

**RAPPORT D'ACTIVITÉ AU CNRS
(DE JANVIER 2003 À SEPTEMBRE 2004)**

JOËL MERKER

Le 25 septembre 2004

Avertissement. Mis à part la liste des travaux écrits, ce document ne recouvre que la période d'un an et demi qui s'est écoulée entre janvier 2003 et septembre 2004. Un document qui couvre la période de quatre ans 1999–2002 a été transmis au CNRS en janvier 2004 ; il est aussi téléchargeable sur la page internet :

[http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/Rapports/CNRS/
curriculum-cnrs-2003.pdf](http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/Rapports/CNRS/curriculum-cnrs-2003.pdf)

Des renseignements complémentaires sont disponibles sur la page principale [/~merker/index.html](http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/index.html), qui est régulièrement remise à jour.

§1. CURRICULUM VITAE RÉSUMÉ, RESPONSABILITÉS COLLECTIVES
ACTUELLES ET PROJET DE MOBILITÉ

1.1. Curriculum vitae résumé.

1970 : Naissance à Bourg-la-Reine (92, Hauts-de-Seine).

1988 : Baccalauréat série C à Besançon.

1990 : Entrée à l'École Normale Supérieure de Paris, en candidat libre, après deux Deugs (mathématiques et philosophie) suivis en parallèle à Besançon.

1992 : Agrégation de mathématiques.

1994 : Service militaire en tant que *scientifique du contingent* à Autun (Saône-et-Loire) ; agrégation de Philosophie (après une Licence et une Maîtrise à la Sorbonne en 1991 et en 1992).

1995 : Caïman « mathématiques et philosophie » à l'ENS Ulm sur un poste d'ATER, durant deux années.

1996 : Doctorat de l'université de Paris 6 en Mathématiques, sous la direction de Jean-Marie Trépreau, professeur.

1997 : Entrée comme CR2 au CNRS et affectation au LATP, CMI, Université de Provence.

2001 : Accession au grade de CR1 au CNRS.

2004 : Participation à l'Ultra-Trail du Tour du Mont-Blanc : 155km, 8500m de dénivellation positive (et négative) ; tour complet bouclé en 30h35mn de course non-stop.

1.2. Responsabilités collectives actuelles.

- Organisateur, responsable financier et webmestre du *Séminaire d'Analyse et Géométrie*, l'un des trois séminaires de la nouvelle équipe de *Mathématiques Fondamentales* au LATP.

<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/AG/SE/2004/anageom.html>

- Directeur adjoint, secrétaire (rédaction scientifique) et webmestre du GDR 2252 « Analyse et géométrie complexe en plusieurs variables », dirigé par Pascal Thomas.

<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/AC/Rapports/GDR/gdr.html>.

- Co-responsable du séminaire « Gilles Châtelet », IUFM, Besançon.

<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/Philosophie/SE/2005/seminaire-chatelet-2005.html>

- Webmestre¹ de la page internet du *Master Recherche deuxième année en Mathématiques Fondamentales* de l'Université de Provence :

<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/dea/index.html>

- Depuis 1999 : membre titulaire de la commission de spécialistes (Section 25 du CNU) de l'Université de Provence. Vice Président (Collège B) entre juin 2001 et juin 2004.

1.3. Projet de mobilité : mutation sur Paris (automne 2006 ?) Même si les chances de changer de grade au CNRS en mathématiques sont statistiquement peu élevées, je souhaite pour l'instant conserver ma position de chercheur, sans opter pour un poste de professeur dans l'enseignement supérieur. En effet, les travaux qu'il me reste à compléter sont nombreux (*cf.* les paragraphes 7.5 et 8.2 ci-dessous), les projets intéressants se bousculent et les idées affluent ; il serait donc contre-productif pour moi de commencer maintenant une carrière d'enseignement à temps complet², à un âge (34-35 ans) où je vois s'ouvrir et se confirmer une période d'intense activité. La mobilité vers l'enseignement supérieur ne me paraît pas exclue, mais il est encore trop tôt pour y songer.

Cela fait précisément sept années que je suis au LATP à Marseille, le laboratoire d'affectation que j'avais demandé lors de mon recrutement au CNRS le 1^{er} octobre 1997. Je suis très satisfait de cette structure, des échanges intellectuels et des collaborations scientifiques que j'ai pu y engager.

Toutefois, il me semble maintenant que j'ai quelque peu épuisé les possibilités de collaboration au LATP à Marseille. De plus, je ressens un besoin « instinctif » de changer d'université, pour rompre les habitudes et me libérer des « routines »

¹N.B. : Pour me protéger d'une exploitation de mes compétences techniques qui ne présentait pas de contrepartie, j'ai refusé la « proposition » qui m'a été faite à plusieurs reprises de maintenir la page internet de l'équipe de Mathématiques Fondamentales du LATP (environ 35 enseignants-chercheurs), créée récemment en janvier 2004.

² — je totalise quand même environ 70–80 heures d'enseignement (en équivalent TD) par an depuis quatre ans —

de laboratoire, qui prennent trop le pas sur l'ouverture et sur la nouveauté. Enfin, bien que je m'implique le moins possible dans la politique locale de l'UFR MIM et du LATP afin de préserver ma liberté d'esprit et un maximum de temps pour la recherche et pour la rédaction d'articles, il ne me semble pas souhaitable de coexister encore de nombreuses années avec certains professeurs influents pour qui l'activité de recherche n'occupe pas le premier plan.

Par ailleurs, je souhaite toujours ardemment poursuivre mes activités en philosophie des mathématiques. Lorsque j'étais à Paris, je pouvais participer à plusieurs séminaires, échanger fréquemment, être présent à divers colloques. Depuis mon arrivée à Marseille, cette activité a légèrement baissé. L'éloignement géographique du centre parisien, et le trop petit nombre de personnes intéressées par la philosophie des mathématiques au LATP m'ont conduit à me concentrer sur la recherche en mathématiques fondamentales. J'ai consacré presque tout mon temps à élaborer quelques travaux spécialisés d'importance, tels que [10], [11], [14], [15], [18], [19], [21], [26], [27], [A], [B], [C] et [F] ci-dessous

Pendant, en acceptant de me rendre environ cinq fois par an à Paris à mes propres frais, j'ai pu conserver des contacts. En effet, durant ces trois dernières années, j'ai participé régulièrement à un « Séminaire-Groupe de travail » organisé à l'ENS Ulm par Ivahn Smadja, ex-caïman de philosophie nouvellement nommé Maître de Conférences à l'Université de Caen, et Jean-Jacques Szczeciniarz, ex-professeur de philosophie à l'Université de Bordeaux 1 nouvellement muté à Paris 7. Cette année, j'ai pu échanger avec des astronomes (Marc Lachièze-Rey, DR CNRS, par exemple), ainsi qu'avec des historiens des sciences (Michel Paty, DR CNRS, par exemple) lors d'une rencontre à Cargèse en février 2004 et lors d'un colloque à l'Observatoire de Paris en mai 2004. Ces échanges me paraissent très fructueux et sont appelés à se développer. Afin de susciter l'intérêt de ces physiciens, en collaboration avec deux étudiants de Maîtrise, j'ai entrepris de lire le mémoire d'Élie Cartan paru 1922 dans lequel il démontre que le tenseur géométrique qu'Einstein avait introduit en 1917 dans ses équations de la gravitation est essentiellement unique (référence [A] ci-dessous). Après enquête, il semblerait que les relativistes français ne connaissent pas le contenu de ce mémoire difficile, que Hermann Weyl lui-même n'aurait jamais déchiffré ; il faut mentionner qu'Élie Cartan sous-entend trop d'éléments théoriques qu'il a lui-même élaborés pendant toute sa carrière. Dans l'avenir, je souhaite approfondir d'autres thèmes de l'œuvre d'Élie Cartan qui ont des applications en physique théorique.

En définitive, je souhaiterais revenir à Paris pour une période transitoire de une à quatre années, sachant que je pourrais fort bien choisir d'opter pour l'enseignement supérieur en province après cette période ; pour des raisons personnelles, je préfère en effet vivre en province et je n'envisage pas pour le moment que la suite de ma carrière se déroule uniquement à Paris.

Voici cinq arguments principaux pour justifier cette demande de mutation.

- (1) À Paris, les activités en histoire et philosophie des mathématiques sont bien développées et très stimulantes, et j'aimerais, à ce sujet, plus d'échanges oraux que je n'en ai actuellement.

- (2) Lorsque j'étais caïman à l'ENS Ulm, j'étais certainement trop jeune pour jouer le rôle d'« éveilleur de pensée » chez les élèves, alors que maintenant, je me sens tout à fait capable de remplir celui-ci.
- (3) Je souhaiterais initier à la recherche en épistémologie contemporaine de jeunes étudiants de niveau licence ou maîtrise : recherches bibliographiques, initiation à la spéculation scientifique, apprentissage de l'écriture conceptuelle, méthodes d'investigation historique.
- (4) Je souhaiterais créer un Séminaire-Groupe de travail en philosophie des mathématiques, sur certains thèmes des mathématiques contemporaines ; en effet, après quelques années de recherches spécialisées, je m'en sens la force.
- (5) Enfin, j'envisage d'écrire très prochainement une *thèse en philosophie des mathématiques* dont je mûris les thèmes et le contenu depuis près de dix ans.

1.4. Conclusion. En résumé, *je souhaiterais donc revenir à Paris grâce à une mutation CNRS pour une période de un à quatre ans (au plus) à l'automne 2006.* Cela pourrait être (par ordre de préférence) à l'Université de Paris 7, à l'ENS Ulm, à l'Université de Paris 6 ou à l'Université de Paris 11.

1.5. Habilitation en mathématiques. Elle est prévue pour le printemps 2005.

§2. POINTS FORTS DE L'ACTIVITÉ DE RECHERCHE

2.1. Liste de thèmes de recherche actuellement en cours.

- Lecture et méditation des mémoires de Cartan sur les équations de la gravitation d'Einstein et sur les connexions affines, conformes et projectives.
- Histoire et philosophie de la géométrie différentielle ; impact des travaux de Sophus Lie et d'Élie Cartan.
 - Classification des algèbres de Lie réelles et complexes.
 - Approche structurale des systèmes d'équations aux dérivées partielles.
 - Application des méthodes algorithmiques d'algèbre différentielle à l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles.
 - Classification des actions de groupes de Lie locaux agissant localement sur un ouvert de \mathbb{C}^3 .
 - Recherche de procédés de calcul pour mieux maîtriser l'explosion des calculs dans la « méthode d'équivalence » d'Élie Cartan.
 - Éclatements locaux en géométrie analytique et application à l'étude de la géométrie des variétés CR analytiques réelles.
 - Problème variationnel inverse.

§2.2. Collaborations scientifiques en cours. Elles sont au nombre de deux.

Avec **Egmont Porten** : (Humboldt Universität zu Berlin)

- Élimination des singularités de codimension 1 en dimension CR égale à 1.
- Minimalisation des systèmes de champs de vecteurs.

Avec **Stéphane Rigat** : (Université de Provence)

- Étude des techniques de désingularisation et application à la structure des courants résiduels.

§3. EXPOSÉS INVITÉS DANS DES COLLOQUES EN MATHÉMATIQUES ET EN ÉPISTÉMOLOGIE DEPUIS JANVIER 2003

- Conférence internationale *Reelle Methoden der Komplexen Analysis*, organisée par Klas Diederich, Takeo Ohsawa et Edgar Lee Stout à Oberwolfach (Allemagne) du 23 février au 1^{er} mars 2003. Intitulé de l'exposé (1h) : *Symmetries of partial differential equations and CR geometry*.
- Colloque *Philosophie et mathématique*, organisé par Alain Badiou, Ivahn Smadja et Quentin Meillassoux à l'École Normale Supérieure (rue d'Ulm) le 25 mai 2003. Intitulé de l'exposé (1h) : *Métaphysique de l'ouverture mathématique*.
- Conférence internationale *Workshop Komplexen Analysis*, organisée par Judith Brinkschulte à Leipzig (Allemagne) du 2 au 5 juillet 2003. Intitulé de la série de deux exposés d'une heure chacun : *Equivalences of second order completely integrable systems of partial differential equations*.
- Conférence internationale *Cauchy-Riemann analysis and geometry*, organisée par I. Lieb et G. Schmalz au Max-Planck Institut de Bonn, du 22 au 26 septembre 2003. Intitulé de l'exposé (1h) : *Explicit Chern-Moser tensors*.
- Rencontres internationales *Autumn School in Complex Analysis*, organisée par Hervé Gaussier et Kang-Tae Kim au CIRM les deux premières semaines d'octobre 2003. Intitulé de l'exposé : *An explicit differential characterization of the Newtonian free particle system*.
- Rencontres nationales *Mathématique, Physique, Philosophie*, organisées par Marc Lachièze-Rey au Centre International de Physique Théorique à Cargèse (Corse) du 16 au 20 février 2004. Intitulé de l'exposé (1h) : *Équivalences locales entre variétés pseudo-riemanniennes et applications à la relativité générale*.
- Rencontres nationales *Journées Complexes du GDR 2252*, organisées par Karim Kellay et Stéphane Rigat au CIRM du 4 au 6 juin 2004. Intitulé de l'exposé (1h) : *Sur les équations de la gravitation d'Einstein, d'après Élie Cartan*.

§4. EXPOSÉS DANS DES SÉMINAIRES EN FRANCE ET À L'ÉTRANGER

4.1. Exposés invités dans des séminaires extérieurs au laboratoire de rattachement.

- Séminaire d'Analyse, organisé par P. Dolbeault, G. Henkin, H. Skoda et J.-M. Trépreau à l'Université de Paris 6. Intitulé de l'exposé donné le 14 janvier 2003 : *Sur la géométrie locale des systèmes différentiels analytiques complètement intégrables ; application à la géométrie CR*.
- Séminaire d'Analyse Complexe, organisé par A. Zeriahi à l'Université Paul Sabatier de Toulouse. Intitulé de l'exposé donné le 22 mai 2003 : *Variété des solutions d'un système rigide d'équations aux dérivées partielles*.

- Séminaire de Géométrie Complexe, organisé par S. Ivashkovich à l'Université de Lille 1. Intitulé de l'exposé donné le 5 juin 2003 : *Singularités éliminables de codimension 1 en dimension CR égale à 1 et en codimension supérieure ou égale à 2.*

- Séminaire de Philosophie des mathématiques, organisé par Tatiana Roque et Sara Franceschelli au Collège International de Philosophie (Paris). Intitulé de l'exposé donné le 28 novembre 2003 (2h) : *Connexions affines, connexions conformes et connexions projectives, d'après Élie Cartan.*

- Séminaire d'Analyse, organisé par P. Dolbeault, G. Henkin, H. Skoda et J.-M. Trépreau à l'Université de Paris 6. Intitulé de l'exposé donné le 27 janvier 2004 : *Caractérisation géométrique des sous-ensembles analytiques réels ne contenant pas de courbes holomorphes.*

4.2. Exposé donné dans le Séminaire d'Analyse et Géométrie Complexe du LATP à l'Université de Provence.

- *Singularités éliminables de codimension 1 dans des sous-variétés génériques de dimension CR égale à 1* (juin 2003).

4.3. Participation à des séminaires–groupes de travail.

- Participation à un Séminaire–Groupe de travail à l'École Normale Supérieure (rue d'Ulm), organisé par Ivahn Smadja et Jean-Jacques Szczeciniarz et consacré à l'œuvre philosophico-géométrique de Gauss et de Riemann. Plusieurs interventions orales.

- Organisation à Besançon d'un Séminaire–Groupe de travail intitulé Gilles Châtelet, en collaboration avec Philippe Roy, formateur en mathématiques, physique et philosophie à Gray, et Maryvonne Menez-Hallez, Maître de Conférence en mathématiques à Paris 7.

§5. PARTICIPATION À DES COLLOQUES EN TANT QU'AUDITEUR

- Rencontres nationales Journées Complexes du GDR2252, organisées par Chantal Menini et Andreas Hartmann à Carcassonne du 27 au 29 novembre 2003.

- Colloque national Sciences de la nature, organisé par Joseph Kouneiher à l'Observatoire de Paris, fin mai 2004.

§6. ENSEIGNEMENTS DISPENSÉS EN 2003–2004 ET PRÉVUS EN 2004–2005

6.1. Enseignement « magistral ».

- Cours et TD d'histoire et d'épistémologie des mathématiques (second semestre 2004, pour un total de 50h) ; rédaction par les étudiants de 18 mémoires de 30 à 80 pages, sur des sujets distincts.

- Cours de DEA de Tronc commun et de spécialité (premier semestre 2004–2005, pour un total de 37h), en coopération avec El Hassan Youssfi : *théorie de Cartan et problème variationnel inverse.*

- Cours d'histoire et d'épistémologie des mathématiques (second semestre 2005, pour un total de 25h).

6.2. Encadrement de mémoires.

- Travaux d'encadrement et de recherche (TER), Maîtrise de mathématiques pures, Université de Provence, printemps 2004, pour un total de 24h.
 - (i) Olivier Albouy et Rémi Delannoye : *unicité du tenseur d'Einstein, d'après Élie Cartan* ; travail écrit référencé en [A] ci-dessous.
 - (ii) Julien Bernard : *le problème du continu, d'après Cantor, Gödel et Cohen*.
- Stage de première année de l'ENS Lyon, six semaines en Juin-juillet 2004. Nicolas Bovetto : *Classification des algèbres de Lie complexes semi-simples, d'après Wilhelm Killing et Élie Cartan*.

§7. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES (ARTICLES DE MATHÉMATIQUES)

7.1. Articles publiés dans des revues à comité de lecture.

RÉFÉRENCES

- [1] **Joël Merker**, *Global minimality of generic manifolds and holomorphic extendibility of CR functions*, International Math. Research Notices, 1994, no. 4, 329–343.
- [2] **Joël Merker**, *On removable singularities for CR functions in higher codimension*, International Math. Research Notices, 1997, no. 1, 21–56.
- [3] **Joël Merker and Francine Meylan**, *On the Schwarz symmetry principle in a model case*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 4, 1097–1102.
- [4] **Joël Merker et Egmont Porten**, *Enveloppe d'holomorphic locale des variétés CR et élimination des singularités pour les fonctions CR intégrables*, C. R. Acad. Sci. Paris **328** (1999), 853–858.
- [5] **Joël Merker et Egmont Porten**, *On removable singularities for integrable CR functions*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 805–856.
- [6] **Joël Merker et Francine Meylan**, *Extension de germes de difféomorphismes CR pour une classe d'hypersurfaces analytiques réelles non essentiellement finies dans \mathbb{C}^3* , Complex variables Theory Appl. **40** (1999), no. 1, 19–34.
- [7] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Metrically thin singularities of integrable CR functions*, Internat. J. Math. **11** (2000), no. 7, 857–872.
- [8] **Joël Merker**, *Note on double reflection and algebraicity of holomorphic mappings*, Annales Fac. Sci. Toulouse **9** (2001), no. 5, 689–721.
- [9] **Joël Merker**, *Convergence of formal biholomorphisms between minimal holomorphically nondegenerate real analytic hypersurfaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **26** (2001), no. 5, 281–302.
- [10] **Joël Merker**, *On the partial algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets*, Bull. Soc. Math. France **129** (2001), no. 3, 547–591.
- [11] **Joël Merker**, *Étude de l'application de symétrie CR formelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), no. 3, 165–168.
- [12] **Bernard Coupet, Sylvain Damour, Joël Merker et Alexandre Soukhov**, *Sur l'algébricité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **334** (2002), 953–956.

