'on ait la relation

$$1 + \lambda_{1,M} + \cdots + \lambda_{\ell_M,M} = n.$$

De plus, on a $\ell_M = 1$ et $\lambda_{1,M} = n-1$ si et seulement si M est Levi non-dégénérée en un point Zariski-générique. Comme la classification initiale des hypersurfaces ne semble pouvoir aboutir qu'avec des hypothèses génériques, il est convenable de travailler au voisinage d'un point donné en supposant que le rang des applications $(t,\tau) \mapsto J^k_\tau \underline{\mathcal{S}}_t$, $k = 1,\dots,\ell_M$, est localement constant. Élie Cartan, S.S. Chern et J.K. Moser ne font pas autre chose, puisqu'ils supposent M Levi-nondégénérée en le point de référence. Dans $\mathbb{C}^3$, c'est-à-dire pour $n = 3$, les deux seules possibilités combinatoires pour la relation $1 + \lambda_{1,M} + \cdots + \lambda_{\ell_M,M} = n$ sont les suivantes

$$\begin{cases} \ell_M = 1, & \lambda_{1,M} = 2, \\ \ell_M = 2, & \lambda_{1,M} = \lambda_{2,M} = 1. \end{cases}$$

Ceci éclaire l'intérêt des travaux de P. Ebenfelt. Dans $\mathbb{C}^4$, les quatre seules possibilités combinatoires sont

$$\begin{cases} \ell_M = 1, & \lambda_{1,M} = 3, \\ \ell_M = 2, & \lambda_{1,M} = 2,\ \lambda_{2,M} = 1, \\ \ell_M = 2, & \lambda_{1,M} = 1,\ \lambda_{2,M} = 2, \\ \ell_M = 3, & \lambda_{1,M} = 1,\ \lambda_{2,M} = 1,\ \lambda_{3,M} = 1. \end{cases}$$

Les trois dernières possibilités correspondent dans l'ordre aux trois cas **(i)**, **(ii)** et **(iii)** ci-desssus. On peut s'amuser à faire de même en dimension $n = 5$, $n = 6$, *etc.* En tout état de cause, le calcul des automorphismes CR infinitésimaux des modèles découverts par une méthode analogue à celle employée dans la référence **[8]** du §2.1 devrait aboutir rapidement grâce à l'outil informatique.

4.3. Classification générale des hypersurfaces analytiques réelles $\mathbb{C}^3$. Ce projet de recherche consiste à trouver toutes les formes normales d'hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^3$ en un point Zariski-générique. C'est un projet de très grande ampleur, mais qui semble accessible. En effet, tout revient à classifier les algèbres de Lie de champs de vecteurs définis localement sur un ouvert de $\mathbb{C}^3$ et dont la dimension est inférieure ou égale à sept. En effet,

(1) Dans le cas Levi-non-dégénéré, c'est-à-dire dans le cas $\ell_M = 1$, $\lambda_{1,M} = 2$, d'après une annonce de A.V. Loboda (mais il faudra confirmer ce résultat par une démonstration indépendante) ou bien $\mathfrak{Hol}(M)$ est de dimension 15 et M est localement équivalente à l'une des deux quadriques modèles $\operatorname{Im} w = |z_1|^2 \pm |z_2|^2$, ou bien $\mathfrak{Hol}(M)$ est de dimension 8, auquel cas M est nécessairement biholomorphe à l'hypersurface de J. Winkelmann, ou bien $\mathfrak{Hol}(M)$ est de dimension inférieure ou égale à 7.

(2) Dans le cas uniformément Levi-dégénéré de rang un, c'est-à-dire dans le cas $\ell_M = 2$, $\lambda_{1,M} = \lambda_{2,M} = 1$, d'après l'application de la méthode d'équivalence faite par P. Ebenfelt, on sait que $\mathfrak{Hol}(M)$ est de dimension inférieure ou égale à 7.

Or il se trouve justement que la classification des algèbres de Lie abstraites de dimension inférieure ou égale à 7 est déjà connue (bien que dès la dimension 8, elle ne soit pas encore achevée). Quelle coïncidence que 7 soit donc la même dimension charnière ! Ainsi, il ne semble pas hors d'atteinte de mener le programme de recherche suivant, en quatre étapes :

(1) Comprendre de l'intérieur la classification abstraite des algèbres de Lie jusqu'à la dimension 7.