- [13] **Joël Merker and Roman Dwiłewicz**, *Hartogs-Bochner phenomenon and decomposition of CR functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 7, 1975–1980.
- [14] **Joël Merker**, *On envelopes of holomorphy of domains covered by Levi-flat hats and the reflection principle*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 5, 1443–1523.
- [15] **Joël Merker and Egmont Porten**, *On wedge extendability of CR meromorphic functions*, Math. Z. **241** (2002) 485–512.
- [16] **Sylvain Damour et Joël Merker**, *Sur la convergence d'applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), 831–854.
- [17] **Hervé Gaussier and Joël Merker**, *A new example of uniformly Levi degenerate hypersurface in \mathbb{C}^3* , Ark. Mat. **41** (2003), 85–94.
- [18] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Symmetries of partial differential equations*, J. Korean Math. Soc. **40** (2003), no. 3, 517–561.
- [19] **Hervé Gaussier and Joël Merker**, *Nonalgebraizable real analytic tubes in \mathbb{C}^n* , Math. Z. **247** (2004), no. 2, 337–383.
- [20] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Sur l'algébrabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques de \mathbb{C}^n* , C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **336** (2003), 125–128.
- [21] **Joël Merker**, *Étude de la régularité analytique de l'application de réflexion CR formelle*, Annales Fac. Sci. Toulouse, 90 pp, à paraître.
- [22] **Joël Merker**, *Propagation of analyticity for essentially finite C^∞ -smooth CR mappings*, 25 pp, Manuscripta Math. to appear.

7.2. Articles publiés dans des actes de colloque avec comité de lecture à l'occasion d'une conférence.

RÉFÉRENCES

- [23] **Joël Merker et Egmont Porten**, *On the local meromorphic extension of CR meromorphic functions*, Volume spécial consacré aux Actes du Colloque Complex Analysis and Applications, Varsovie, juillet 1997. Ann. Polon. Math. **70** (1998), no. 1, 163–193.
- [24] **Xiaojun Huang, Joël Merker and Francine Meylan**, *Mappings between degenerate real analytic hypersurfaces in \mathbb{C}^n* , actes du colloque Analysis, geometry, number theory : the mathematics of Leon Ehrenpreis (Philadelphia, PA, 1998), 321–338. Contemp. Math., 251, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [25] **Hervé Gaussier et Joël Merker**, *Géométrie des sous-variétés analytiques réelles de \mathbb{C}^n et symétries de Lie des équations aux dérivées partielles*, Colloque annuel de la Société Mathématique de Tunisie, Printemps 2003, Bull. Soc. Math. Tun. à paraître.

7.3. Article de synthèse à paraître.

RÉFÉRENCES

- [26] **Joël Merker**, *On the local geometry of generic submanifolds of \mathbb{C}^n and the analytic reflection principle (Part I)*, Viniti, to appear, 80 pp.

7.4. Travail soumis et en cours de réécriture.

RÉFÉRENCES

- [27] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Characteristic foliations on maximally real submanifolds of \mathbb{C}^n and envelopes of holomorphy*, texte invité (et rémunéré) par Morris Weisfeld pour les *International Mathematics Research Surveys*, 113 pages de Latex, à développer en ajoutant des paragraphes de survol ; Prépublication, LATP, janvier 2004.

7.5. Travaux mathématiques en préparation active.

RÉFÉRENCES

- [A] **Olivier Albouy, Rémi Delannooye et Joël Merker**, *Sur les équations de la gravitation d'Einstein (d'après Élie Cartan)*, 104 pp de Latex déjà rédigées. Il y a encore 15 (sur 63) pages du mémoire (jugé obscur par H. Weyl) d'Élie Cartan que je ne comprends pas.
- [B] **Joël Merker**, *Symmetries of completely integrable systems of analytic partial differential equations*, in preparation ; 40 pp. of Latex already written.
- [C] **Joël Merker**, *An explicit differential characterization of the Newtonian free particle system in $m \geq 2$ dependent variables*, 40 pp of Latex already written.
- [D] **Joël Merker**, *Reflection principle with algebraic target*, in project.
- [E] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Survey on holomorphic extension of CR functions and removable singularities*, in project.
- [F] **Joël Merker**, *Explicit Hachtroudi-Chern tensors and a characterization of local sphericity*, in project ; 120 pages of hand manuscript.
- [G] **Joël Merker**, *Two geometric characterizations of real analytic subsets of \mathbb{C}^n containing no complex curves*, in project.

7.6. Classement des travaux publiés, soumis ou en préparation selon leur ordre d'importance (difficulté des problèmes résolus, apport au domaine de recherche et impact des travaux).

L'idée d'inviter chaque chercheur à établir lui-même le classement de ses travaux selon leur ordre d'importance m'agrée pleinement. En effet, par manque de connaissance précise des innombrables domaines de recherche scientifique, les rapporteurs sont trop souvent contraints — malgré leur volonté — de n'évaluer un dossier scientifique qu'en fonction de la renommée des revues spécialisées qui sont référencées dans une liste de publications. Une telle méthode a du sens, eu égard à la complexité croissante des dossiers scientifiques, mais elle a ses limites, étant donné qu'une proportion non négligeable d'articles de jeunes chercheurs parus dans des revues prestigieuses ou très établies l'ont été grâce à la tutelle bienveillante de leaders de la communauté scientifique à laquelle ils appartiennent. Les chercheurs très indépendants qui, eux, ne bénéficient pas du soutien de puissants aînés, publient leurs travaux dans des revues correctes, mais moins prestigieuses, et ils apprennent à attendre patiemment — une et même deux décennies parfois — le moment où quelques-uns de leurs travaux seront publiés dans des journaux très prisés sur la scène internationale.

Les trois thèmes de recherche principaux en mathématiques auxquels j'ai contribué dans mes textes écrits sont les suivants :

- (1) méthode des disques analytiques, enveloppes d'holomorphic locales et élimination des singularités ([1], [2], [4], [5], [7], [13], [15], [23], [27], [E]) ;
- (2) régularité analytique ou algébrique d'applications CR lisses ou formelles ([3], [6], [8], [9], [10], [11], [12], [14], [16], [21], [22], [24], [26], [D], [G]) ;
- (3) symétries de Lie des équations aux dérivées partielles, systèmes différentiels extérieurs et relativité générale ([17], [18], [19], [20], [25], [A], [B], [C], [F]).

Ces trois thèmes étant par nature relativement étrangers les uns aux autres, il est impossible d'établir une hiérarchie commune. Je propose donc de classer les articles en trois « grades » pour chacun des trois thèmes, ce qui donne neuf groupes. Pour déterminer le groupe auquel chaque article appartient, mon évaluation s'effectue prioritairement en fonction de la difficulté du problème principal qu'il résout ; je place un article au premier grade si le problème principal est difficile et s'il est résolu complètement ; si la résolution complète du problème principal ne présente pas de réelle difficulté et si le travail présente un degré d'achèvement formel satisfaisant, je place l'article en question au deuxième grade ; si le problème principal n'est pas résolu, je le place au troisième et dernier grade ; enfin, dans chaque groupe, je classe les articles dans l'ordre de préférence personnelle en les accompagnant d'un bref commentaire appréciatif.

Premier grade

- (1) :
- [27] : résolution par localisation d'un problème très difficile que B. Jöricke avait toujours cru relever nécessairement de techniques globales et que j'ai longtemps estimé hors de ma portée.
 - [15] : élimination des singularités de codimension $2 + 0$ en classe $\mathcal{C}^{2, \alpha}$, problème sur lequel Egmont Porten et moi-même avons beaucoup « séché », et que nous avons résolu en associant des techniques locales de disques analytiques (Trépreau-Tumanov) à des techniques globales (Forstnerič-Globevnik).
 - [2] : mon second travail de thèse, où j'ai reconstitué puis généralisé en codimension supérieure trois théorèmes valables pour des hypersurfaces qui avaient été annoncés aux CRAS en 1992 par B. Jöricke, sans aucune indication de démonstration.
- (2) :
- [11] : annonce aux CRAS d'un résultat très difficile et définitif sur la convergence d'applications CR formelles, posté en mai 2000 sur le site [arXiv.org/abs/math.CV/0005290](https://arxiv.org/abs/math.CV/0005290) avec une démonstration complète, accessible aux spécialistes. Le procédé nouveau (découverte de deux paires inéquivalentes d'identités de réflexion conjuguées) a été intégré puis immédiatement appliqué pour offrir les généralisations intéressantes par Baouendi-Mir-Rothschild dans un article publié au *J. Geom. Anal.* en 2002 (qui omet de faire une référence bibliographique à cette Note aux CRAS).
 - [14] : problème qui transcende les techniques introduites par Baouendi-Jacobowitz-Treves ou Diederich-Fornæss et solution à une conjecture « folklorique » vieille de dix-sept ans ; c'est un article qui marie la technique des disques analytiques avec le principe de réflexion de Schwarz en plusieurs variables complexes.
 - [21] : développement et raffinement de l'annonce [11] qui était accompagnée d'une prépublication de 13 pages, postée sur le site [arXiv](https://arxiv.org/) en mai 2000 ; j'ai attendu patiemment pendant quatre ans avant de me décider à soumettre à nouveau ce travail (rejeté par *Inventiones* en octobre

2000) en le raffinant encore plus qu'il n'avait été raffiné par Baouendi-Mir-Rotschild.

- [G] : caractérisation entièrement nouvelle constructive et géométrique du *type de D'Angelo fini*, en termes du théorème de Cartan-Kähler ou en termes d'une application de Gauss à valeurs dans les grassmanniennes.
- (3) :
- [F] : après trente années d'existence d'un article fondateur par Chern-Moser paru à Acta Math. en 1974, aucun spécialiste n'est parvenu à calculer explicitement les tenseurs de Hachtroudi-Chern en dimension quelconque $n \geq 2$. Pour $n = 2$, le programme de 4000 lignes de code élaboré au LIFL (Lille 1) par Neut et Petitot, professionnels du calcul formel, aboutit, mais il stagne pour $n = 3$, à cause de la taille des calculs. Je suis très satisfait d'être parvenu à le faire à la main dans le cas $n \geq 2$ quelconque au cours de l'été 2003, mais il me faudra encore beaucoup de temps pour taper tout cela en Latex !
 - [19] : premier article où il est démontré complètement que le groupe des automorphismes holomorphes locaux d'une sous-variété analytique ou algébrique réelle générique minimale et finiment non-dégénérée est un groupe de Lie local analytique ou algébrique de dimension finie ; critères élémentaires pour la non-algébrisabilité locale de tubes rigides.
 - [C] : solution complète d'un problème ouvert chez les physiciens théoriciens, via des calculs formels manuels interminables, qui requièrent une patience à toute épreuve et une endurance extrême.
 - [18] : problème de combinatoire différentielle très délicat, à cause de la taille des expressions formelles.

Deuxième grade

- (1) :
- [1] : solution de la conjecture de Trépreau (1990) : grâce aux travaux de Tumanov parus entre-temps, le travail a été relativement facile pour moi, alors que la question était très fine et très difficile à l'origine.
 - [5] : première collaboration avec Egmont Porten ; les résultats sont définitifs, mais ils constituent une généralisation aisée de mes premiers résultats dans [2].
 - [E] : réécriture et simplification de théorèmes déjà publiés ; je place ce travail ici, car je trouve la simplification du théorème d'extension locale de Tumanov qu'Egmont Porten a trouvée et que nous prévoyons de rédiger ensemble, très élégante et très satisfaisante : elle permet en effet de traiter sur un même plan la minimalité locale et la minimalité globale, sans avoir à contrôler les variations de direction d'extension du prolongement CR. Nous divisons ainsi par trois la complexité de la preuve du théorème principal de mon premier article [1].
 - [7] : élimination des singularités de codimension $2+0$ pour les fonctions intégrables en classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$; cet article est couvert par [15].

- (2) :
- [10] : c'est un article de synthèse qui tuait définitivement le sujet, mais un article sur lequel je n'ai pas du tout « séché ». Ce travail est bien structuré.
 - [26] : première référence complète et élémentaire sur les chaînes de Segre et les jets des variétés de Segre.
 - [9] : préliminaire à [11] et à [21], valable dans le cas hypersurface ; la technique introduite se généralisait facilement à la codimension arbitraire, mais je ne m'en suis pas rendu compte sur le coup ; dans cet article, prépublié en septembre 1999 au LATP, les deux paires (nouvelles et cruciales pour [11] et [21]) d'identités de réflexion conjuguées sont clairement exprimées.
- (3) :
- [A] : lecture et réécriture extrêmement difficile du mémoire éponyme publié en 1922 par Élie Cartan.
 - [B] : transfert « facile » de la théorie des chaînes de Segre aux systèmes complètement intégrables d'équations aux dérivées partielles dont le groupe de symétries de Lie est de dimension finie.

Troisième grade

- (1) :
- [23] : élimination des singularités de codimension de Hausdorff $2 + 0$; le problème principal est résolu seulement dans le cas analytique réel.
 - [4] : annonce de [5] aux CRAS.
 - [13] : collaboration de circonstance avec Roman Dwilewicz, qui s'était « invité » à Marseille en 1997.
- (2) :
- [22] : article que j'ai écrit pour clarifier la situation, au sujet d'un « travail » effectué en 2001 par Meylan-Mir-Zaitsev : ces « auteurs » avaient emprunté « librement » la partie la plus technique de la thèse de Sylvain Damour (que j'ai co-dirigée) sur la déformation des wedges attachés, notion que j'avais mise au point dans ma thèse en 1996 ; pour cette affaire (comme pour [11] et [21]), j'aurai aussi fait preuve d'une grande patience.
 - [D] : projet de synthèse élégante de tous les théorèmes « faciles » publiés par divers auteurs sur le principe de réflexion en supposant la variété image algébrique. Travail de synthèse « accessible », mais coûteux en volume : entre 60 et 80 pages prévues.
 - [16] : c'est un article qui ne résout pas complètement une question difficile ; je ne suis pas encore parvenu à résoudre cette question (mes concurrents non plus, d'ailleurs).
 - [6] : tentative (sur une classe d'exemples précis) d'appliquer les techniques de Baouendi-Jacobowitz-Treves pour résoudre un problème qui, en vérité, les transcende largement et que j'ai résolu complètement dans [14].

- [8] : liste de 24 théorèmes inéquivalents entre eux que recouvrait le théorème principal d'un article faux (mais déjà accepté à Acta Math.) de Zaitsev ; la prépublication de [8] sur `arXiv.com` a permis à Zaitsev de corriger son article (référé par Baouendi-Rothschild), sans que Sylvain Damour et moi-même soyons remerciés pour notre vigilance dans la version définitive, corrigée et publiée à Acta Math.
 - [3] : résultat et technique valable dans le cas rigide polynomial (très restrictif), largement couvert par [14].
 - [12] : note aux CRAS que nous avons écrite pour protéger Sylvain Damour d'une seconde « inspiration » par Meylan-Mir-Zaitsev.
 - [24] : deux hypothèses ad hoc ; le résultat définitif est loin d'être en vue.
- (3) :
- [17] : le calcul de symétrie est juste, mais la conséquence tirée est fausse ... car elle repose sur un article d'Ebenfelt paru en 2001 à Duke dont les équations de structure principales sont ... entièrement fausses (remarque due à K Oeljeklaus et à W. Kaup). Je programme de corriger les calculs d'Ebenfelt prochainement.
 - [20] : annonce de [19].
 - [25] : résumé de [17], [18] et [19].

7.7. Liste des références de travaux prépubliés électroniquement.

Après chaque référence internet, on trouvera le ou les articles correspondants, publiés ou prépubliés.

1. `arXiv.org/abs/math.CV/9901010`; [26].
2. `arXiv.org/abs/math.CV/9901027`; [9], [21].
3. `arXiv.org/abs/math.CV/9902038`; [25].
4. `arXiv.org/abs/math.CV/9902039`; [4].
5. `arXiv.org/abs/math.CV/9902040`; [5].
6. `arXiv.org/abs/math.CV/9905024`; [21].
7. `arXiv.org/abs/math.CV/9906056`; [7].
8. `arXiv.org/abs/math.CV/9906057`; [10].
9. `arXiv.org/abs/math.CV/0005290`; [11], [21].
10. `arXiv.org/abs/math.CV/0006178`; [15].
11. `arXiv.org/abs/math.CV/0012222`; [9].
12. `arXiv.org/abs/math.CV/0012223`; [14].

Pour préserver la confidentialité des recherches en cours (à cause de pillages systématiques), arrêt de ces messages d'annonce à partir de janvier 2001 jusqu'au printemps 2004. Après une période de silence électronique qui s'est accompagnée d'un essoufflement de la production de certains concurrents, reprise des envois sur le site `arXiv.org`.

13. `arXiv.org/abs/math.CV/0401142`; [27].
14. `arXiv.org/abs/math.CV/0403275`; [20].
15. `arXiv.org/abs/math.CV/0403384`; [13].
16. `arXiv.org/abs/math.CV/0403539`; [14].

- 17. [arXiv.org/abs/math.CV/0404127](https://arxiv.org/abs/math.CV/0404127); [22].
- 18. [arXiv.org/abs/math.CV/0404246](https://arxiv.org/abs/math.CV/0404246); [18].
- 19. [arXiv.org/abs/math.CV/0404248](https://arxiv.org/abs/math.CV/0404248); [21].
- 20. [arXiv.org/abs/math.CV/0404249](https://arxiv.org/abs/math.CV/0404249); [26].
- 21. [arXiv.org/abs/math.CV/0404250](https://arxiv.org/abs/math.CV/0404250); [19].

§8. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

(ARTICLES DE VULGARISATION ET DE PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES)

8.1. Articles publiés dans des revues à comité de lecture, articles de colloque et textes de séminaires.

RÉFÉRENCES

- [1] **Joël Merker**, *L'ontologie explicite des théorèmes d'existence en mathématiques*, Séminaire de Philosophie et Mathématiques (Maurice Loi, Pierre Cartier), Paris, ENS Ulm, novembre 1996, 66 pp.
- [2] **Joël Merker**, *La satisfaction mathématique*, texte écrit pour le Colloque Mathématiques et Inconscient, Paris, ENS Ulm, juin 1997, 28 pp.
- [3] **Joël Merker**, *Penrose ou l'apothéose du platonisme*, Revue de l'HPMP (1998), 21–26.
- [4] **Joël Merker**, *Article Analyse Complexe*, Encyclopédie d'Histoire et de Philosophie des Sciences, sous la direction de Dominique Lecourt, Presses Universitaires de France, 1999, 42–48.
- [5] **Joël Merker**, *Deux infinis cousus main*, Revue de Synthèse, Numéro spécial Pensée des Sciences, (1999), 163–172.
- [6] **Joël Merker**, *L'Obscur mathématique ou l'Ouvert mathématique*, Communication au colloque Le réel en mathématiques, Cerisy (Normandie), du 3 au 7 septembre 1999; Agalma Éditeur, Diffusion Le Seuil, Paris, 2004, pp. 65–91.
- [7] **Joël Merker**, *L'île mathématique*, Revue Études, octobre 2001 et novembre 2001 (publié en deux parties), **395**, no. 4, 341–351 et **395**, no. 5, 493–504.
- [8] **Joël Merker**, *Hommage à Gilles Châtelet*, Prépublication LATP, no. 7, 2001, 82 pp.
- [9] **Joël Merker**, *Itération et fractales dynamiques*, Communication au colloque Épistémologie des systèmes dynamiques, Paris, École Supérieure de Chimie, novembre 1999. Éditions du CNRS, à paraître, 15 pp.

8.2. Travaux en préparation.

RÉFÉRENCES

- [A] **Joël Merker**, *Commentaire philosophique et mathématique du theorema egregium de Gauss*, 50 pp déjà rédigées.
- [B] **Joël Merker**, *Métaphysique de l'ouverture mathématique*, projet de thèse de philosophie des mathématiques, en gestation, 20 pp de résumé déjà rédigées.

§9. ÉLABORATION DE RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET DE PROJETS (DEPUIS 2002)

- Printemps 2002 : co-rédaction du projet de GDR Analyse et géométrie complexe en plusieurs variables, dirigé par Pascal Thomas de l'Université Paul Sabatier à Toulouse.

<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/>

[AC/Rapports/GDR/gdr.html](http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/AC/Rapports/GDR/gdr.html)

- Rédaction et mise à jour du rapport de l'Équipe d'Analyse et Géométrie Complexe (absorbée dans l'Équipe de Mathématiques Fondamentales depuis janvier 2004) pour la demande de renouvellement du Contrat Quadriennal (UMR 6632) du Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités, en juin 2002 et en novembre 2003.

<http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/>

[AC/Rapports/Quadriennal/2002/quadriennal-2002.html](http://www.cmi.univ-mrs.fr/~merker/AC/Rapports/Quadriennal/2002/quadriennal-2002.html)

- Rédaction d'un projet d'ACI Nouvelles Interfaces des mathématiques, soumis au ministère en mai 2003. Le projet n'a pas été retenu parmi les 20 sur 150 qui ont été sélectionnés.

§10. SÉLECTION DE RÉSULTATS EN COURSE DE MONTAGNE (2003–2004)

10.1. Année 2003.

- Le Grand Balcon, 17 mai 2003, 52 km, 1800 m de dénivellation positive, 9^{ième} sur 200.
- Chamonix-Courmayeur, 28 août 2003, 70 km, 4100 m de dénivellation positive, 24^{ième} sur 240.
- La Grande Course des Templiers, 24 octobre 2003, 65km, 2900m de dénivellation positive, Nant (12), 65^{ième} sur 1800.

10.2. Année 2004.

- L'ardéchois, 1^{er} mai 2004, 57km, 2500m de dénivellation positive, 18^{ième} sur 230 arrivants.
- La course pédestre la plus longue et la plus difficile d'Europe : Ultra-Trail Tour du Mont-Blanc, du 27 au 29 août 2004, **155km, 8500m** de dénivellation positive, 3 pays traversés ; 51^{ième} sur 1570 en 30h35mn ; 420 arrivants sur la course complète.

**OBJECTIFS POUR LES QUATRE PROCHAINES ANNÉES ;
RÉSUMÉ DES TRAVAUX MATHÉMATIQUES
ÉCRITS ENTRE JANVIER 2003 ET SEPTEMBRE 2004**

JOËL MERKER

Le 25 septembre 2004

Table des matières

11. Objectifs universitaires et pédagogiques pour les quatre prochaines années	11.
12. Objectifs en recherche mathématique pour les quatre prochaines années	12.
13. Présentation des travaux en mathématiques fondamentales	13.

§11. OBJECTIFS UNIVERSITAIRES ET PÉDAGOGIQUES POUR LES QUATRE
PROCHAINES ANNÉES

11.1. Objectifs universitaires.

- (1) Habilitation en mathématiques : printemps 2005.
- (2) Thèse en philosophie des mathématiques : hiver 2005–2006.

11.2. Objectifs de formation à la recherche.

- (1) Créer un site web du GDR pour faciliter la circulation des informations auprès des étudiants auxquels sont principalement destinés les fonds du GDR. Inventer des nouvelles formes d'actions ciblées pour favoriser l'épanouissement scientifique des doctorants et jeunes post-doctorants.
- (2) Encadrer des étudiants en thèse. Créer des cours optionnels de réflexion sur l'écriture de mémoires qui seraient destinés aux élèves de niveau Master.
- (3) Encadrer des mémoires de Master Recherche Mathématique, en première ou en deuxième année.
- (4) Encadrer des stages pour les élèves de première ou de deuxième année de l'ENS Lyon.

§12. OBJECTIFS EN RECHERCHE MATHÉMATIQUE

12.1. Méthode : recherche et écriture. Ma méthode consiste à travailler en parallèle sur plusieurs sujets à la fois, en forçant chacun de mes textes inachevés à des périodes de décantation et de maturation. Par intermittence, je mets l'accent très intensément sur un projet d'article, écrivant sans relâche à la main sur des brouillons élaborés, qui conserveront la trace de tous les questionnements et de toutes les hésitations. Par exemple, pendant les quatre mois de travail que j'ai consacrés à [F] et à [C] (environ 500 pages manuscrites, écrites en quatre couleurs codées), les fins de journée où un nouvel obstacle aurait pu me décourager définitivement ont toujours été transcendées par le début de la matinée suivante, la volonté, le courage et l'enthousiasme reprenant le dessus.

Lorsque les questions que je me suis fixées en commençant un brouillon amélioré sont complètement résolues, je fais relier le manuscrit, afin de conserver une trace complète de tous les raisonnements et de tous les calculs intermédiaires qui ne seront pas tapés en Latex ; en effet, conserver cette trace m'évitera d'avoir à refaire les calculs que j'aurai à re-vérifier pour la publication finale. Pendant la recherche sur brouillon amélioré, ou bien à la fin de la recherche, je commence aussi à taper un texte en Latex. Ce texte sera volontairement abandonné dans un état d'inachèvement — en quelque sorte en jachère — et je travaille sur un autre sujet. C'est le cas pour [A], [B], [C] et [F]. Les fichiers Latex de [D], [E] et [G] ne sont pas encore vraiment commencés.

12.2. Objectifs immédiats classés par ordre de priorité.

- (1) Achever le projet de publication [27] (invité par Morris Weisfeld et rémunéré) pour publication aux *International Research Mathematics Notices*, en lui ajoutant environ 50 à 80 pages de matériel de survol et en le réorganisant complètement. Si possible, entreprendre une première rédaction de [E], déjà bien débroussaillé sur manuscrit.
- (2) Achever d'écrire en Latex les vingt pages de calcul formel manquantes dans le projet de publication [C].
- (3) Écrire l'introduction de [B] et achever d'écrire en Latex les quinze pages manquantes.
- (4) Achever le texte [A], en déchiffrant tout ce qu'Élie Cartan a écrit dans son mémoire de 1922.
- (5) Achever les calculs manuels de [F].
- (6) Achever [G].
- (7) Corriger les calculs (faux, ainsi que les conséquences fausses qui en sont tirées) de l'article *Uniformly Levi degenerate CR manifolds ; the 5-dimensional case* publié au *Duke Mathematical Journal* en 2001 par Ebenfelt.
- (8) Achever [E].

12.3. Objectifs à long terme (par ordre de difficulté).

- (1) Lire couramment dans le texte les *Œuvres complètes* d'Élie Cartan.
- (2) Devenir le spécialiste français des systèmes différentiels extérieurs et de la méthode d'équivalence d'Élie Cartan.

- (3) Classifier toutes les hypersurfaces analytiques réelles locales de \mathbb{C}^3 à biholomorphisme près.
- (4) Implémenter des algorithmes de calcul formel sur Maple en m'inspirant des astuces et des courts-circuits de calcul manuel que j'ai inventés.
- (5) Énoncer une condition nécessaire et suffisante *générale* pour l'algébrabilité locale des sous-variétés analytiques réelles de \mathbb{C}^n .

12.4. Directions de recherche séduisantes.

- (1) Appliquer la théorie des éclatements locaux développée par O. Zariski et H. Hironaka à l'étude fine de la régularité des applications CR, idée qui n'a jamais été développée.
- (2) Appliquer une bonne connaissance interne de la désingularisation à l'étude des propriétés structurales des courants résiduels. À ma connaissance, tous les analystes complexes ayant travaillé sur les courants résiduels appliquent le théorème de désingularisation comme une « boîte noire ».
- (3) Travailler sur le problème de la couronne. Une bonne intuition de la géométrie locale des bords strictement pseudoconvexes pourrait peut-être permettre de trouver la bonne généralisation en dimension supérieure des calculs compliqués effectués en dimension complexe égale à 1.
- (4) Se déplacer vers les mathématiques appliquées, notamment pour faire la synthèse entre les méthodes d'analyse numérique et la théorie de Lie des symétries des équations aux dérivées partielles.

§13. PRÉSENTATION DES TRAVAUX EN MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES ENTREPRISES ENTRE JANVIER 2003 ET SEPTEMBRE 2004

13.1. Introduction. Voici la liste — extraite de la Section 7 ci-dessus — des dix travaux achevés ou inachevés que j'ai entrepris entre janvier 2003 et septembre 2004. Évidemment, ceux qui sont publiés en 2004 mais qui ont été achevés avant le 1^{er} janvier 2004 — tels que par exemple [19] — ne sont pas pris en compte (excepté [26] qui précède [21]).

RÉFÉRENCES

- [21] **Joël Merker**, *Étude de la régularité analytique de l'application de réflexion CR formelle*, Annales Fac. Sci. Toulouse, 90 pp, à paraître.
- [22] **Joël Merker**, *Propagation of analyticity for essentially finite C^∞ -smooth CR mappings*, 25 pp, Manuscripta Math. to appear.
- [27] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Characteristic foliations on maximally real submanifolds of \mathbb{C}^n and envelopes of holomorphy*, texte invité (et rémunéré) par Morris Weisfeld pour les *International Mathematics Research Surveys*, 113 pages de Latex, à développer en ajoutant des paragraphes de survol ; Prépublication, LATP, janvier 2004.
- [A] **Olivier Albouy, Rémi Delannoye et Joël Merker**, *Sur les équations de la gravitation d'Einstein (d'après Élie Cartan)*, 104 pp déjà rédigées. Il y a encore 15 (sur 63) pages du mémoire (jugé obscur par H. Weyl) d'Élie Cartan que je ne comprends pas.
- [B] **Joël Merker**, *Symmetries of completely integrable systems of analytic partial differential equations*, in preparation ; 40 pp. already written.

- [C] **Joël Merker**, *An explicit differential characterization of the Newtonian free particle system in $m \geq 2$ dependent variables*, 40 pp already written.
- [D] **Joël Merker**, *Reflection principle with algebraic target*, in project.
- [E] **Joël Merker and Egmont Porten**, *Survey on holomorphic extension of CR functions and removable singularities*, in project.
- [F] **Joël Merker**, *Explicit Hachtroudi-Chern tensors and a characterization of local sphericity*, in project ; 120 pages of hand manuscript.
- [G] **Joël Merker**, *Two geometric characterization of real analytic subsets of \mathbb{C}^n containing no complex curves*, in project.

Je rappelle mon appréciation personnelle du §7.6 :

Grade 1 : [21], [27], [F], [C], [G].

Grade 2 : [A], [E], [B].

Grade 3 : [22], [D].

Pour simplifier, je propose d'exposer de manière détaillée (et si possible accessible) les résultats principaux des cinq travaux [21], [27], [C], [G], [22] et [A], avant de résumer très rapidement le contenu essentiel de [F], [E], [B], [D]. Pour que ces descriptions soient bien saisies, je m'inspire librement des introductions de ces textes, lorsqu'elles ont un caractère achevé, comme c'est le cas pour [21], [27], [C], [22] et [A]. Enfin, pour que ce rapport d'activité qui m'aura coûté une dizaine de jours de rédaction (corrections comprises) n'empiète pas au-delà sur mon temps de recherche, je m'autorise à décrire les travaux [27], [C], [G] et [22] en langue anglaise. Les descriptions des travaux [21], [27], [C], [G], [22], [A] et [E] seront toutes suivies d'une bibliographie spécialisée.

[21] : Étude de la régularité analytique de l'application de réflexion CR formelle. Une version non raffinée du théorème principal démontré dans ce travail de synthèse a été annoncée dans [11]. Je survole aussi une partie des résultats du mémoire fondamental [26] (arXiv.org/abs/math.CV/04044249), achevé fin octobre 2002, et dont je ne parle aucunement dans le précédent rapport CNRS envoyé au début de l'année 2003. On vérifiera que les deux mémoires [26] et [21] se complètent comme se complèteraient la première et la seconde partie d'un livre virtuel exposant des résultats plus fins que ceux qui sont rédigés dans la monographie [BER1999a], publiée à *Princeton University Press*.

a. Introduction. La recherche de formes normales³ pour les sous-variétés analytiques réelles de \mathbb{C}^n soulève la question de la convergence des normalisations formelles. En 1983, J.K. Moser et M.W. Webster ont donné des exemples de surfaces analytiques réelles dans \mathbb{C}^2 à tangente complexe isolée et hyperbolique au sens de E. Bishop, qui sont formellement mais non holomorphiquement normalisables (à cause d'un phénomène de petits diviseurs), même lorsque la forme normale est elle-même analytique ou algébrique. En revanche, il apparaît qu'un tel phénomène ne se produit pas pour les sous-variétés dont la dimension CR est localement constante, d'après des résultats récents dus à S.M. Baouendi, P. Ebenfelt et L.-P. Rothschild, et qui sont énoncés avec des hypothèses de non-dégénérescence relativement simples, mais satisfaites en un point Zariski-générique⁴. Ces auteurs

établissent notamment que toute application CR formelle inversible entre deux sous-variétés de \mathbb{C}^n génériques, analytiques réelles, finiment non-dégénérées et minimales (au sens de J.-M. Trépreau et A.E. Tumanov) est convergente.

Dans cet article [21] qui m'a été commandé par un éditeur des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, je démontre un théorème de convergence fin et plus général, valable sans aucune hypothèse de non-dégénérescence, et qui confirme la rigidité de la catégorie CR. Ce résultat s'interprète alors comme un principe de symétrie de Schwarz formel pour les applications CR. J'en déduis que toute équivalence CR formelle entre deux sous-variétés de \mathbb{C}^n génériques, analytiques réelles et minimales est convergente si et seulement si les deux sous-variétés sont holomorphiquement non-dégénérées (au sens de N. Stanton). Enfin, j'établis que deux sous-variétés de \mathbb{C}^n génériques, analytiques réelles et minimales sont formellement CR équivalentes si et seulement si elles sont biholomorphiquement équivalentes.

b. Bref historique. L'étude de la régularité des applications CR formelles est une variation du principe dit «de réflexion», historiquement initié dans le cas d'applications de classe \mathcal{C}^1 entre hypersurfaces strictement pseudoconvexes par S. Pinchuk dans [Pi1975] et plus tard, mais indépendamment, par H. Lewy dans [Le1977]. Le paragraphe de [CM1974] consacré à la convergence des formes normales formelles de J.K. Moser contient une démonstration implicite du fait que toute équivalence CR formelle entre hypersurfaces de \mathbb{C}^n analytiques réelles et Levi non-dégénérées est convergente. Dans le premier article [BER1997] consacré à la paramétrisation des applications CR par un jet d'ordre fini en un point ainsi qu'à la régularité des applications CR formelles, S.M. Baouendi, P. Ebenfelt et L.-P. Rothschild démontrent que toute application CR formelle entre deux hypersurfaces de \mathbb{C}^n analytiques réelles et finiment non-dégénérées est convergente. Ce résultat répondait à une question soulevée par F. Trèves ; la non-dégénérescence finie généralise la Levi non-dégénérescence par passage aux dérivées d'ordre supérieur. Peu de temps après, ces énoncés furent transférés à la codimension quelconque par les mêmes auteurs dans [BER1998], en supposant la sous-variété M minimale à l'origine (au sens de J.-M. Trépreau et A.E. Tumanov). La preuve est basée sur les itérations de sous-variétés de Segre, appelées «ensembles de Segre» dans l'article [BER1996], suite de [BR1995].

c. Méthodes algébriques. Par ailleurs, l'approche «degré de transcendance» initiée par Y. Pushnikov (élève de S. Pinchuk) et développée par A. Sukhov (en collaboration avec d'autres auteurs) et par moi-même a conduit à une série de travaux récents : [CPS2000], [10], [Da2001], [CDMS2002], [MMZ2002], [MMZ2003], tous basés sur le même procédé algébrique d'élimination. En effet, il a été rapidement remarqué que le schéma de démonstration qui était valide lorsque les deux

³Voir les travaux fondateurs de S.-S. Chern, J.K. Moser [CM1974] et de J.K. Moser, S.M. Webster [MW1983] ainsi que les articles plus récents de S.M. Webster [We1992], de X. Huang, S.G. Krantz [HK1995], de X. Gong [Go1996] et de P. Ebenfelt [Eb1998].

⁴Voir [BER1997], [Za1997], [BER1999a], [BER1999b], [BRZ2001].

variétés CR sont algébriques s'étendait, sans obstacle majeur et modulo quelques variations mineures, à la situation (légèrement plus générale) où la sous-variété image M' est supposée algébrique réelle, tandis que la sous-variété source M est supposée analytique réelle.

Conjecturalement, on s'attend à ce que presque tous les principes de réflexion connus soient valides dans le cas où M et M' sont *toutes deux analytiques réelles*. Malheureusement, la finitude intrinsèque au concept d'algébricité, qui est fortement utilisée dans ces travaux, fait défaut dans le cas général où M' est analytique réelle. On peut alors se demander si une sous-variété analytique réelle peut être rendue algébrique dans un système de coordonnées locales adéquat.

d. Non-algébricité locale générique au sens de Baire. Récemment, dans un travail cosigné par H. Gaussier, l'auteur a établi dans [19] que la plupart (au sens de R. Baire), des sous-variétés de \mathbb{C}^n minimales et finiment non-dégénérées dont le groupe d'automorphismes holomorphes locaux est commutatif et de dimension n , ne peuvent être rendues algébriques dans aucun système de coordonnées holomorphes locales, quelle que soit la transcendance relative du changement de coordonnées. On dira que de telles sous-variétés ne sont pas localement *algébrisables*. Par le biais d'arguments heuristiques qui extrapoleraient les théorèmes spécifiques de [19], on pourrait se convaincre que dans toute classe de sous-variétés analytiques réelles génériques locales non homogènes dont le groupe d'automorphismes holomorphes possède une structure fixée, la plupart d'entre elles ne sont pas localement algébrisables. Quant aux sous-variétés homogènes, le fait qu'elles soient localement algébrisables doit se discuter au cas par cas ; cette caractéristique ne dépend en effet que de la nature de leur groupe transitif de transformation, lequel permet bien entendu de les reconstruire sans ambiguïté comme l'orbite d'un point donné, du reste quelconque.

Un tel phénomène général de «non-algébricité» locale générique (au sens de R. Baire) laisse entrevoir que les résultats précités, qui utilisent fortement l'algébricité, sont d'une portée restreinte. C'est pourquoi je préfère raisonner avec des outils purement analytiques, par exemple les espaces de jets ou ce que j'appellerai l'application de réflexion associée à h .

Pour énoncer le résultat principal de [21], je commencerai par définir les applications CR formelles inversibles, je définirai le concept de minimalité, puis j'introduirai cinq notions de non-dégénérescence en les exprimant en fonction des jets de sous-variétés de Segre, et enfin, je définirai l'application de réflexion CR formelle.

e. Applications CR formelles inversibles. Soit M une sous-variété locale de \mathbb{C}^n , analytique réelle, de codimension $d \geq 1$, de dimension CR égale à $m := n - d \geq 1$, passant par l'origine et *générique*, c'est-à-dire que $T_0M + JT_0M = T_0\mathbb{C}^n$, où J est la structure complexe standard de $T\mathbb{C}^n$.

Dans les coordonnées holomorphes $t := (t_1, \dots, t_n)$ canoniques de \mathbb{C}^n , la sous-variété M , entendue comme sous-ensemble de \mathbb{C}^n , peut être représentée comme l'ensemble des $t \in \mathbb{C}^n$ où s'annulent exactement d séries entières analytiques $\rho_j(t, \bar{t}) \in \mathbb{C}\{t, \bar{t}\}$, pour $j = 1, \dots, d$; de telles séries entières doivent

satisfaire aux conditions de réalité $\rho_j(t, \bar{t}) \equiv \bar{\rho}_j(\bar{t}, t)$ pour $j = 1, \dots, d$, s'annuler pour $t = 0$ et posséder des différentielles réelles $d\rho_1, \dots, d\rho_d$ qui sont indépendantes à l'origine. La généralité de M équivaut alors au fait que les différentielles complexes $\partial\rho_1, \dots, \partial\rho_d$ sont elles aussi, de surcroît, indépendantes à l'origine.

De même, soient $\rho'_1(t', \bar{t}') = 0, \dots, \rho'_{d'}(t', \bar{t}') = 0$ des équations cartésiennes définissant une autre sous-variété locale de $\mathbb{C}^{n'}$, analytique réelle, générique, passant par l'origine, qui est de codimension $d' \geq 1$ et de dimension CR égale à $m' := n' - d' \geq 1$, toutes deux strictement positives.