(2) Déterminer toutes les manières possibles dont ces algèbres de Lie peuvent se réaliser comme algèbres de Lie de champs de vecteurs locaux définis sur des ouverts de $\mathbb{C}^3$. À mon avis, ce travail n'est pas effectué dans la littérature.

(3) Sélectionner parmi la liste obtenue dans l'étape **(2)** les algèbres de Lie de champs de vecteurs qui peuvent se réaliser comme algèbres de symétries de Lie de systèmes d'équations aux dérivées partielles complètement intégrables d'ordre deux ou trois à deux variables indépendantes et une variable dépendante.

(4) Déterminer enfin les formes réelles de ces algèbres de Lie pour classifier toutes les hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^3$ en un point Zariski-générique.

4.4. Application de la méthode d'équivalence d'Élie Cartan. Comme pour l'étude des hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$, il faudra comparer les résultats de classification obtenus par la méthode de S. Lie dans le §4.3 ci-dessus aux résultats que l'on peut obtenir en appliquant la méthode d'équivalence d'Élie Cartan. Dans cette direction, je vais pouvoir bénéficier des travaux doctoraux de Sylvain Neut, encadré par Michel Petitot au *Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille 1*. En effet, Sylvain Neut a récemment implémenté un programme écrit en Maple qui permet de calculer explicitement les invariants différentiels qui apparaissent dans l'application de l'algorithme d'Élie Cartan ainsi que les relations qui existent entre eux dans l'algèbre différentielle qu'ils engendrent, ce qu'il semble quasiment impossible de faire à la main (mais cela reste à confirmer) dès que le nombre des variables indépendantes est supérieur ou égal à deux. Grâce à une étude qui a été conduite à l'aide de ce programme, C. Bièche et S. Neut ont obtenu le résultat suivant.

Théorème . (C. Bièche, S. Neut) *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *soient* $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{K}$, *soit* $u \in \mathbb{K}$ *et soit*

$$\begin{cases} u_{x_1x_1} = F_{1,1}(x,u,u_{x_1},u_{x_2}), \\ u_{x_1x_2} = F_{1,2}(x,u,u_{x_1},u_{x_2}), \\ u_{x_2x_2} = F_{2,2}(x,u,u_{x_1},u_{x_2}), \end{cases}$$

un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles analytiques du second ordre. On note (u_1,u_2) *les coordonnées indépendantes de l'espace des jets d'ordre un qui correspondent aux dérivées partielles* (u_{x_1},u_{x_2}). *Ce système est équivalent, via une transformation* $\mathbb{K}$*-analytique locale ponctuelle* $(\bar{x},\bar{u}) = \Phi(x,u)$, *au système* $\bar{u}_{\bar{x}_1\bar{x}_1} = 0$, $\bar{u}_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = 0$, $\bar{u}_{\bar{x}_2\bar{x}_2} = 0$ *si et seulement si les cinq équations aux dérivées partielles linéaires suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial^2 F_{1,1}}{\partial u_2 \partial u_2}, \\ 0 = \dfrac{\partial^2 F_{2,2}}{\partial u_1 \partial u_1}, \\ 0 = \dfrac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial u_2 \partial u_2} - \dfrac{\partial^2 F_{1,1}}{\partial u_1 \partial u_2}, \\ 0 = \dfrac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial u_1 \partial u_1} - \dfrac{\partial^2 F_{2,2}}{\partial u_1 \partial u_2}, \\ 0 = \dfrac{\partial^2 F_{1,1}}{\partial u_1 \partial u_1} - 4\dfrac{\partial^2 F_{1,2}}{\partial u_1 \partial u_2} + \dfrac{\partial^2 F_{2,2}}{\partial u_2 \partial u_2}. \end{cases}$$

Ce résultat me semble particulièrement instructif quant à l'ouverture réelle des problèmes dans cette direction. En effet, dans l'article de S.S. Chern et J.K. Moser, les hypersurfaces sphériques de $\mathbb{C}^n$ sont caractérisées classiquement par l'annulation de leur tenseur de courbure, ce qui donne un très grand nombre de conditions redondantes sur les invariants différentiels, lesquels n'ont d'ailleurs jamais été calculés explicitement à cause de la lourdeur des calculs. Le travail de C. Bièche et S. Neut est remarquable en ceci qu'il fournit une condition explicite, simple et claire qui caractérise l'équivalence au système plat $u_{x_ix_j} = 0$, $i,j = 1,2$. Dans cette direction, de nombreux projets d'approfondissement et de collaboration sont en germe au sujet de la méthode d'équivalence de Cartan, voir §4.6 ci-dessous.