Soit $h(t) := (h_1(t), \dots, h_n(t))$ une collection de séries formelles $h_i(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, $i = 1, \dots, n$, dont les termes constants s'annulent. Par définition, h induit une *application CR formelle entre M et M'* s'il existe une matrice de taille $d' \times d$ de séries formelles $b(t, \bar{t})$ telle que l'on a l'identité formelle vectorielle $\rho'(h(t), \bar{h}(\bar{t})) \equiv b(t, \bar{t}) \rho(t, \bar{t})$, interprétée dans le produit $\mathbb{C}[[t, \bar{t}]]^d := \mathbb{C}[[t, \bar{t}]] \times \dots \times \mathbb{C}[[t, \bar{t}]]$ contenant exactement d facteurs. On notera $h : (M, 0) \rightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0)$ une telle application, avec en indice la lettre \mathcal{F} , initiale du mot «formel», car une telle application n'a rien d'une application ponctuelle.

f. Minimalité. C'est un principe général, déjà à l'œuvre dans le théorème de C.F. Gauss sur l'existence de coordonnées isothermes, omniprésent dans les mathématiques de la fin du dix-neuvième siècle, dans les travaux d'É. Cartan et dans le développement contemporain de la géométrie CR, qu'il est judicieux d'introduire dès que possible des variables supplémentaires. En suivant S.-S. Chern, J.K. Moser et S.M. Webster ([CM1974], [We1977], [We1978], [MW1983]), on remplace donc \bar{t} par une variable $\tau \in \mathbb{C}^n$ indépendante ; on obtient la relation vectorielle $\rho'(h(t), \bar{h}(\tau)) \equiv b(t, \tau) \rho(t, \tau)$, qui exprime que l'application formelle *complexifiée* $h^c(t, \tau) := (h(t), \bar{h}(\tau))$ de l'application CR formelle h induit une application formelle entre la *complexification de M* , qui est la sous-variété analytique complexe de \mathbb{C}^{2n} définie par $\mathcal{M} := \{(t, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \rho_j(t, \tau) = 0, j = 1, \dots, d\}$, et la complexification $\mathcal{M}' := \{(t', \tau') \in \mathbb{C}^{n'} \times \mathbb{C}^{n'} : \rho'_{j'}(t', \tau') = 0, j' = 1, \dots, d'\}$. Dorénavant, on raisonnera le plus souvent possible directement avec les objets géométriques complexifiés.

On vérifie (voir le §3.2 pour des explications) que dans tout système de coordonnées holomorphes locales $(z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ telles que $T_0M + (\{0\} \times \mathbb{C}^d) = T_0\mathbb{C}^n$, la sous-variété complexifiée \mathcal{M} peut être représentée par d équations analytiques complexes graphées de la forme $\xi_j = \Theta_j(\zeta, t)$, pour $j = 1, \dots, d$, où $\tau = (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Dans ce système de coordonnées, la collection de séries entières $\Theta_j \in \mathbb{C}\{\zeta, t\}$ est alors unique.

Commençons par présenter en résumé le concept de *minimalité*. On renvoie à la Section 3 pour une exposition de sa signification géométrique. Soit p un point \mathcal{M} de coordonnées $(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Soit $z_1 \in \mathbb{C}^m$ et soit $\zeta_1 \in \mathbb{C}^m$. On définit les deux applications

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{z_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) := (z_p + z_1, \bar{\Theta}(z_p + z_1, \zeta_p, \xi_p), \zeta_p, \xi_p) & \text{et} \\ \underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1}(z_p, w_p, \zeta_p, \xi_p) := (z_p, w_p, \zeta_p + \zeta_1, \Theta(\zeta_p + \zeta_1, z_p, w_p)). \end{cases}$$

Notons que $\mathcal{L}_{z_1}(p)$ et $\underline{\mathcal{L}}_{\zeta_1}(p)$ appartiennent à \mathcal{M} . Itérons ces applications en les composant alternativement l'une avec l'autre : en partant de l'origine $0 \in \mathcal{M}$, définissons $\underline{\Gamma}_1(z_1) := \underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)$, puis

$$(2) \quad \underline{\Gamma}_2(z_1, z_2) := \mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)),$$

puis $\underline{\Gamma}_3(z_1, z_2, z_3) := \underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)))$, et encore

$$(3) \quad \underline{\Gamma}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) := \mathcal{L}_{z_4}(\underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\mathcal{L}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0))))),$$

et ainsi de suite. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on obtient des applications holomorphes locales $\underline{\Gamma}_k$ de \mathbb{C}^{mk} à valeurs dans \mathcal{M} et satisfaisant $\underline{\Gamma}_k(0) = 0$.

On dira que M est *minimale* (au sens de J.-M. Trépreau et A.E. Tumanov) s'il existe un entier μ_0 tel que l'image par $\underline{\Gamma}_{\mu_0}$ d'un voisinage de l'origine arbitrairement petit dans $\mathbb{C}^{m\mu_0}$ contient un voisinage de 0 dans \mathcal{M} . On démontre que cette condition est invariante par changement de coordonnées holomorphes locales. C'est tout ce qu'il suffira de savoir au sujet de la géométrie de la sous-variété source \mathcal{M} . Dans le §3.20 de [21], on trouvera des éléments de comparaison avec la théorie concurrente des « ensembles de Segre » qu'ont développée S.M. Baouendi P. Ebenfelt et L.-P. Rothschild à partir de 1995–96, *sans* observer le lien direct avec la construction due à H.J Sussmann des orbites de systèmes de champs de vecteurs.

g. Jets de sous-variétés de Segre. Pour le principe de réflexion CR formel, ce sont les équations de la sous-variété image \mathcal{M}' qui joueront le rôle le plus important. Cependant, le défaut majeur des équations analytiques de la forme $\rho'_{j'}(t', \tau') = 0$ réside dans la non-unicité des séries entières $\rho'_{j'}$. En effet, la sous-variété \mathcal{M}' est aussi bien représentée comme le lieu d'annulation de tout autre jeu de d' séries entières analytiques définissantes qui sont de la forme $\tilde{\rho}'_{j'}(t', \tau') := \sum_{\nu=1}^{d'} c'_{j', \nu}(t', \tau') \rho'_{\nu}(t', \tau')$, où la matrice de taille $d' \times d'$ des séries entières $c'_{j', \nu} \in \mathbb{C}\{t', \tau'\}$ est inversible. Pour éliminer ce défaut qui pourrait s'avérer gênant (*cf.* les commentaires qui suivent l'énoncé du théorème principal ??), il convient de représenter comme un graphe aussi bien \mathcal{M}' que \mathcal{M} . Soit donc un système de coordonnées holomorphes locales $(z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ avec $T_0 M' + (\{0\} \times \mathbb{C}^{d'}) = T_0 \mathbb{C}^{n'}$, dans lequel la sous-variété complexifiée \mathcal{M}' est représentée par d' équations analytiques complexes de la forme $\xi'_{j'} = \Theta'_{j'}(\zeta', t')$, pour $j' = 1, \dots, d'$, où $\tau' = (\zeta', \xi') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$.

Fixons $t' \in \mathbb{C}^{n'}$ et $k \in \mathbb{N}$. La *sous-variété de Segre complexifiée conjuguée* est la sous-variété analytique complexe de $\mathbb{C}^{n'}$ définie par $\underline{\mathcal{S}}'_{t'} := \{(\zeta', \xi') \in \mathbb{C}^{n'} : \xi' = \Theta'(\zeta', t')\}$. Définissons alors l'application de ses jets d'ordre k explicitement par

$$(4) \quad \varphi'_k(\zeta', t') := \left(\zeta', \left(\frac{1}{\beta'!} \partial_{\zeta'}^{\beta'} \Theta'_{j'}(\zeta', t') \right)_{1 \leq j' \leq d', |\beta'| \leq k} \right).$$

Elle est à valeurs dans $\mathbb{C}^{m' + N_{d', m', k}}$, pour un certain entier $N_{d', m', k}$. Comme l'ont compris K. Diederich et S.M. Webster dans [DW1980], ce sont les propriétés

de cette application analytique complexe locale, définie au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{n'}$, qui gouvernent les divers principes de réflexion possibles, y compris pour les applications CR formelles. On dira que \mathcal{M}' est

- (**nd1**) *Levi non-dégénérée à l'origine* si φ'_1 est de rang $m' + n'$ en $(\zeta', t') = (0, 0)$;
- (**nd2**) *finiment non-dégénérée à l'origine* s'il existe un entier k_0 tel que φ'_k est de rang $n' + m'$ en $(\zeta', t') = (0, 0)$, pour tout $k \geq k_0$;
- (**nd3**) *Essentiellement finie à l'origine* si φ'_k est une application holomorphe finie en $(\zeta', t') = (0, 0)$, pour tout $k \geq k_0$;
- (**nd4**) *Segre non-dégénérée à l'origine* s'il existe un entier k_0 tel que la restriction de φ'_k à la sous-variété de Segre complexifiée conjuguée $\underline{\mathcal{S}}'_0$ (qui est de dimension complexe égale à m') est de rang générique égal à m' , pour tout $k \geq k_0$;
- (**nd5**) *holomorphiquement non-dégénérée* s'il existe un entier k_0 tel que l'application φ'_k est de rang générique maximal possible, égal à $m' + n'$, pour tout $k \geq k_0$.

Dans [26], je démontre que ces cinq conditions ne dépendent pas du système de coordonnées (z', w') dans lequel on a représenté \mathcal{M}' sous la forme $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$.

Bien entendu, par souci de pureté, on pourrait en toute rigueur éviter d'introduire une terminologie spécifique pour de telles conditions de non-dégénérescence. Néanmoins, puisque l'usage a déjà consacré les quatre conditions que sont (**nd1**), (**nd2**), (**nd3**) et (**nd5**), dans [26], [21], j'adopte ces dénominations établies, et j'en introduirai de nouvelles ultérieurement.

La nécessité d'introduire la condition (**nd4**) est due à un exemple intéressant que l'on trouve page 721 de [BER2000].

Dans [26], j'établis les quatre implications

$$(5) \quad (\mathbf{nd1}) \Rightarrow (\mathbf{nd2}) \Rightarrow (\mathbf{nd3}) \Rightarrow (\mathbf{nd4}) \Rightarrow (\mathbf{nd5}),$$

dont seule la troisième est non triviale.

Les conditions (**nd2**) et (**nd3**) apparaissent explicitement dans [DW1980]. C.K. Han obtient dans [Ha1983] un principe de réflexion avec une formulation différente de (**nd2**). Il est important de noter que (**nd1**), (**nd2**) sont des hypothèses de rang constant sur l'application de jets (4); c'est pourquoi elles sont des plus aisées à manipuler (cf. [BER1996], [BER1997], [BER1998], [BER1999a], [BER1999b], [BRZ2001]). Quant à la condition (**nd3**), elle n'est pas très éloignée de (**nd2**) du point de vue de la théorie des singularités; elle a été répétitivement posée comme hypothèse du principe de réflexion analytique, suite au travail [BJT1985] qui développait une technologie adéquate (cf. [BR1988], [BR1990], [BR1995], [BER1999a], [CPS1999], [BER2000] et [Da2001] pour une synthèse récente; voir aussi [DF1988] pour une approche alternative, plus géométrique).

Il est important de remarquer que les quatre premières conditions (**nd1**), (**nd2**), (**nd3**) et (**nd4**) sont ponctuelles, tandis que la dernière ne l'est pas, puisqu'il s'agit d'un rang générique. Il existe des exemples de sous-variétés génériques

qui sont holomorphiquement non-dégénérées, mais qui ne sont ni finiment non-dégénérées, ni essentiellement finies, ni même Segre non-dégénérées en certains points appartenant à un sous-ensemble analytique réel non vide de M' . Ainsi, la notion de non-dégénérescence holomorphe est la plus fine des cinq.

La condition intermédiaire **(nd4)**, qui apparaît dans [Me2000], est déjà plus délicate. En vérité, pour les sous-variétés M' dites *rigides* dont les fonctions définissantes $\Theta'_{j'} \equiv \Theta'_{j'}(\zeta', z')$ ne dépendent pas de w' , on vérifie que les conditions **(nd4)** et **(nd5)** sont équivalentes. Comme la condition **(nd5)**, la condition **(nd4)** autorise que les fibres $(\varphi'_k)^{-1}(\varphi'_k(\zeta', t'))$ de l'application de jets soient de dimension non localement constante au voisinage de l'origine. Il est bien connu alors que les concepts standard de géométrie différentielle sont insuffisants : on entre dans le domaine de la théorie des singularités analytiques complexes.

Dans [Hi1973], H. Hironaka met au point un procédé d'éclatements locaux successifs qui permet, par transformations strictes successives, de remplacer tout morphisme analytique local par un morphisme «redressé» qui satisfait la condition algébrique dite de «platitude» introduite par J.-P. Serre. Ce théorème dit d'«aplatissement local» implique la constance locale de la dimension des fibres, lorsque les espaces d'arrivée et de but du morphisme «aplatissement» sont lisses. L'existence de ce procédé suggère de l'appliquer à l'étude des applications CR formelles (cf. [Te1996]). J'ai constaté que cette approche aboutit dans le cas des applications CR définies par des séries entières, mais dans [21], je n'utilise pas la théorie de H. Hironaka. En effet, grâce à un théorème dit d'approximation dû à M. Artin (voir Théorème 2.5 ci-dessous), je peux résumer en partie la complexité causée par les singularités de l'application de jets d'ordre infini (4), pour $k = \infty$; l'utilisation de ce théorème dans le sujet remonte à M. Derridj dans [De1985], d'après une suggestion de A. Douady. La complexité de la preuve du résultat principal (Théorème [21]–1.23) ci-dessous demeurera substantielle, car elle implique un grand nombre de collections infinies d'identités formelles.

h. Non-dégénérescence holomorphe. Dans [St1995] et [St1996], N. Stanton a introduit la non-dégénérescence holomorphe. Elle dit que M' est *holomorphiquement non-dégénérée* s'il n'existe pas de champ de vecteurs $X' = \sum_{i'=1}^{n'} a'_{i'}(t') \frac{\partial}{\partial t'_{i'}}$ non nul et à coefficients holomorphes qui est tangent à M' . Dans le §3.4 de [26], je démontre que cette définition équivaut à celle que j'ai appelée **nd5**.

La condition de non-dégénérescence holomorphe est connue pour être la condition nécessaire la plus naturelle pour qu'un principe de réflexion soit valide (cf. le premier article [BR1995] contenant une telle observation dans un cadre algébrique, cf. [10] pour un résultat sans condition de rang dans le cadre algébrique, et cf. [14] pour un résultat récent dans le cadre \mathcal{C}^∞). Rappelons-en le principe. Soit $X' := \sum_{i'=1}^{n'} a'_{i'}(t') \frac{\partial}{\partial t'_{i'}}$ un champ de vecteurs non nul et à coefficients holomorphes qui est tangent à M' . Soit $(s', t') \mapsto \exp(s'X')(t')$ le flot local de X' , où $s' \in \mathbb{C}$ et $t' \in \mathbb{C}^{n'}$. Grâce à la condition de tangence, ce flot induit une famille

à un paramètre d'automorphismes holomorphes locaux de M' . Dans [21], je vérifie qu'il existe de nombreuses séries entières *non convergentes* $\varpi'(t') \in \mathbb{C}[[t']]$ dont le terme constant est nul, telles que la composition du flot avec la substitution du temps complexe s' par $\varpi'(t')$, c'est-à-dire $t' \mapsto_{\mathcal{F}} \exp(\varpi'(t')X')(t')$, est une auto-application CR formelle inversible de M' non convergente. Une obstruction similaire au principe de réflexion se produit lorsque M' est holomorphiquement non-dégénérée, dans la catégorie algébrique, \mathcal{C}^∞ ou \mathcal{C}^0 .

La simplicité de cette obstruction laisse évidemment deviner que la non-dégénérescence holomorphe pourrait être une condition nécessaire et suffisante à la convergence de h . En supposant M minimale à l'origine, j'établis la réciproque attendue. C'est le premier résultat principal de [21], annoncé dans [11].

Théorème [21]–1.11. *Soit $h : (M, 0) \rightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0)$ une équivalence CR formelle entre sous-variétés de \mathbb{C}^n analytiques réelles, génériques, de même codimension $d \geq 1$ et de même dimension CR égale à $m := n - d \geq 1$. Si M est minimale à l'origine et si M' est holomorphiquement non-dégénérée, l'application CR formelle h est convergente.*

Reste à s'interroger sur la nécessité de supposer M minimale à l'origine. On pourrait formuler et démontrer une version formelle du Théorème 2.7 de [10] énoncé dans un cadre algébrique, ce qui donnerai : si M n'est nulle part minimale et s'il existe un groupe à un paramètre réel d'auto-applications holomorphes locales stabilisant M , il existe de nombreuses auto-applications CR formelles de M qui ne sont pas convergentes. Par ailleurs, il a été démontré dans [BER1996] que le principe de réflexion algébrique pour les biholomorphismes est valide en supposant seulement que la sous-variété source M est minimale en tout point hors d'un sous-ensemble analytique réel strict. On parle alors de minimalité *en un point Zariski-générique*. Il existe donc une conjecture «folklorique» d'après laquelle le Théorème [21]–1.11 devrait être vrai en supposant seulement que M est minimale en un point Zariski-générique, ce qui signifie qu'elle n'est pas forcément minimale à l'origine, mais qu'elle est minimale en des points arbitrairement proches de l'origine.

Il s'agit là d'une hypothèse fine qui pourrait à nouveau impliquer la théorie des singularités. Pour l'instant, bien que quelques résultats soient connus pour le principe de réflexion \mathcal{C}^∞ entre hypersurfaces non minimales, aucun analogue formel n'est connu. Les idées font défaut, mais je considère que cette question mérite d'être étudiée.

i. Application de réflexion. Dans le cas d'une variable complexe, le principe de réflexion classique dû à K.H.A. Schwarz est valable sans hypothèse de non-dégénérescence sur la frontière. Cela n'est pas étonnant, puisque tout arc analytique réel est localement biholomorphe à un segment ouvert de l'axe réel. Dès qu'il y a plus de deux variables complexes, il est bien connu que le principe de réflexion pour les applications CR entre hypersurfaces serait faux sans une hypothèse forte de non-dégénérescence, telle que la Levi non-dégénérescence ou telle que la finitude essentielle. Intuitivement parlant, de telles hypothèses expriment

que toutes les variables horizontales $z' \in \mathbb{C}^{m'}$ ainsi que les conjuguées complexifiées $\zeta' \in \mathbb{C}^{m'}$ sont (très !) présentes dans les séries définissantes $\Theta'_{j'}(\zeta', z', w')$ de \mathcal{M}' . On peut toutefois se demander s'il n'existe pas une généralisation du principe de réflexion de Schwarz, qui soit valide sans faire aucune hypothèse sur la frontière. Dans un travail antérieur (*voir* [Me1997b] et aussi la remarque page 1098 de l'article [MM1999]), j'ai effectivement trouvé un invariant dont les propriétés de régularité sont plus générales que celles de l'application CR.

Pour une application CR formelle $h : (M, 0) \rightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0)$, cet invariant se présente comme suit. Soient $\xi'_{j'} - \Theta'_{j'}(\zeta', t) = 0$, $j' = 1, \dots, d'$, des équations complexes arbitraires pour \mathcal{M}' dans un voisinage de l'origine. Alors l'application de réflexion associée à h et à ce système de coordonnées s'exprime par une série formelle vectorielle à deux variables $\tau' \in \mathbb{C}^{n'}$ et $t \in \mathbb{C}^n$:

$$(6) \quad \mathcal{R}'_h(\tau', t) := \xi' - \Theta'(\zeta', h(t)) \in \mathbb{C}[[\tau', t]]^{d'}.$$

En toute rigueur, cette application \mathcal{R}'_h dépend du système de coordonnées dans lequel on a représenté \mathcal{M}' , mais grâce à l'invariance biholomorphe des sous-variétés de Segre, je démontre que la convergence de \mathcal{R}'_h , c'est-à-dire la propriété $\mathcal{R}'_h(\tau', t) \in \mathbb{C}\{\tau', t\}^{d'}$, est une propriété invariante. Dans [21], j'énonce et je démontre un résultat de convergence de \mathcal{R}'_h , valable sans aucune hypothèse de non-dégénérescence sur M' : le Théorème principal [21]–1.23 ci-dessous.

j. Résultats récents. Au cours de la démonstration des résultats principaux des articles [BJT1985] et [BR1988] (consacrés au principe de réflexion pour les applications CR de classe \mathcal{C}^∞), une expression voisine de (6) apparaît, *mais on n'a pas pas vu qu'elle devrait jouir d'une propriété de régularité analytique, même lorsque la sous-variété image M' est très dégénérée.* Pour les applications CR entre hypersurfaces essentiellement finies, le prolongement holomorphe de \mathcal{R}'_h s'identifie au prolongement de h en tant que correspondance, tel qu'il est traité dans les travaux de S. Pinchuk et ses collaborateurs, parfois avec l'hypothèse plus forte que M' ne contienne pas de courbe holomorphe.

En 1998, inspiré par mes conjectures sur l'application de réflexion prépubliées dans [Me1997b] et par la remarque de la page 1098 du preprint de [MM1999] (issu en partie de cette prépublication), N. Mir⁵ a démontré de manière indépendante dans [Mi1998] que l'application de réflexion associée à un biholomorphisme entre hypersurfaces algébriques est algébrique. Sa définition de l'application de réflexion élimine la variable ξ' dans (6); celle-ci a pourtant un sens géométrique, puisque la définition de \mathcal{R}'_h est intrinsèquement reliée aux sous-variétés de Segre complexifiées. Ni dans ce travail, ni dans d'autres travaux ultérieurs [Mi2000], [Mi2002], [BMR2002] consacrés à l'application de réflexion, N. Mir ne traite l'invariance biholomorphe de cette application. Or, pour peu que l'on établisse que l'algébricité de \mathcal{R}'_h est une propriété invariante par changement de coordonnées algébriques (*cf.* [10] et [14]), le résultat principal de [Mi1998] devient un corollaire élémentaire de [BR1995]. En effet (*cf.* le §11 de [10]), en déplaçant légèrement le point de référence en un point où l'application de jets (4)

est de rang localement constant – ce qui est autorisé puisque l’application considérée est déjà holomorphe dans un ouvert – et en éliminant des variables muettes, on se ramène à un biholomorphisme local entre deux sous-variétés algébriques réelles, génériques et finiment non-dégénérées contenues dans des espaces euclidiens complexes de dimensions inférieures ; alors les résultats de [BR1995] (codimension 1) ou de [BER1996] (codimension quelconque) s’appliquent directement. En résumé, pour le principe de réflexion algébrique, l’algébricité de la fonction de réflexion équivaut à l’algébricité d’une application holomorphe entre sous-variétés génériques de dimension inférieure (*cf.* le Théorème 11.4 de [10] qui établit cette équivalence sans aucune hypothèse de rang).

En revanche, pour les applications CR formelles (ou C^∞), il est vraiment impossible de déplacer la situation locale en un point où les singularités de l’application de jets (4) disparaissent.

Avant d’énoncer notre résultat principal, présentons une deuxième liste hiérarchisée, comportant cinq conditions CR-horizontales de non-dégénérescence.

k. Conditions CR-horizontales de non-dégénérescence. Pour les sous-variétés génériques M' quelconques, sans aucune condition de non-dégénérescence, le principe de réflexion implique déjà des questions délicates, même en supposant, pour simplifier, que l’application h est inversible. Mais puisqu’un grand nombre de raffinements ont eu cours durant la dernière décennie et qu’il est presque toujours possible d’arguer de la «nouveau» d’un résultat qui suppose l’application h toujours un peu plus dégénérée – pourvu que les techniques connues s’appliquent encore –, je pense qu’il est nécessaire d’exposer un principe organisateur pour présenter les conditions de non-dégénérescence sur l’application h .

Pour exprimer ces conditions, travaillons d’emblée avec les équations complexes graphées pour \mathcal{M}' , ou plutôt avec les équations conjuguées $w_{j'} = \overline{\Theta}'_{j'}(z', \tau')$, $j' = 1, \dots, d'$, qui sont équivalentes. Représentons aussi la complexification \mathcal{M} de M par des équations complexes de la forme $w_j = \overline{\Theta}_j(z, \tau)$, $j = 1, \dots, d$ dans des coordonnées adaptées $t = (z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Posons $\overline{r}_j(\tau, t) := w_j - \overline{\Theta}_j(z, \tau)$ et $\overline{r}'_{j'}(\tau', t') := w_{j'} - \overline{\Theta}'_{j'}(z', \tau')$. Par hypothèse, il existe une matrice de taille $d' \times d$ de séries formelles $\overline{b}(\tau, t)$ telle que $\overline{r}'(\overline{h}(\tau), h(t)) \equiv \overline{b}(\tau, t) \overline{r}(\tau, t)$ dans $\mathbb{C}[[t, \tau]]^d$. Décomposons les composantes de l’application d’une manière compatible avec le scindage $(z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ des coordonnées, ce qui donne $h(t) =: (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}[[t]]^{m'} \times \mathbb{C}[[t]]^{d'}$. En remplaçant w par $\overline{\Theta}(z, \tau)$ dans l’identité fondamentale $\overline{r}'(\overline{h}(\tau), h(t)) \equiv$

⁵N. Mir mentionne mon nom dans deux articles [Mi1998], [Mi2000] juste en remarque, avec l’air de signifier que j’aurais trouvé des théorèmes similaires, mais moins raffinés, donc moins forts, en se gardant d’avouer que mes preuves de ses petits résultats inspirés de mes idées étaient nettement plus courtes que les siennes. Ses travaux, évalués positivement lors de campagnes de recrutement au CNRS et lors de demandes de Délégations CNRS, ne font jamais aucune mention bibliographique des miens : j’affirme, photocopie des références à l’appui, qu’*aucune bibliographie d’article, de thèse ou d’habilitation écrite par N. Mir ne contient le titre d’un seul article que j’ai écrit dans le groupe (2) du §7.6.* En effet, de telles inciteraient à la comparaison.

$\bar{b}(\tau, t) \bar{r}(\tau, t)$, le second membre s'annule identiquement et on obtient les identités formelles suivantes, valables dans $\mathbb{C}[[z, \tau]]$:

$$(7) \quad g_{j'}(z, \bar{\Theta}(z, \tau)) \equiv \bar{\Theta}'_{j'}(f(z, \bar{\Theta}(z, \tau), \bar{h}(\tau))),$$

pour $j' = 1, \dots, d'$. En posant $\tau = 0$ dans ces identités, on obtient les identités

$$(8) \quad g_{j'}(z, \bar{\Theta}(z, 0)) \equiv \bar{\Theta}'_{j'}(f(z, \bar{\Theta}(z, 0), 0)).$$

Classiquement, on les interprète en exprimant que la restriction de l'application formelle h à la sous-variété de Segre S_0 passant par l'origine, définie par $\{(z, w) \in \mathbb{C}^n : w = \bar{\Theta}(z, 0)\}$, induit une application formelle à valeurs dans la sous-variété de Segre S'_0 de l'espace image définie par $\{(z', w') \in \mathbb{C}^{n'} : w' = \bar{\Theta}'(z', 0)\}$. Alors la restriction de h à S_0 coïncide avec l'application formelle

$$(9) \quad \mathbb{C}^m \ni z \longmapsto_{\mathcal{F}} \left(f(z, \bar{\Theta}(z, 0)), \bar{\Theta}'(f(z, \bar{\Theta}(z, 0), 0)) \right) \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}.$$

Ce sont les propriétés de non-dégénérescence de cette application formelle induite qui gouvernent les divers raffinements possibles du principe de réflexion analytique. Par projection sur le sous-espace $\mathbb{C}^{m'} \times \{0\}$, on peut évidemment identifier cette application avec sa *partie CR-horizontale* définie par

$$(10) \quad \mathbb{C}^m \ni z \longmapsto_{\mathcal{F}} f(z, \bar{\Theta}(z, 0)) \in \mathbb{C}^{m'}.$$

Avec ces notations, on peut formuler très concrètement cinq conditions sur l'application (10), que j'ordonne par ordre croissant de généralité. L'application CR formelle h sera dite

- (**cr1**) *CR-inversible* à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est une équivalence formelle en $z = 0$;
- (**cr2**) *CR-submersive* à l'origine si $m' \leq m$ et si sa partie CR-horizontale est une submersion formelle en $z = 0$;
- (**cr3**) *CR-finie* à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est une application formelle finie en $z = 0$;
- (**cr4**) *CR-dominante* à l'origine si $m' \leq m$ et si sa partie CR-horizontale est dominante en $z = 0$;
- (**cr5**) *CR-transversale* à l'origine si sa partie CR-horizontale est transversale en $z = 0$;

Bien entendu, en utilisant l'invariance biholomorphe des sous-variétés de Segre, je démontre que ces définitions ne dépendent pas des systèmes de coordonnées dans lesquels on représente M et M' .

Dans [26], je vérifie les quatre implications

$$(11) \quad (\mathbf{cr1}) \Rightarrow (\mathbf{cr2}) \Rightarrow (\mathbf{cr3}) \Rightarrow (\mathbf{cr4}) \Rightarrow (\mathbf{cr5}),$$

pourvu que $m' = m$ dans la deuxième et dans la troisième. Dans le contexte CR, les conditions (**cr1**) et (**cr2**) apparaissent dans [Za1997] ; la condition (**cr3**), maintenant classique, est une condition naturelle pour les applications CR entre hypersurfaces essentiellement finies ; elle apparaît dans [DF1988], [BR1988] et dans d'autres références. La condition (**cr4**) apparaît dans [BR1990]. Enfin, la condition (**cr5**) apparaît dans [BER2000], avec une appellation différente. Mais

dans cette référence, les auteurs supposent la sous-variété M' essentiellement finie : ils travaillent avec la condition **(nd3)**, bien comprise depuis le travail fondateur [BJT1985].

Le préfixe commun aux cinq conditions «CR-» se justifie de la manière suivante : puisque l'espace tangent au point $0 \in \mathcal{S}_0$ coïncide avec l'espace tangent complexe à M en 0 , lequel absorbe la *structure CR infinitésimale* de M en 0 , on peut penser que l'application formelle induite $h|_{\mathcal{S}_0} : (\mathcal{S}_0, 0) \rightarrow_{\mathcal{F}} (\mathcal{S}'_0, 0)$ est un «prolongement» de l'application *CR tangente* $dh : T_0^c M \rightarrow T_0^c M'$.

Sélectionnons maintenant la condition **(cr5)**, puisque c 'est la plus générale.

l. Résultat principal. Par définition, une application CR formelle h est *CR-transversale à l'origine* s'il n'existe pas de série formelle $F'(z'_1, \dots, z'_{m'}) \in \mathbb{C}[[z'_1, \dots, z'_{m'}]]$ non nulle telle que l'on a l'identité

$$(12) \quad F'(f_1(z, \bar{\Theta}(z, 0)), \dots, f_{m'}(z, \bar{\Theta}(z, 0))) \equiv 0,$$

dans $\mathbb{C}[[z]]$. Le résultat principal de cet article, dont le Théorème 1.11 découle en vérité comme corollaire, est le suivant.

Théorème [21]–1.23. *Soit $h : (M, 0) \rightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0)$ une application CR formelle entre deux sous-variétés de $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n'}$ analytiques réelles, génériques, de codimensions $d \geq 1, d' \geq 1$ et de dimensions CR égales à $m := n - d \geq 1, m' := n' - d' \geq 1$. Si M est minimale à l'origine et si h est CR-transversale, pour tout système de coordonnées $(z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ dans lequel la complexification \mathcal{M}' est représentée par $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$, l'application de réflexion CR formelle associée $\widehat{\mathcal{R}}'_h(\tau', t) := \xi' - \Theta'(\zeta', h(t))$ est convergente.*

Dans le §4.30 de [21], je démontre que si cette propriété de convergence est satisfaite dans un tel système de coordonnées (z', w') , alors pour tout autre système de coordonnées (z'', w'') centrées à l'origine dans lesquelles la complexification de la sous-variété transformée est représentée par des équations similaires $\xi''_j - \Theta''_j(\zeta'', t'') = 0, j = 1, \dots, d'$, l'application de réflexion associée est elle aussi convergente.

La force principale de ce théorème réside dans le fait qu'il ne requiert aucune condition de non-dégénérescence sur M' . Comme pour le Théorème [21]–1.11, je pense bien entendu qu'il demeure valide en supposant seulement que M est minimale en un point Zariski-générique.

Attention, il y a un piège ! Par souci de généralité, on pourrait être tenté comme dans [BMR2002] de raisonner avec des équations définissantes analytiques réelles arbitraires $\rho'_{j'}(t', \bar{t}') = 0$ pour M' , telles qu'introduites au tout début. L'application de réflexion associée serait alors définie par $\widehat{\mathcal{R}}'_h(\tau', t) := \rho'_{j'}(h(t), \tau') \in \mathbb{C}[[t, \tau']]^{d'}$, et le Théorème [21]–1.23 exprimerait, sous les mêmes hypothèses, qu'elle est convergente. Mais en 1997, J.-M. Trépreau m'a fait remarquer qu'un tel énoncé serait trivialement faux (et sur le coup, cela a été dur !).

En effet, choisissons une série entière non convergente $\varpi(z_2) \in \mathbb{C}[[z_2]]$ telle que $\varpi(z_2) = z_2 + O(z_2^2)$ et considérons l'application formelle définie par

$h(z_1, z_2, w) := (z_1, \varpi(z_2), w)$. C'est une équivalence CR formelle entre l'hypersurface algébrique M de \mathbb{C}^3 définie par $w = \bar{w} + iz_1\bar{z}_1$ et (la même !) l'hypersurface de \mathbb{C}^3 définie par $r' = 0$, où $r' := \bar{w}' - w' + iz_1'\bar{z}_1'$. Notons que M' est holomorphiquement dégénérée, puisque le champ holomorphe $\frac{\partial}{\partial z_2}$ lui est tangent. Il est vrai que l'application de réflexion $\mathcal{R}'_h(\tau', t)$ égale à $\xi' - w + iz_1 \zeta'_1$ est convergente. Par contre, il est vraiment faux que l'application de réflexion associée à une équation définissante arbitraire pour M' est convergente. En effet, prenons par exemple la fonction $\rho'(t', \bar{t}') := [1 + z_1'\bar{z}_1' + z_2'\bar{z}_2'] r'(t', \bar{t}')$; son lieu d'annulation coïncide avec M' . Si l'application de réflexion

$$(13) \quad \widehat{\mathcal{R}}'_h(\tau', t) := [1 + z_1\zeta'_1 + \varpi(z_2)\zeta'_2] \cdot [\xi' - w + iz_1\zeta'_1]$$

était convergente par rapport aux six variables $(z_1, z_2, w, \zeta'_1, \zeta'_2, \xi')$, on en déduirait en considérant $\frac{\partial^2}{\partial \zeta'_2 \partial \xi'} \widehat{\mathcal{R}}'_h(\tau', t) \Big|_{\tau'=0}$ que la série formelle $\varpi(z_2)$ est convergente, ce qui contredirait notre choix initial. Par conséquent, il n'est pas anodin de choisir d'emblée des équations complexes graphées $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$ pour la représentation de la complexifiée M' ainsi que pour la définition de l'application de réflexion CR formelle.

Comme je l'ai mentionné précédemment, N. Mir a obtenu dans [Mi2000] une démonstration du Théorème [21]–1.23 pour les équivalences formelles dans le cas $d = d' = 1$, mais la méthode, astucieuse, achoppe dès que la codimension d de M est supérieure ou égale à 2. La première version de [9], qui a circulé avant [Mi2000], contenait seulement le Théorème [21]–1.11 dans le cas $d = d' = 1$. Dans cette référence, l'existence de paires d'identités de réflexion conjuguées apparaissait clairement, bien qu'exploitée de manière insuffisante. En fait, dans la version publiée [9], il a suffi d'inclure le court §9 pour obtenir le Théorème [21]–1.23 pour les équivalences formelles dans le cas $d = d' = 1$. Cette *paire d'identités de réflexion conjuguées* étant absolument cruciale pour la démonstration du Théorème 1.23, je vais l'exposer ci-dessous.

En mai 2000, une démonstration complète du Théorème [21]–1.23 pour les équivalences CR formelles a été annoncée (math.CV/0005290). Cette annonce électronique a donné lieu à la publication résumée [11]. Sept mois plus tard, en décembre 2000, S.M. Baouendi, N. Mir et L.-P. Rothschild ont annoncé électroniquement le même type de résultats, avec les raffinements attendus sur le rang de l'application h , lesquels ne s'élèvent pourtant que jusqu'au niveau **(cr4)**. Un examen de la publication [BMR2002] à laquelle a donné lieu ce travail (qui ne contient plus les références à nos travaux présentes dans la version électronique) montre que ces auteurs utilisent les paires d'identités de réflexion conjuguées, ce que seul l'ultra-spécialiste peut déceler dans le cœur technique de la démonstration principale (*voir* les équations (5.2) et (5.3), la Proposition 6.1 et le Lemme 7.1 de [BMR2002]). Par ailleurs, ces auteurs, qui n'emploient pas la terminologie «application de réflexion» (utilisée pourtant dans [Mi2000], [Mi2002]), introduisent une notion alternative d'«idéal de Segre», laquelle est définie au moyen d'équations analytiques réelles arbitraires $\rho'_{j'}(t', \bar{t}') = 0$ pour M' . Ce choix pour énoncer leurs théorèmes de convergence, les contraint à quelques circonlocutions,

puisque la convergence de $\widehat{\mathcal{R}}'_h(\tau', t) := \rho'_{j'}(h(t), \tau') \in \mathbb{C}[[t, \tau']]^{d'}$ n'est satisfaite que pour les représentants graphés de l'idéal engendré par les séries entières complexifiées $\rho'_{j'}(t', \tau')$, comme on vient de le voir.

En conclusion de ce paragraphe, la prolixité et le raffinement des résultats présentés dans [BMR2002] confinent à un certain hermétisme auquel je n'adhère pas, puisque les quatre concepts analytico-géométriques qui sont impliqués dans le sujet sont relativement simples :

- (1) Minimalité locale comme propriété des orbites de champs de vecteurs CR complexifiés, dont les sous-variétés intégrales coïncident avec les sous-variétés de Segre complexifiées (Section 3) ;
- (2) jets d'ordre k des sous-variétés de Segre complexifiées et diverses conditions de non-dégénérescence (Section 4) ;
- (3) application de réflexion CR comme invariant fondamental qui jouit de propriétés de régularité (Sections 1, 5 et 6) ;
- (4) conditions de non-dégénérescence CR-horizontales (Section 1) ;

Ce sont ces hypothèses multiples, combinées souvent à l'alternative entre catégorie algébrique et catégorie analytique, qui sont responsables de la combinatoire de théorèmes possibles publiés récemment sur le principe de réflexion analytique. Toutefois, cette diversité s'exerce au détriment de résultats plus rares où une difficulté substantielle a été surmontée et elle occulte leur repérage.