4.5. Réflexion sur l'interconnexion entre la méthode de Sophus Lie et la méthode d'Élie Cartan. Au sujet de la méthode d'équivalence d'Élie Cartan, je voudrais ajouter quelques remarques. En raison de l'explosion symbolique des calcul, il est absolument nécessaire de *mener de front d'une part l'approche classificatoire* a priori *de S. Lie en termes d'algèbres de Lie de champs de vecteurs et d'autre part l'approche d'Élie Cartan en termes d'invariants différentiels.* En effet, les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont le groupe de symétrie est homogène étant uniquement déterminés par leur groupe (qui peut dépendre de certaines constantes caractéristiques), il est clairement superflu de mener à bien l'algorithme d'Élie cartan pour elles. Il est vrai que l'on peut redécouvrir le groupe de symétries au final de l'application de cet algorithme, mais le travail est d'une complexité formelle au moins dix fois plus élevée, et dans ce domaine, c'est le grossissement des calculs qui constitue l'obstacle principal. Qui plus est, l'approche de S. Lie qui consiste à classifier *a priori* toutes les actions locales de groupes de Lie qui peuvent se réaliser comme groupes de Lie d'un système d'équations aux dérivées partielles est philosophiquement bien supérieure. Mais pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles non homogènes, le nombre de formes normales est infini et l'analyse de la méthode d'équivalence semble indispensable pour obtenir des résultats complets. Le cas limite de systèmes d'équations aux dérivées partielles "complètement rigides" dont le groupe de Lie est de dimension nulle mérite bien sûr d'être étudié en appliquant brutalement l'algorithme d'Élie Cartan, sans avoir égard à son groupe ; en revanche, lorsque le groupe est de dimension positive tout en étant non transitif, il est nécessaire de spécialiser les résultats donnés par l'algorithme dans tous les cas particuliers possibles. Cela fait certes beaucoup de travail. En tout cas, l'application brutale de l'algorithme d'Élie Cartan et le calcul explicite des invariants différentiels sont nécessaires.

4.6. Applications futures de la méthode d'équivalence. Quoique l'on puisse certes douter de la possibilité qu'un être humain puisse faire aboutir les calculs, même aidé de puissants programmes de calcul formel, j'aimerais tenter d'appliquer l'algorithme d'Élie Cartan aux équations différentielles ordinaires d'ordre $\kappa \geq 3$, puis aux systèmes d'équations aux dérivées partielles complètement intégrables d'ordre $\kappa \geq 3$ à n variables indépendantes et une variable dépendante, juste pour le plaisir. Si cela n'est pas raisonnable, je suis au moins certain que les quelques applications suivantes de la méthode d'équivalence pourront aboutir.

- **(1)** Grâce à l'implémentation de l'algorithme d'Élie Cartan achevée par Sylvain Neut, il devrait être possible de reprendre, de préciser et de prolonger l'article de P. Ebenfelt : *Uniformly Levi degenerate CR manifolds; the 5-dimensional case*, Duke Math. J. **110** (2001), no.1, 37–80, qui traite le cas d'hypersurfaces uniformément Levi dégénérées de $\mathbb{C}^3$. Pas plus que S.S. Chern et J.K. Moser, P. Ebenfelt ne peut fournir une expression explicite des invariants différentiels. Il serait donc très intéressant de les obtenir dans ce cas pour compléter la classification des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^3$.
- **(2)** On pourrait faire exactement le même travail avec les hypersurfaces de codimension deux dans $\mathbb{C}^4$ qui ont été largement étudiées par les élèves de A.G. Vitushkin. Notamment, on pourrait reprendre, préciser, prolonger et compléter les résultats de l'article de V.V. Ezhov, A.V. Isaev et G. Schmalz *Invariants of elliptic and hyperbolic CR-structures of codimension 2*, Int. J. Math. **10** (1999), no. 1, 1–52.
- **(3)** Et puis, une fois que l'on aura fait tout cela, on pourra s'amuser à faire la même chose pour des hypersurfaces dans $\mathbb{C}^4$, pour des variétés CR de codimension deux dans $\mathbb{C}^3$, *etc.*.