Exposons maintenant le point-clé qui est à la base de la démonstration du Théorème [21]–1.23.

m. Paire d'identités de réflexion conjuguées. Soient $w_j = \overline{\Theta}_j(z, \tau)$, $j = 1, \dots, d$ un système de d équations complexes graphées pour la complexification \mathcal{M} de M et soient $\xi_j = \Theta_j(\zeta, t)$, $j = 1, \dots, d$, les équations conjuguées. On considère la paire de systèmes de m champs de vecteurs holomorphes tangents à \mathcal{M} définis comme suit :

$$(14) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_k := \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \overline{\Theta}_j}{\partial z_k}(z, \tau) \frac{\partial}{\partial w_j}, & k = 1, \dots, m, \\ \underline{\mathcal{L}}_k := \frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \Theta_j}{\partial \zeta_k}(\zeta, t) \frac{\partial}{\partial \xi_j}, & k = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Par hypothèse, l'application CR formelle $h(t) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}[[t]]^{m'} \times \mathbb{C}[[t]]^d$ satisfait les d' identités formelles (1.16) et leurs conjuguées complexifiées, que j'écrirai ensemble comme suit :

$$(15) \quad \begin{cases} \overline{g}_{j'}(\zeta, \Theta(\zeta, t)) \equiv \Theta'_{j'}(\overline{f}(\zeta, \Theta(\zeta, t)), h(t)), \\ g_{j'}(z, \overline{\Theta}(z, \tau)) \equiv \overline{\Theta}'_{j'}(f(z, \overline{\Theta}(z, \tau)), \overline{h}(\tau)). \end{cases}$$

On les abrègera en les écrivant $g(t) = \overline{\Theta}'(f(t), \overline{h}(\tau))$ et $\overline{g}(\tau) = \Theta'(\overline{f}(\tau), h(t))$, étant entendu que $(t, \tau) \in \mathcal{M}$. Développons les fonctions $\Theta'_{j'}$ par rapport aux puissances de ζ' : on obtient des expressions de la forme $\Theta'_{j'}(\zeta', t') =$

$\sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'} \Theta'_{j', \gamma'}(t')$, avec des séries entières convergentes $\Theta'_{j', \gamma'}(t') \in \mathbb{C}\{t'\}$ qui satisfont bien sûr une estimée de Cauchy, puisque les fonctions $\Theta'_{j'}(\zeta', t')$ sont holomorphes par rapport aux deux variables ζ' et t' . En utilisant ce développement, on peut tout d'abord réécrire l'application de réflexion (1.13) sous la forme plus explicite

$$(16) \quad \mathcal{R}'_h(\tau', t) = \xi' - \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'} \Theta'_{\gamma'}(h(t)).$$

Dans la Section 5 de [21], j'établis que la convergence de l'application de réflexion est équivalente à la convergence de la collection infinie de séries formelles $\Theta'_{j', \gamma'}(h(t))$, pour tous $j' = 1, \dots, d'$ et tous $\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}$. J'appelle *composantes de l'application de réflexion* ces séries formelles $\Theta'_{j', \gamma'}(h(t))$, parfois notées sous la forme vectorielle abrégée $\Theta'_{\gamma'}(h(t))$.

En utilisant le même développement partiel en séries entières des $\Theta'_{j', \gamma'}(\zeta', t')$, on peut aussi réécrire les relations fondamentales (15) sous une forme plus explicite, dont le mérite principal est de faire clairement apparaître toutes les composantes de l'application de réflexion :

$$(17) \quad \begin{cases} \bar{g}(\tau) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \bar{f}(\tau)^{\gamma'} \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ g(t) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'} \bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h}(\tau)), \end{cases}$$

où $(t, \tau) \in \mathcal{M}$. Venons-en maintenant aux identités de réflexion. Pour un multiindice arbitraire $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$, on note \mathcal{L}^β et $\underline{\mathcal{L}}^\beta$ les dérivations holomorphes et antiholomorphes d'ordre $|\beta|$ définies par

$$(18) \quad \begin{cases} \mathcal{L}^\beta := (\mathcal{L}_1)^{\beta_1} (\mathcal{L}_1)^{\beta_2} \dots (\mathcal{L}_m)^{\beta_m} & \text{et} \\ \underline{\mathcal{L}}^\beta := (\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_1} (\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_2} \dots (\underline{\mathcal{L}}_m)^{\beta_m}. \end{cases}$$

Classiquement, on applique les dérivations antiholomorphes $(\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_1} (\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_2} \dots (\underline{\mathcal{L}}_m)^{\beta_m}$ au premier jeu d'équations (17). De manière équivalente, à une conjugaison près, on pourrait appliquer les dérivations conjuguées $(\mathcal{L}_1)^{\beta_1} (\mathcal{L}_1)^{\beta_2} \dots (\mathcal{L}_m)^{\beta_m}$ au second jeu d'équations (17). Au total, les deux procédés reviennent à choisir une fois pour toutes les variables t ou les variables \bar{t} pour écrire les identités de réflexion. C'est le point de vue qui est adopté dans tous les travaux consacrés au principe de réflexion analytique que sont [Pi1975], [Le1977], [We1978], [DW1980], [Ha1983], [De1985], [BJT1985], [BR1988], [Pu1990], [BR1990], [BR1995], [BER1996], [BER1997], [Mi1998], [BER1999a], [CPS1999], [BER1999b], [CPS2000], [BER2000], [10], [BRZ2001], [14], [CDMS2002], [MMZ2002] et [MMZ2003].

Il faut respecter une exigence de complétude : on dispose de deux jeux de d' équations formelles fondamentales (17) et de deux jeux infinis de dérivations fondamentales (18). Au total, ce ne sont donc pas deux mais quatre identités de réflexion que l'on devrait obtenir.

Pour les écrire, on observe que $\underline{\mathcal{L}}_k(h) \equiv 0$ et que $\mathcal{L}_k(\bar{h}) \equiv 0$ pour $k = 1, \dots, m$, ce qui est évident d'après les formules (14). Il en découle que $\underline{\mathcal{L}}^\beta(h) \equiv 0$ et que $\mathcal{L}^\beta(\bar{h}) \equiv 0$ puis aussi $\underline{\mathcal{L}}^\beta \Theta'_{\gamma'}(h) \equiv 0$ et $\mathcal{L}^\beta(\bar{\Theta}'(\bar{h})) \equiv 0$, pourvu bien sûr que $\beta \neq 0$.

Ainsi, en appliquant les dérivations (18) pour $\beta \neq 0$ aux identités (17), on obtient quatre familles infinies d'identités de réflexion. Disposons-les en deux paires conjuguées comme suit : première paire :

$$(19) \quad \begin{cases} \underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{g}(\tau) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^\beta [\bar{f}(\tau)^{\gamma'}] \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ 0 = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'} \underline{\mathcal{L}}^\beta [\bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h}(\tau))]; \end{cases}$$

seconde paire, conjuguée (modulo transposition) de la première :

$$(20) \quad \begin{cases} \mathcal{L}^\beta g(t) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \mathcal{L}^\beta [f(t)^{\gamma'}] \bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h}(\tau)), \\ 0 = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \bar{f}(\tau)^{\gamma'} \mathcal{L}^\beta [\Theta'_{\gamma'}(h(t))]. \end{cases}$$

Bien entendu, $\beta \neq 0$ et $(t, \tau) \in \mathcal{M}$. Les deux paires (19) et (20) sont donc conjuguées terme à terme (modulo une transposition) ; elles ne sont donc pas essentiellement distinctes. Mais dans chacune des deux paires, une différence importante est à noter : tandis que ce sont *a priori* toutes les composantes $\bar{f}_{k'}$ et $\bar{g}_{j'}$ de l'application \bar{h} que l'on différencie dans la première identité (19), ce sont les composantes conjuguées de l'application de réflexion $\bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h}(\tau))$ que l'on différencie à la seconde ligne.

La différence a son importance pour la raison suivante. D'après la propriété mentionnée après (16), le Théorème [21]–1.23 énonce essentiellement que les composantes $\Theta'_{\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion sont des séries convergentes. Il n'énonce nullement que toutes les composantes de l'application $h(t)$ sont convergentes. L'exemple élémentaire discuté après le Théorème [21]–1.23 (ou d'autres analogues) montre qu'en général, aucune contrainte de convergence n'est exercée sur les composantes de h qui n'apparaissent pas dans les composantes de l'application de réflexion. C'est pourquoi la première identité de réflexion (19) a le défaut majeur de faire intervenir inévitablement les dérivées d'éventuelles «mauvaises» composantes de h , tout du moins celles qui ne sont pas intrinsèquement liées à l'application invariante \mathcal{R}'_h . Au contraire, dans la seconde identité (19) (tout aussi bien que dans la première identité (20)), on différencie les vrais objets invariants que sont les composantes $\bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h})$ (ou leurs conjuguées $\Theta'_{\gamma'}(h)$).

À notre connaissance, les seuls travaux dans lesquels on considère aussi les seconde identités de réflexion (19) (ainsi que sa conjuguée, la première identité de (20)) sont : [9], [10] et [BMR2002].

RÉFÉRENCES

- [BR1988] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces*, Invent. Math. **93** (1988), no. 3, 481–500.
- [BR1990] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Geometric properties of mappings between hypersurfaces in complex space*, J. Differential Geom. **31** (1990), 473–499.
- [BR1995] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Mappings of real algebraic hypersurfaces*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 997–1015.
- [BER1996] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets in \mathbb{C}^n* , Acta Math. **177** (1996), no. 2, 225–273.
- [BER1997] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Parametrization of local biholomorphisms of real analytic hypersurfaces*, Asian J. Math. **1** (1997), no. 1, 1–16.
- [BER1998] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *CR automorphisms of real analytic manifolds in complex space*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 291–315.
- [BER1999a] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Real submanifolds in complex space and their mappings*. Princeton Mathematical Series, **47**, Princeton University Press Princeton, NJ, 1999, xii+404 pp.
- [BER1999b] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Rational dependence of smooth and analytic CR mappings on their jets*, Math. Ann. **315** (1999), 205–249.
- [BER2000] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Convergence and finite determination of formal CR mappings*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000) 697–723.
- [BJT1985] BAOUENDI, M.S. ; JACOBOWITZ, H. ; TREVES, F. : *On the analyticity of CR mappings*, Ann. of Math. **122** (1985), no. 2, 365–400.
- [BMR2002] BAOUENDI, M.S. ; MIR, N. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Reflection ideals and mappings between generic submanifolds in complex space*, J. Geom. Anal. **12** (2002), no. 4, 543–580. Preprint électronique : [arXiv/abs/math/0012243](https://arxiv.org/abs/math/0012243).
- [BRZ2001] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCCHILD, L.P. ; ZAITSEV, D. : *Equivalences of real submanifolds in complex space*, J. Differential Geom. **59** (2001), no. 2, 301–351.
- [CM1974] CHERN, S.-S. ; MOSER, J.K. : *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.
- [CDMS2002] COUPET, B. ; DAMOUR, S. ; MERKER, J. ; SUKHOV, A. : *Sur l'analyticité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **334** (2002), 953–956.
- [CPS1999] COUPET, B. ; PINCHUK, S. ; SUKHOV, A. : *Analyticité des applications CR*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **329** (1999), no. 6, 489–494.
- [CPS2000] COUPET, B. ; PINCHUK, S. ; SUKHOV, A. : *On partial analyticity of CR mappings*, Math. Z. **235** (2000), 541–557.
- [Da2001] DAMOUR, S. : *On the analyticity of smooth CR mappings between real analytic CR manifolds*, Michigan Math. J. **49** (2001), no. 3, 583–603.
- [De1985] DERRIDI, M. : *Le principe de réflexion en des points de faible pseudoconvexité pour des applications holomorphes propres*, Invent. Math. **79** (1985), no. 1, 197–215.
- [DF1988] DIEDERICH, K. ; FORNÆSS, J.E. : *Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in \mathbb{C}^n* , Math. Ann. **282** (1988), no. 4, 681–700.
- [DW1980] DIEDERICH, K. ; WEBSTER, S.M. : *A reflection principle for degenerate real hypersurfaces*, Duke Math. J. **47** (1980), no. 4, 835–843.
- [Eb1998] EBENFELT, P. : *Normal forms and biholomorphic equivalence of real hypersurfaces in \mathbb{C}^3* , Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), no. 2, 311–366.

- [Go1996] GONG, X. : *Divergence of the normalization for real Lagrangian surfaces near complex tangents*, Pacific Math. J. **176** (1996), 311–324.
- [Ha1983] HAN, C.K. : *Analyticity of CR equivalences between some real analytic hypersurfaces in \mathbb{C}^n with degenerate Levi-forms*, Invent. Math **73** (1983), no. 1, 51–69.
- [Hi1973] HIRONAKA, H. : *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Istituto Matematico «L. Tonelli» dell'Università di Pisa, 1973, iii+162 pp.
- [HK1995] HUANG, X.; KRANTZ, S.G. : *On a problem of Moser*, Duke Math. J. **78** (1995), no. 1, 213–228.
- [Le1977] LEWY, H. : *On the boundary behaviour of holomorphic mappings*, Contrib. Centro Linceo Inter. Sc. Mat. e Loro Appl. No. 35, Accad. Naz. Lincei (1977), 1–8; reprint in the *Hans Lewy Selecta*, 2 vols, *Contemporary mathematicians*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [Me1997b] MERKER, J. : *On the Schwarz symmetry principle in three-dimensional complex euclidean space*, Prépublication de l'École Normale Supérieure, **25** (1997), 62 pp.
- [Me2000] MERKER, J. : *Étude de la régularité analytique de l'application de symétrie CR formelle*, Preprint, June 2000; downloadable at : arXiv.org/math/abs/0005290.
- [MM1999] MERKER, J.; MEYLAN, F. : *On the Schwarz symmetry principle in a model case*, Proc. Amer. Math. Soc. **127**, (1999), no. 4, 1097–1102.
- [MMZ2002] MEYLAN, F.; MIR, N.; ZAITSEV, D. : *Holomorphic extension of smooth CR-mappings between real-analytic and real-algebraic CR-manifolds*, preprint, january 2001; downloadable at <http://arXiv.org/abs/math.CV/0201267>.
- [MMZ2003] MEYLAN, F.; MIR, N.; ZAITSEV, D. : *Approximation and convergence of formal CR-mappings*, Int. Math. Res. Not. **2003**, no. 4, 211–242.
- [Mi1998] MIR, N. : *Germes of holomorphic mappings between real algebraic hypersurfaces*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **48** (1998), no. 3, 1025–1043.
- [Mi2000] MIR, N. : *Formal biholomorphic maps of real analytic hypersurfaces*, Math. Research Lett. **7** (2000), no. 2-3, 343–359.
- [Mi2002] MIR, N. : *On the convergence of formal mappings*, Comm. Anal. Geom. **10** (2002), no. 1, 23–59.
- [MW1983] MOSER, J.K.; WEBSTER, S.M. : *Normal forms for real surfaces in \mathbb{C}^2 near complex tangents and hyperbolic surface transformations*, Acta Math. **150** (1983), no. 3-4, 255–296.
- [Pi1975] PINCHUK, S. : *On the analytic continuation of holomorphic mappings* (Russian), Mat. Sb. (N.S.) **98(140)** (1975) no. 3 (11), 375–392, 416–435, 495–496.
- [Pu1990] PUSHNIKOV, Y. : *Holomorphicity of CR-mappings into a space of large dimension*, Mat. Zametki **48** (1990), no. 3, 147–149.
- [St1995] STANTON, N. : *Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces of the space of n complex variables*, Amer. J. Math., **117** (1995), no. 1, 141–167.
- [St1996] STANTON, N. : *Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 1, 209–233.
- [Te1996] TEISSIER, B. : *Communication orale*.
- [We1977] WEBSTER, S.M. : *On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces*, Invent. Math. **43** (1977), no. 1, 53–68.
- [We1978] WEBSTER, S.M. : *On the reflection principle in several complex variables*, Proc. Amer. Math. Soc. **71** (1978), no. 1, 26–28.

- [We1992] WEBSTER, S.M. : *Holomorphic symplectic normalization of a real function*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **19** (1992), no. 1, 69–86.
- [Za1997] ZAITSEV, D. : *Germs of local automorphisms of real-analytic CR structures and analytic dependence on k -jets*, Math. Research Lett. **4** (1997), no. 6, 823–842.

[27] : Feuilletages caractéristiques sur les sous-variétés maximale-ment réelles et enveloppes d’holomorphic. Ce travail, dont j’étais le rédacteur principal, m’a énormément coûté : la démonstration du théorème principal 1.2’ couvre 65 pages de texte en Latex ; c’est la plus technique et la plus achevée des démonstrations que j’ai jamais écrites. Je reprends librement l’introduction du manuscrit [27], prépublié à l’Université de Provence, postée sur le site arXiv en janvier 2004 et qui a des chances de paraître aux *International Mathematics Research Surveys* (IMRS). On remarquera que les références [26], [21] et [27], écrites entre juin 2002 et février 2004, totalisent plus de 300 pages (non redondantes) de mémoires de recherche.

In the past fifteen years, remarkable progress has been made towards the understanding of the holomorphic extendability properties of CR functions. At the origin of this development, the most fundamental achievement was the deep discovery, due to the effort of numerous mathematicians, that the so-called *CR orbits* are the adequate underlying objects for the semi-local CR analysis on a general embedded CR manifold. As an independent and now established theory in several complex variables, one may find a precise correspondence between such orbits and progressively attached analytic discs covering a thick part of the envelope of holomorphy of CR manifolds, cf. [B], [Trv], [Tr1], [Tu1], [BER], [Tu2], [M1], [J2] and [P3] for a recent synthesis.

Within this framework, it became mathematically accessible to endeavour the general study of removable singularities on embedded CR manifolds $M \subset \mathbb{C}^n$ of arbitrary CR dimension and of arbitrary codimension, not necessarily being the boundaries of (strictly) pseudoconvex domains. With respect to their size or “mass”, the interesting singularities can be essentially ordered by their codimension in M . For instance, provided it does not perturb the fact that M consists of a single CR orbit, an arbitrary closed subset $C \subset M$ which is of vanishing 2-codimensional Hausdorff content is *always* removable, as is shown in [CS] in the hypersurface case and in [MP3], Theorem 1.1, in arbitrary codimension. Hence one is left to study the removability of singularities of codimension at most two. Since the general problem of characterizing removability seems at the moment to be out of reach (even for M being a hypersurface), it is advisable to focus on geometrically accessible singularities, namely singularities contained in a CR submanifold of M . A complete study of the automatic removability of two-codimensional singularities may be found in Theorem 4 of [MP1]. Having in mind the classical Painlevé problem, we will mainly consider in this paper singularities which are closed sets C contained in a *codimension one* submanifold M^1 of M which is *generic* in \mathbb{C}^n .

The known results on singularities of codimension one can be subdivided into two strongly different groups according to the *CR dimension* of M . If

$\text{CRdim } M \geq 2$, then a generic hypersurface $M^1 \subset M$ is itself a CR manifold of positive CR dimension, and singularities $C \subset M^1$ can be understood on the basis of the interplay between C and the CR orbits of M^1 . Deep results in this direction were established when M is a hypersurface of \mathbb{C}^n in [J4], [J5] and then generalized to CR manifolds of arbitrary codimension in [P1] : the geometric condition insuring automatic removability is simply that C does not contain any CR orbit of M^1 .

On the other hand, if $\text{CRdim } M = 1$ the geometric situation becomes highly different, as a generic hypersurface $M^1 \subset M$ is now (maximal) *totally real*. Fortunately, as a substitute for the CR orbits of M^1 , one can consider the so-called *characteristic foliation* of M^1 , obtained by integrating the characteristic line field $T^c M|_{M^1} \cap TM^1$. But removability theorems exploiting this concept were only known for hypersurfaces in \mathbb{C}^2 and, until very recently, only in the strictly pseudoconvex case. Furthermore, a geometric condition insuring automatic removability has not yet been clearly delineated.

Hence, with respect to the current state of the art, there was a two-fold gap about codimension one removable singularities contained in generic submanifolds M of CR dimension one : firstly, to establish a satisfying theory for non-pseudoconvex hypersurfaces in \mathbb{C}^2 and secondly, to understand the situation in higher codimension. This second main task was formulated as the first open problem in a list p. 432 of [J5] (*see* also the comments pp. 431–432 about the relative geometric simplicity of the case $\text{CRdim } M \geq 2$). *A priori*, it is not clear at all whether the two directions of research are related somehow, but in the present work, we shall fill in this two-fold gap by devising a new semi-local approach which applies uniformly with respect to codimension.

For the detailed discussion of our result we have to introduce some terminology which will be used throughout the article. Let M be a generic submanifold of \mathbb{C}^n and let C be a closed subset of M . Recall from [MP3] that a *wedgelike domain* attached to a generic submanifold $M' \subset \mathbb{C}^n$ is a domain containing a local wedge of edge M' at every point of M' . Our wedgelike domains will always be *nonempty*. Let us define three basic notions of removability. Firstly, we say that C is *CR-removable* if there exists a wedgelike domain \mathcal{W} attached to M to which every continuous CR function $f \in \mathcal{C}_{CR}^0(M \setminus C)$ extends holomorphically. Secondly, as in [MP3], p. 486, we say that C is *\mathcal{W} -removable* if for every wedgelike domain \mathcal{W}_1 attached to $M \setminus C$, there is a wedgelike domain \mathcal{W}_2 attached to M and a wedgelike domain $\mathcal{W}_3 \subset \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ attached to $M \setminus C$ such that for every holomorphic function $f \in \mathcal{O}(\mathcal{W}_1)$, there exists a holomorphic function $F \in \mathcal{O}(\mathcal{W}_2)$ which coincides with f in \mathcal{W}_3 . Thirdly, with $p \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfying $p \geq 1$, we say that C is *L^p -removable* if every locally integrable function $f \in L_{loc}^p(M)$ which is CR in the distributional sense on $M \setminus C$ is in fact CR on all of M .

The first notion of removability is a generalization of the kind of removability considered in most of the pioneering papers [CS], [D], [FS], [J1], [KR], [L], [Lu], [St] about removable singularities in boundaries of domains $D \subset \subset \mathbb{C}^n$. We observe that a wedgelike open set attached to a hypersurface M is just a (global) one-sided neighborhood of M , namely a domain ω with $\bar{\omega} \supset M$ such that for

every point $p \in M$, the domain ω contains the intersection of a neighborhood of p in \mathbb{C}^n with one side of M . If now a closed set C contained in a \mathcal{C}^1 -smooth bounded boundary ∂D is CR-removable, then an application of the Hartogs-Bochner theorem shows that CR functions on $\partial D \setminus C$ can be holomorphically extended to D . The second notion of removability is a way to isolate the part of the question related to envelopes of holomorphy. The third notion of removability has the advantage of being completely intrinsic with respect to M and may be relevant in the study of non-embeddable CR manifolds.

To avoid confusion, we state precisely our submanifold notion : Y is a *submanifold* of X if Y and X are equipped with a manifold structure, if there exists an immersion i of Y into X and if the manifold topology of Y and the topology of $i(Y)$ inherited from the topology of X coincide, so that one may identify the submanifold Y with the subset $i(Y) \subset X$. Furthermore, our submanifolds will always be connected.

Let us now enter the discussion of the case $n = 2$. Here we shall denote the submanifold $M^1 \subset M$, which is a surface in \mathbb{C}^2 , by S . In [Bi], E. Bishop showed that a two-dimensional surface in \mathbb{C}^2 of class at least \mathcal{C}^2 having an isolated complex tangency at one of its points p may be represented by a complex equation of the form $w = z\bar{z} + \lambda(z^2 + \bar{z}^2) + o(|z|^2)$, in terms of local holomorphic coordinates (z, w) vanishing at p , where the real parameter $\lambda \in [0, \infty)$ is a biholomorphic invariant of S . The point p is said to be *elliptic* if $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$, *parabolic* if $\lambda = \frac{1}{2}$ and *hyperbolic* if $\lambda \in (\frac{1}{2}, \infty)$. Recall that M is called *globally minimal* if it consists of a single CR orbit (cf. [Tr1], [Tr2]; [MP1], pp. 814–815; and [J4], pp. 266–269). Throughout this paper, we shall work in the $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -smooth category, where $0 < \alpha < 1$. Our first main new result is as follows.

Theorem 1.1. *Let M be a globally minimal $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -smooth hypersurface in \mathbb{C}^2 and let $D \subset M$ be a $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -smooth surface which is*

- (a) *$\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -diffeomorphic to the unit 2-disc of \mathbb{R}^2 and*
- (b) *totally real outside a discrete subset of isolated complex tangencies which are hyperbolic in the sense of E. Bishop.*

Then every compact subset K of D is CR-, \mathcal{W} - and L^p -removable.

As a corollary, one obtains a corresponding result about holomorphic extension from $\partial\Omega \setminus K$ for the case that M is the boundary of a relatively compact domain $\Omega \subset \mathbb{C}^2$. Note that $\partial\Omega$ is automatically globally minimal ([J4], Section 2). We will first recall the historical background of Theorem 1.1 and explain afterwards on this basis the main ideas and techniques necessary for the proof.

In 1988, applying a global version of the *Kontinuitätssatz*, B. Jöricke [J1] established a remarkable theorem : every compact subset of a totally real \mathcal{C}^2 -smooth 2-disc lying on the boundary of the unit ball in $S^3 = \partial\mathbb{B}_2 \subset \mathbb{C}^2$ is CR-removable. This discovery motivated the work [FS] by F. Forstnerič and E.L. Stout, where it is shown that every \mathcal{C}^2 -smooth compact 2-disc contained in a strictly pseudoconvex \mathcal{C}^2 -smooth boundary $\partial\Omega$ contained in a 2-dimensional Stein manifold \mathcal{M} which is totally real except at a finite number of hyperbolic complex tangencies is removable ; the proof mainly relies on a previous work by E. Bedford and

W. Klingenberg about the hulls of 2-spheres contained in such strictly pseudoconvex boundaries $\Omega \subset \mathcal{M}$, which may be filled by Levi-flat 3-spheres after a generic small perturbation ([BK], Theorem 1). Indirectly, it followed from [J1] and [FS] that such compact totally real 2-discs $D \subset \partial\Omega$ (possibly having finitely many hyperbolic complex tangencies) are $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$ -convex and in particular polynomially convex if $D = \mathbb{B}_2$ and $\mathcal{M} = \mathbb{C}^2$, thanks to a previous work [St] by E.L. Sout, where it is shown (Theorem II.10) that a compact subset K of a \mathcal{C}^2 -smooth strictly pseudoconvex boundary $\partial\Omega$ in a Stein manifold is removable *if and only if* K is $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$ -convex. It is also established in [FS] that a neighborhood of an isolated hyperbolic complex tangency in \mathbb{C}^2 is polynomially convex. These papers have been followed by the work [D], where the question of $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$ -convexity of *arbitrary compact surfaces* S (with or without boundary, not necessarily diffeomorphic to a 2-disc) contained in a \mathcal{C}^2 -smooth strictly pseudoconvex domain $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ is dealt with directly. Using K. Oka's characterization of the envelope of a compact, J. Duval shows that the essential hull $\widehat{K}_{\text{ess}} := \widehat{K}_{\mathcal{O}(\overline{\Omega})} \setminus K$ must cross every leaf of the characteristic foliation on the totally real part of S and he deduces that a compact 2-disc having only hyperbolic complex tangencies is $\mathcal{O}(\overline{D})$ -convex.

All the above proofs heavily rely on strong pseudoconvexity, in contrast to the experience, familiar at least in the case $\text{CRdim } M \geq 2$, that removability should depend rather on the structure of CR orbits than on Levi curvature. The first theorem for the non-pseudoconvex situation was established by the second author in [P2]. He proved that every compact subset of a totally real disc embedded in a globally minimal \mathcal{C}^∞ -smooth hypersurface in \mathbb{C}^2 is always CR-removable. We would like to point out that, seeking theorems without any assumption of pseudoconvexity leads to substantial open problems, because one loses almost all of the strong interweavings between function-theoretic tools and geometric arguments which are valid in the pseudoconvex realm, for instance : Hopf Lemma, pluri-subharmonic exhaustions, envelopes of function spaces, local maximum modulus principle, Stein neighborhood basis, *etc.*

To discuss the main elements of our approach, let us briefly explain the geometric setup of the proof of Theorem 1.1. The characteristic foliation has isolated singularities at the hyperbolic points, where it looks like the phase diagram of a saddle point. In particular there are four local separatrices accumulating orthogonally at each hyperbolic point. Hence we can decompose the 2-disc D as a union $D = T_D \cup D_o$, where T_D consists of the union of the hyperbolic points of D together with the separatrices issuing from them, and where $D_o := D \setminus T_D$ is the remaining open submanifold of D , contained in the totally real part of D . By H. Poincaré and I. Bendixson's theory, T_D is a tree of $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -smooth curves which contains no subset homeomorphic to the unit circle, *cf.* [D]. Accordingly, we decompose $K := K_{T_D} \cup C_o$, where $K_{T_D} := K \cap T_D$ is a proper closed subset of the tree T_D and where $C_o := K \cap D_o$ is a relatively closed subset of D_o .

The hard part of the proof, which was actually the starting point of the whole paper, will consist in removing the closed subset C_o of the 2-dimensional surface $S := D_o$ lying in $M \setminus T_D$. Thereafter the removal of the remaining part K_{T_D} will

be done by means of an investigation of the behaviour of the CR orbits near T_D , close in spirit to our previous methods in [MP1] (see Section 12 below for the details).

Let us formulate the first crucial part of the above argument as an independent theorem about the removal of closed subsets contained in a totally real surface S . We point out that now S may have *arbitrary topology*.

Theorem 1.2. *Let M be a $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -smooth globally minimal hypersurface in \mathbb{C}^2 , let $S \subset M$ be a $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -smooth surface, open or closed, with or without boundary, which is totally real at every point. Let C be a proper closed subset of S and assume that the following topological condition holds :*

$\mathcal{F}_S^c\{C\}$: *For every closed subset $C' \subset C$, there exists a simple $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -smooth curve $\gamma : [-1, 1] \rightarrow S$, whose range is contained in a single leaf of the characteristic foliation \mathcal{F}_S^c (obtained by integrating the characteristic line field $T^cM|_S \cap TS$), with $\gamma(-1) \notin C'$, $\gamma(0) \in C'$ and $\gamma(1) \notin C'$, such that C' lies completely in one closed side of $\gamma[-1, 1]$ with respect to the topology of S in a neighborhood of $\gamma[-1, 1]$.*

Then C is CR-, \mathcal{W} - and L^p -removable.

The condition $\mathcal{F}_S^c\{C\}$ is a *common condition* on C and on the characteristic foliation \mathcal{F}_S^c , namely on the relative disposition of \mathcal{F}_S^c with respect to C , not only on S ; an illustration may be found in FIGURE 2 below. In the strictly pseudoconvex context, this condition appeared implicitly during the course of the proofs given in [D]. Note that the relevance of the characteristic foliation had earlier been discovered in contact geometry, cf. [Be], [E]. It is interesting to notice that it reappears in the situation of Theorem 1.2, where the underlying distribution T^cM is allowed to be very far from contact.

As is known, it follows from a subcase of H. Poincaré and I. Bendixson's theory that if S is diffeomorphic to a real 2-disc or if $S = D_o$ as above, then $\mathcal{F}_S^c\{C\}$ is automatically satisfied for an arbitrary compact subset C of S . On the contrary, it may be not satisfied when for instance S is an annulus equipped with a radial foliation together with C containing a continuous closed curve around the hole of S . Crucially, it is elementary to construct an example of such an annulus which is truly nonremovable. Indeed, the small closed curve C which consists of the transversal intersection of a strictly convex boundary ∂D with a complex line close to a boundary point may be enlarged as a thin maximally real strip $S \subset \partial D$ which is diffeomorphic to an annulus; in this setting, C is obviously nonremovable and *the characteristic foliation is everywhere transversal to C* . Consequently, the geometric condition $\mathcal{F}_S^c\{C\}$ is the optimal one insuring automatic removability for all choices of M , S and C . Further examples of closed subsets in surfaces with arbitrary genus equipped with such foliations may be exhibited.

In the proof of Theorem 1.2, after some contraction C' of C , we may assume that no point of C' is locally removable (see Sections 2 and 3 below). Then the very assumption $\mathcal{F}_S^c\{C\}$ yields the existence of a characteristic segment $\gamma[-1, 1]$, such that C' lies on one side of $\gamma[-1, 1]$. Reasoning by contradiction, our aim is to show that there exists at least one special point $p \in C' \cap \gamma(-1, 1)$, which is

locally CR-, \mathcal{W} - and L^P -removable. The choice of such a point p , achieved in Section 5 below, will be nontrivial.

The strategy for the local removal of p is to construct an analytic disc A such that a segment of its boundary ∂A is attached to S and touches C' in only one point p . Several geometrical assumptions have to be met to ensure that a sufficiently rich family of deformations of A have boundaries disjoint from C' , that analytic extension along these discs is possible (i.e. appropriate moment conditions are satisfied), and that the union of these good discs is large enough to give analytic extension to a one-sided neighborhood of M : this is where the (semi)localization and the choice of the special point $p \in C'$ will be key ingredients. Let us explain why localization is crucial.

Working globally, the second author produced in [P2] a convenient disc by applying the powerful E. Bedford and W. Klingenberg theorem to an appropriate 2-sphere containing a neighborhood of the *entire* singularity C' . This method requires global properties of S like S being a totally real 2-disc, which ensures the existence of a nice Stein neighborhood basis of C' . Already for real discs with isolated hyperbolic points, it is not clear whether this argument can be generalized (however, we would like to mention that recent results of M. Slapar in [SI] indicate that this could be possible at least if the geometry near the hyperbolic points satisfies some additional assumptions). In the case where M is an arbitrary globally minimal hypersurface, where S has arbitrary topology and has complex tangencies, the reduction to E. Bedford and W. Klingenberg's theorem seems impossible, *cf.* the example of an unknotted nonfillable 2-sphere in \mathbb{C}^2 constructed by J.E. Fornæss and D. Ma in [FM]. Also, to the authors' knowledge, the possibility of filling by Levi-flat 3-spheres the (not necessarily generic) 2-spheres lying on a *nonpseudoconvex* hypersurface is a delicate open problem. In addition, for the higher codimensional generalization of Theorem 1.2, the idea of global filling seems to be irrelevant at present times, because no analog of the E. Bedford and W. Klingenberg theorem is known in dimension $n \geq 3$. As we aim to deal with surfaces S having arbitrary topology and to generalize these results in arbitrary codimension, we shall endeavour to firmly *localize the removability arguments*, using only small analytic discs.

Thus, our way to overcome these obstacles is to consider *local* discs A which are only partially attached to S . The delicate point is that we have at the same time (i) to control the geometry of ∂A near $p \in C'$ and (ii) to guarantee that the rest of the boundary stays in the region where holomorphic extension is already known. In fact, (ii) will be incorporated in our very special and tricky choice of $p \in C'$. For (i), we have to sharpen known existence theorems about partially attached analytic discs and to combine it with a careful study of the complex/real geometry of the pair (M, S) . Importantly, our construction of such analytic discs is achieved elementarily in a self-contained way. A precise description of the proof in the hypersurface case (only) may be found in Section 2 below. With some substantial extra work, we shall generalize this purely local strategy of proof to higher codimension.

To conclude with the removal of surfaces, let us formulate a more general version of Theorem 1.1, without the restricted topological assumption that S be diffeomorphic to a real disc. Applying Theorem 1.2 for the removal of $K \cap (S \setminus T_S)$ and a slight generalization of Theorem 4 (ii) in [MP1] for the removal of $K \cap T_S$ (more precisions will be given in §13 below), we shall obtain the following statement, implying Theorem 1.1 as a direct corollary.

Theorem 1.3. *Let M be a $C^{2,\alpha}$ -smooth globally minimal hypersurface in \mathbb{C}^2 , let $S \subset M$ be a $C^{2,\alpha}$ -smooth totally real surface, open or closed, with or without boundary, which is totally real outside a discrete subset of isolated complex tangencies which are hyperbolic in the sense of E. Bishop. Let T_S be the union of hyperbolic points of S together with all separatrices issued from hyperbolic points and assume that T_S does not contain any subset which is homeomorphic to the unit circle. Let K be a proper compact subset of S and assume that $\mathcal{F}_{S \setminus T_S}^c \{K \cap (S \setminus T_S)\}$ holds.*

Then K is CR-, \mathcal{W} - and L^p -removable.

As was already emphasized, our main motivation for this work was to devise a local strategy of proof for Theorems 1.1, 1.2 and 1.3 in order to generalize them to higher codimension. In fact, we will realize the program sketched above for generic submanifolds of CR dimension 1 and of arbitrary codimension. Thus, let M be a $C^{2,\alpha}$ -smooth globally minimal generic submanifold of codimension $(n - 1)$ in \mathbb{C}^n , hence of CR dimension 1, where $n \geq 2$. Let M^1 be a maximally real $C^{2,\alpha}$ -smooth one-codimensional submanifold of M which is generic in \mathbb{C}^n . As in the surface case, M^1 carries a characteristic foliation $\mathcal{F}_{M^1}^c$, whose leaves are the integral curves of the line distribution $TM^1 \cap T^c M|_{M^1}$. Of course the assumption that the singularity lies on one side of some characteristic segment is no longer reasonable. We will generalize it as a condition requiring (approximately speaking) that there be always a characteristic segment which is accessible from the complement of C in M^1 along one direction normal to the characteristic segment.

The generalization of Theorem 1.2, which is our principal result in this paper, is as follows.

Theorem 1.2'. *Let $M, M^1, \mathcal{F}_{M^1}^c$ be as above and let C be a proper closed subset of M . Assume that the following topological condition, meaning that C is not transversal to the characteristic foliation, holds :*

$\mathcal{F}_{M^1}^c \{C\}$: *For every closed subset $C' \subset C$, there exists a simple $C^{2,\alpha}$ -smooth curve $\gamma : [-1, 1] \rightarrow M^1$ whose range $\gamma[-1, 1]$ is contained in a single leaf of the characteristic foliation $\mathcal{F}_{M^1}^c$ with $\gamma(-1) \notin C'$, $\gamma(0) \in C'$ and $\gamma(1) \notin C'$, there exists a local $(n - 1)$ -dimensional transversal $R^1 \subset M^1$ to γ passing through $\gamma(0)$ and there exists a thin elongated open neighborhood V_1 of $\gamma[-1, 1]$ in M^1 such that if $\pi_{\mathcal{F}_{M^1}^c} : V_1 \rightarrow R^1$ denotes the semi-local projection parallel to the leaves of the characteristic foliation $\mathcal{F}_{M^1}^c$, then $\gamma(0)$ lies on the boundary, relatively to the topology of R^1 , of $\pi_{\mathcal{F}_{M^1}^c}(C' \cap V_1)$.*

Then C is CR-, \mathcal{W} - and L^p -removable.

The condition $\mathcal{F}_{M^1}^c\{C\}$, which is of course independent of the choice of the transversal R^1 and of the thin neighborhood V_1 , is illustrated in FIGURE 8 of §5.1 below ; clearly, in the case $n = 2$, it means that $C' \cap V_1$ lies completely in one side of $\gamma[-1, 1]$, with respect to the topology of M^1 , as written in the statement of Theorem 1.2. Applying some of our previous results in this direction ([MP1], [MP3]), we shall provide in the end of Section 13 below some formulations of applications of Theorem 1.2', close to being analogs of Theorem 1.3 in higher codimension.

Importantly, in order to let the geometric condition $\mathcal{F}_{M^1}^c\{C\}$ appear less mysterious and to argue that it provides the adequate generalization of Theorem 1.2 to higher codimension, in the last Section 14 below, we shall describe an example of M , M^1 and C in \mathbb{C}^3 violating the condition $\mathcal{F}_{M^1}^c\{C\}$, such that C is transversal to the characteristic foliation and is truly nonremovable. This example will be analogous in some sense to the example of a nonremovable annulus discussed after the statement of Theorem 1.2. Since there is no H. Poincaré and I. Bendixson theorem for foliations of 3-dimensional balls by curves, it will be even possible to insure that M and M^1 are diffeomorphic to real balls of dimension 4 and 3 respectively. We may therefore conclude that Theorem 1.2' provides the desirable answer to the (already cited *supra*) Problem 2.1 raised by B. Jöricke in [J5], p. 432.

To pursue the presentation of our results, let us comment the assumption that M be of codimension $(n - 1)$. Geometrically speaking, the study of closed singularities C lying in a one-codimensional generic submanifold M^1 of a generic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$ which is of CR dimension $m \geq 2$ is more simple. Indeed, thanks to the fact that M^1 is of CR dimension $m - 1 \geq 1$, there exist local Bishop discs *completely attached to M^1* , and this helps much in describing the envelope of holomorphy of a wedge attached to $M \setminus C$. On the contrary, in the case where M is of CR dimension 1, small analytic discs attached to a maximally real M^1 are (trivially) inexistent. This is why, in the proof of our main Theorems 1.2 and 1.2', we shall deal only with small analytic discs whose boundary is in part (only) contained in M^1 . Such discs are known to exist ; we would like to mention that historically speaking, the first construction of discs partially attached to maximally real submanifolds was exhibited by S. Pinchuk in [P], who developed the ideas of E. Bishop [Bi].