4.7. Classification des actions locales de groupes de Lie sur un ouvert de $\mathbb{C}^3$. En 1880 (Math. Ann. **16** (1880), 441–528), S. Lie a classifié toutes les actions de groupes de Lie locaux sur un ouvert de $\mathbb{C}$ et aussi sur un ouvert de $\mathbb{C}^2$, la liste de ces dernières comportant environ une trentaine de possibilités. Dans le volume 3 de la *Theorie der transformationsgruppen*, S. Lie écrit qu'il a classifié toutes les algèbres de Lie locales de champs de vecteurs en dimension trois, mais que ces résultats prennent trop de place pour qu'ils puissent être publiés (dans un ouvrage qui fait déjà 2300 pages !). Dans ce même volume, S. Lie fournit au moins la liste des toutes les actions dites *primitives*, c'est-à-dire qui ne préservent aucun feuilletage local, liste qui comporte une quinzaine de possibilités. Mais on peut croire que S. Lie a quasiment abouti dans la classification complète puisqu'il avait mis au point une procédure quasiment algorithmique qui permet de scinder les cas possibles en se ramenant à la dimension inférieure dès que les actions ne sont pas primitives. Une estimation grossière montre que les actions non primitives de groupes de Lie locaux sur un ouvert de $\mathbb{C}^3$ devraient recouvrir environ un millier de possibilités. La complexité prohibitive des calculs pour classifier les algèbres de Lie et les nouvelles directions apportées par la classification des algèbres de Lie complexes semi-simples effectuée par W. Killing et Élie Cartan ont historiquement infléchi les recherches de S. Lie dans des directions qui ont fait progressivement oublier sa motivation très profonde (qu'il n'a cessé de rappeler dans ses textes et dans sa correspondance) pour une classification complète *a priori* des groupes continus de transformation. Dans les années 1900 à 1910, Élie Cartan a ensuite réinterprété les travaux classificatoires de S. Lie en termes de formes différentielles et les a prolongés, toujours en dimension réelle ou complexe égale à deux. Quoique la classification des algèbres de Lie locales de champs de vecteurs en dimension trois n'ait apparemment jamais été ré-étudié depuis, il semblerait que je pourrais m'y attaquer en collaboration avec l'équipe de Michel Petitot grâce à l'outil informatique. C'est un projet très très ambitieux qui a beaucoup de chance de faire découvrir de nombreux “os” en milieu de parcours, c'est un projet qui pourrait demander dix ans de travail, c'est un projet pour se casser les dents, mais qu'est-ce qu'il serait beau de réaliser l'une des idées maîtresses de Sophus Lie !

4.8. Lecture des œuvres de Sophus Lie. L'enjeu de toutes ces directions de recherche est plus sytématique qu'il n'en a l'air. Une partie substantielle des idées de Sophus Lie et de ses élèves ayant été oubliée par la postérité, il me semble nécessaire d'entamer dès à présent une lecture des mémoires dans lesquels sont nées les idées de classification des équations aux dérivées partielles. Je vais commencer à lire les mémoires techniques sur les équations différentielles ordinaires.

4.9. Lecture des œuvres d'Élie Cartan. Le 17 Janvier 2003, j'ai acheté chez Albert Blanchard les œuvres complètes d'Élie Cartan dans l'édition de 1952 avec la ferme intention de musarder dans les parties de cette œuvre qui plongent leurs racines dans les idées de Sophus Lie. Je veux comprendre comment la puissance métaphysique et philosophique de Sophus Lie a irradié et s'est déployée dans l'œuvre d'Élie Cartan.

CNRS, Université de Provence, CMI, LATP, UMR 6632, 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France

E-mail address: merker@cmi.univ-mrs.fr 00 33 / (0)4 91 11 36 72 / (0)4 91 53 99 05