Finally we will test our main Theorem 1.2' in applications. First of all, we clarify its relation to known removability results in CR dimension greater than one. Here the motivation is simply that most questions of CR geometry should be reducible to CR dimension 1 by slicing. It turns out that the main known theorems about removable singularities, due to E. Chirka, E. L. Stout, and B. Jöricke for hypersurfaces, and by the authors in higher codimension ([P1], Theorem 1 about L^p -removability ; [M2], Theorem 3 about CR- and \mathcal{W} -removability) are all a rather direct consequence of Theorem 1.2'. Since these results have not yet been published in complete form, we take the occasion of including them in the present paper, *as a corollary of Theorem 1.2'*, yet devising a new geometric approach.

Theorem 1.4. *Let M be a $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -smooth globally minimal generic submanifold of \mathbb{C}^n of CR dimension $m \geq 2$ and of codimension $d = n - m \geq 1$, let $M^1 \subset M$ be a $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ -smooth one-codimensional submanifold which is generic in \mathbb{C}^n and let $C \subset M^1$ be a proper closed subset of M . Assume that the following condition holds :*

$\mathcal{O}_{M^1}^{CR}\{C\}$: *The closed subset C does not contain any CR orbit of M^1 . Then C is CR-, \mathcal{W} - and L^p -removable.*

Notice the difference with the case $m = 1$, where the analog of CR orbits would consist of characteristic curves : the condition $\mathcal{F}_{M^1}^c\{C\}$ does *not* say that C should not contain any maximal characteristic curve. In fact, we observe that there cannot exist a uniform removability statement covering both the case $m = 1$ and the case $m \geq 2$, whence Theorem 1.2' is stronger than Theorem 1.4. Indeed, the elementary example of a nonremovable circle in an annulus contained in the boundary of a strictly convex domain of \mathbb{C}^2 shows that C may be truly nonremovable whereas it does not contain any characteristic curve. In the strictly pseudoconvex hypersurface setting, it is well known that Hopf's Lemma implies that boundaries of Riemann surfaces contained in C (and also the track on C of its essential hull, cf. [D]) should be everywhere transversal to the characteristic foliation. Of course, this implies conversely that C cannot contain such boundaries (unless they are empty) if $\mathcal{F}_{M^1}^c\{C\}$ is satisfied. The reason why $\mathcal{F}_{M^1}^c\{C\}$ implies that C is removable also in the nonpseudoconvex setting and in arbitrary codimension will be appearant later. Finally, we mention that the L^p -removability of C in Theorem 1.4 holds more generally with no assumption of global minimality on M , as already noticed in [J5], [P1], [MP1]. However, since the case where M is not globally minimal essentially reduces to the consideration of its CR orbits, which are globally minimal by definition, we shall only deal with globally minimal generic submanifolds M throughout this paper.

As a final comment, we point out that, *because the previously known proofs of Theorem 1.4 were of local type, it is satisfactory to bring in this paper a purely local framework for the treatment of Theorems 1.1, 1.2, 1.3 and 1.2'.*

Our second group of applications concerns the classical edge of the wedge theorem. Typically one considers a maximally real edge E to which an open double wedge $(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$ is attached from opposite directions. One may interpret this configuration as a partial thickening of a generic CR manifold $M \subset E \cup \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ containing E as a generic hypersurface. The classical edge of the wedge theorem states that functions which are continuous on $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup E$ and holomorphic in $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ extend holomorphically to a neighborhood of E . Theorem 1.2' implies that it suffices to assume continuity outside a removable singularities of E . This allows us to derive an edge of the wedge theorem for meromorphic extension (Section 13 below).

This paper is divided in two parts : Part I contains the strategy per absurdum for the proof of Theorem 1.2', the construction of what we call a semi-local half-wedge and the choice of a special point to be removed locally. Part II contains the explicit construction of families of half-attached analytic discs, the end of proof

of Theorem 1.2' and the proofs of the various applications. The reader will find a more detailed description of the content of the paper in §2.16 below.

RÉFÉRENCES

- [A] AYRAPETIAN, R.A. : *Extending CR functions from piecewise smooth CR manifolds*. Mat. Sbornik **134** (1987), 108–118. Trad. in english in Math. USSR Sbornik **62** (1989), 1, 111–120.
- [BT] BAOUENDI, M.S. ; TREVES, F : *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields*, Ann. of Math. **113** (1981), no.2, 387–421.
- [BER] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Real submanifolds in complex space and their mappings*. Princeton Mathematical Series, **47**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999, xii+404 pp.
- [BK] BEDFORD, E. ; KLINGENBERG, W. : *On the envelope of holomorphy of a 2-sphere in \mathbb{C}^2* , J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 623–646.
- [Be] BENNEQUIN, D. : *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque 107/108, 87–161, 1983.
- [Bi] BISHOP, E. : *Differentiable manifolds in complex Euclidean space*, Duke Math. J. **32** (1965), 1–22.
- [Bo] BOGGESS, A. : *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991, xviii+364 pp.
- [CLN] CAMACHO, C. ; LINS NETO, A. : *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [CS] CHIRKA, E.M. ; STOUT, E.L. : *Removable singularities in the boundary*. Contributions to complex analysis and analytic geometry, 43–104, Aspects Math., E26, Vieweg, Braunschweig, 1994.
- [DS] DINH, T.C. ; SARKIS, F. : *Wedge removability of metrically thin sets and application to the CR meromorphic extension*. Math. Z. **238** (2001), no.3, 639–653.
- [D] DUVAL, J. : *Surfaces convexes dans un bord pseudoconvexe*, Colloque d'Analyse Complexe et Géométrie, Marseille, 1992 ; Astérisque **217**, Soc. Math. France, Montrouge, 1993, 6, 103–118.
- [E] ELIASHBERG, Y. : *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. **98** (1989), no. 3, 623–637.
- [FM] FORNÆSS, J.E. ; MA, D. : *A 2-sphere in \mathbb{C}^2 that cannot be filled in with analytic discs*, International Math. Res. Notices, 1995, no. 1, 17–22.
- [FS] FORSTNERIČ, F. ; STOUT, E.L. : *A new class of polynomially convex sets*, Ark. Mat. **29** (1991), 52–62.
- [HT] HANGES, N. ; TREVES, F. : *Propagation of holomorphic extendability of CR functions*, Math. Ann. **263** (1983), 157–177.
- [Ha] HARTMAN, P. : *Ordinary Differential Equations*. Birkhäuser, Boston 1982.
- [HL] HARVEY, R. ; LAWSON, B. : *On boundaries of complex analytic varieties*. Ann. of Math., I : **102** (1975), no.2, 233–290 ; II : **106** (1977), no.2, 213–238.
- [I] IVASHKOVITCH, S.M. ; *The Hartogs-type extension theorem for meromorphic maps into compact Kähler manifolds*, Invent. Math., **109** (1992), no.1, 47–54.
- [J1] JÖRICKE, B. : *Removable singularities of CR-functions*, Ark. Mat. **26** (1988), 117–143.
- [J2] JÖRICKE, B. : *Deformation of CR-manifolds, minimal points and CR-manifolds with the microlocal analytic extension property*, J. Geom. Anal. **6** (1996), no.4, 555–611.
- [J3] JÖRICKE, B. : *Local polynomial hulls of discs near isolated parabolic points*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), no.3, 789–826.

- [J4] JÖRNICKE, B. : *Boundaries of singularity sets, removable singularities, and CR-invariant subsets of CR-manifolds*, J. Geom. Anal. **9** (1999), no.2, 257–300.
- [J5] JÖRNICKE, B. : *Removable singularities of L^p CR functions on hypersurfaces*, J. Geom. Anal. **9** (1999), no.3, 429–456.
- [JS] JÖRNICKE, B. ; SHCHERBINA, N. : *A nonremovable generic 4-ball in the unit sphere of \mathbb{C}^3* , Duke Math. J. **102** (2000), no.1, 87–100.
- [JP] JÖRNICKE, B. ; PORTEN, E. : *Hulls and analytic extension from nonpseudoconvex boundaries*, U.U.M.D. Report 2002 :19, Uppsala University, 38 pp., 2002.
- [KR] KYTMANOV, A.M. ; REA, C. : *Elimination of L^1 singularities on Hölder peak sets for CR functions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Classe di Scienze, **22** (1995), 211–226.
- [L] LAURENT-THIÉBAUT, C. : *Sur l'extension des fonctions CR dans une variété de Stein*, Ann. Mat. Pura Appl. **150** (1988), 141–151.
- [LP] LAURENT-THIÉBAUT, C. ; PORTEN, E. : *Analytic extension from nonpseudoconvex boundaries and $A(D)$ -convexity*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 2003, to appear.
- [Lu] LUPACCIOLU, G. : *Characterization of removable sets in strongly pseudoconvex boundaries*, Ark. Mat. **32** (1994), 455–473.
- [M1] MERKER, J. : *Global minimality of generic manifolds and holomorphic extendibility of CR functions*. Internat. Math. Res. Notices 1994, no.8, 329–342.
- [M2] MERKER, J. : *On removable singularities for CR functions in higher codimension*, Internat. Math. Res. Notices 1997, no.1, 21–56.
- [MP1] MERKER, J. ; PORTEN, P. : *On removable singularities for integrable CR functions*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), no.3, 805–856.
- [MP2] MERKER, J. ; PORTEN, P. : *On the local meromorphic extension of CR meromorphic functions*. Complex analysis and applications (Warsaw, 1997). Ann. Polon. Math. **70** (1998), 163–193.
- [MP3] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *On wedge extendability of CR meromorphic functions*, Math. Z. **241** (2002) 485–512.
- [P] PINCHUK, S. : *A boundary uniqueness theorem for holomorphic functions of several complex variables*, Mat. Zametki **15** (1974), 205–212.
- [P1] PORTEN, P. : *Analytic extension and removable singularities of the integrable CR-functions*, Preprint, Humboldt-Universität zu Berlin, 2000, no. 3, 18 pp.
- [P2] PORTEN, P. : *Totally real discs in nonpseudoconvex boundaries*, Ark. Mat. **41** (2003), no.1, 133–150.
- [P3] PORTEN, P. : *Habilitationsschrift*, August 2004.
- [Sa] SARKIS, F. : *CR-meromorphic extension and the non embeddability of the Andreotti-Rossi CR structure in the projective space*, Int. J. Math. **10** (1999), no.7, 897–915.
- [Sl] SLAPAR, M. : *On Stein neighborhood basis of real surfaces*, e-print arXiv :math.CV/0309218, september 2003.
- [St] STOUT, E.L. : *Removable singularities for the boundary values of holomorphic functions*. Several Complex Variables (Stockholm, 1987/1988), 600–629, *Math. Notes*, **38**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [Su] SUSSMANN, H.J. : *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973), 171–188.
- [Tr1] TRÉPREAU, J.-M. : *Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe C^2* , Invent. Math. **83** (1986), 583–592.
- [Tr2] TRÉPREAU, J.-M. : *Sur la propagation des singularités dans les variétés CR*, Bull. Soc. Math. Fr. **118** (1990), no.4, 403–450.

- [Trv] TREVES, F. : *Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields*, Palaiseau, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1981.
- [Tu1] TUMANOV, A.E. : *Extending CR-functions into a wedge*, Mat. Sbornik **181** (1990), 951–964. Trad. in English in Math. USSR Sbornik **70** (1991), 2, 385–398.
- [Tu2] TUMANOV, A.E. : *Connections and propagation of analyticity for CR functions*, Duke Math. J. **73** (1994), no.1, 1–24.
- [Tu3] TUMANOV, A.E. : *On the propagation of extendibility of CR functions*. Complex analysis and geometry (Trento, 1993), 479–498, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **173**, Dekker, New York, 1996.

[C] : Caractérisation différentielle explicite du système de particules newtoniennes libres. Dans ce manuscrit dont la rédaction est presque achevée, en effectuant une généralisation explicite vraiment non triviale de certains calculs de S. Lie, je résous un problème laissé ouvert dans les travaux de F. González-Gascón, A. González-López, M. Fels et P.J. Olver (Theorem 1.7 ci-dessous). Par une méthode analogue, je résous aussi un problème laissé ouvert par S. Chern (Theorem 1.23 ci-dessous). Après consultation de nombreux spécialistes actuels de la théorie de Chern-Moser, parmi lesquels je citerai X. Huang, A. Isaev, S. Ji (élève de S.-S. Chern ayant publié tous ses articles dans cette direction précise), S. Pinchuk, G. Schmalz, A. Spiro, A. Sukhov, et surtout S.M. Webster, j’ai eu la confirmation que le problème suivant était *considéré comme ouvert* : il s’agissait de caractériser *explicitement* la sphéricité locale d’une hypersurface analytique réelle Levi non-dégénérée, et de caractériser la platitude du système complètement intégrable d’équations aux dérivées partielles associées. C. Bièche et moi-même avons fait appel à la collaboration de S. Neut et de M. Petitot au *Laboratoire d’Informatique Fondamentale de Lille 1 (LIFL)* sur ce problème. Deux jours avant de participer au jury de la thèse de S. Neut, en passant à la bibliothèque de l’ENS Ulm, j’ai découvert le 14 octobre 2003 que ces questions avaient été essentiellement résolues par M. Hachtroudi dans sa thèse, achevée sous la direction d’Élie Cartan en 1937. Historiquement et scientifiquement parlant, on peut trouver regrettable, que S.-S. Chern, dans son célèbre article en collaboration avec J.K. Moser, cite la thèse de M. Hachtroudi sans information précise, alors qu’il s’en inspire directement, et passe sous silence les résultats beaucoup plus précis que M. Hachtroudi avait obtenus.

Heureusement, ma méthode suit les traces de la théorie de S. Lie, et non celle de la théorie de É. Cartan ; mes calculs massifs, explicites et délicats sont donc apparemment nouveaux. Par ailleurs, M. Hachtroudi travaille seulement avec un système différentiel, jamais avec la sous-variété des solutions associée ; aussi toute la technologie de calculs manuels que j’ai élaborée sera réapplicable dans plusieurs situations nouvelles. Seul bémol : les textes écrits vont « gonfler », au point qu’il me sera sûrement difficile de faire publier mes résultats.

1.1. Motivation. Since the deep mathematical investigations of S. Lie (*see the first chapters of the historical monograph [H2001]*), the symmetry group of a system of partial differential equations is now understood as its very core, the most fundamental object attached to it, invariant and coordinate-free, analogous in a rigorous

sense to the Galois group of an algebraic equation and as well hidden behind the crude expression of the equation. In a specific class of differential systems, it is often of great interest to focus the mathematical attention on the most symmetric differential equations — namely on those having a group of maximal possible dimension — at least as a first step in classification.

For instance, according to an early and often cited theorem due to S. Lie, the Newtonian free particle equation $Y_{XX} = 0$, with one degree Y of freedom and one independent variable X ; we use the index notation to denote partial derivatives, is the unique (up to coordinate changes) second order ordinary differential equation which admits a point symmetry group of maximal dimension equal to eight; then its symmetry group is unique and consists of the full group of two-dimensional projective transformations. Sometimes, this equation is called *flat*, such a terminology being inspired by the notion of zero curvature in the sense of C.F. Gauss and B. Riemann, after that É. Cartan attached in [Ca1924] a projective connection, together with some curvature, to any second order differential equation, the class of equations equivalent to $Y_{XX} = 0$ being precisely characterized by the *vanishing* of the curvature. More importantly, S. Lie also obtained in 1883 an explicit characterization of the local equivalence to the Newtonian free particle equation with one degree of freedom $Y_{XX} = 0$, which appears to be rather fundamental, with respect to practical purposes.

Theorem 1.2. (Sophus LIE, [Lie1883], pp. 362–365) *Let $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} . Let $x \in \mathbb{K}$ and $y \in \mathbb{K}$. A local second order ordinary differential equation $y_{xx} = F(x, y, y_x)$ is equivalent under an invertible point transformation $(x, y) \mapsto (X(x, y), Y(x, y))$ to the free particle equation $Y_{XX} = 0$ if and only if the following two conditions are satisfied :*

- (i) $F_{y_x y_x y_x y_x} = 0$, or equivalently F is a degree three polynomial in y_x , namely there exist four functions G, H, L and M of (x, y) such that F can be written as

$$(1.3) \quad F(x, y, y_x) = G(x, y) + y_x \cdot H(x, y) + (y_x)^2 \cdot L(x, y) + (y_x)^3 \cdot M(x, y);$$

- (ii) *the four functions G, H, L and M satisfy the following system of two second order quasi-linear partial differential equations :*

$$(1.4) \quad \begin{cases} 0 = -2G_{yy} + \frac{4}{3}H_{xy} - \frac{2}{3}L_{xx} + \\ \quad \quad \quad + 2(GL)y - 2G_x M - 4GM_x + \frac{2}{3}HL_x - \frac{4}{3}HH_y, \\ 0 = -\frac{2}{3}H_{yy} + \frac{4}{3}L_{xy} - 2M_{xx} + \\ \quad \quad \quad + 2GM_y + 4G_y M - 2(HM)_x - \frac{2}{3}H_y L + \frac{4}{3}LL_x. \end{cases}$$

Notice that the second equation in (1.4) is obtained formally from the first equation in (1.4), by replacing $(G, H, L, M) \mapsto (-M, -L, -H, -G)$ and $(x, y) \mapsto (y, x)$.

The first part of this paper is devoted to a detailed exposition of the original proof of Theorem 1.2 due to S. Lie himself; in fact, to the author's knowledge, there is no modern restitution of this proof in the contemporary literature, whereas the description of an alternative proof of Theorem 1.2 by means of É. Cartan's equivalence method appears in the references [HK1989], [OL1995], [GTW1989], [NS2003]; *see* [Ste1982], [G1989], [OL1995] for background about É. Cartan's theory. We note that in these references (except notably [HK1989]), the already substantial computations are stopped just after the reduction to an $\{e\}$ -structure on a eight-dimensional (local) principal bundle over the three-dimensional first order jet space. The vanishing of two (among four) fundamental tensors in the structure equations of the obtained $\{e\}$ -structure yields two partial differential equations satisfied by the right hand side $F(x, y, y_x)$, which are equivalent to (i) and (ii) of Theorem 1.2. We note that with the help of Maple programming, L. Hsu and N. Kamran achieved in [HK1989] the complete reduction to an $\{e\}$ -structure *on the base* (not only on the principal bundle) in the simpler case of so-called *fiber-preserving* transformations, namely point transformations leaving invariant the "vertical" foliation $\{x = ct.\}$. In the classical reference [TR1896], applying S. Lie's theory of differential invariants (*cf.* [OL1995]) and S. Lie's group classification of second order differential equations, A. Tresse produces the complete list of differential invariants for each class of differential equation with fixed group, under general point transformations. To the author's knowledge, the complete confirmation of A. Tresse's results by means of É. Cartan's method has never been achieved, possibly because the computations are much harder than in S. Lie's theory; even a complete modern rewriting of A. Tresse's thesis would require a substantial amount of work.

In sum, we would like to point out that for just characterizing the flat equation $Y_{XX} = 0$, S. Lie's original proof in [Lie1883] is, *from the point of view of the size of computations*, much shorter than the reduction to an $\{e\}$ -structure through É. Cartan's method of equivalence. In the references [GTW1989], [OL1995], [NS2003], most straightforward intermediate computations for the reduction to an $\{e\}$ -structure are essentially left to the reader (as well as in most of É. Cartan's works), but they are consequent.

On the contrary, in this paper, since we want to provide *two* generalizations of S. Lie's Theorem 1.2, we shall *carefully detail each intermediate computational step*, seeking first the combinatorics of the formal calculations in the case $m = 1$ and devising then the underlying combinatorics for the case $m \geq 2$. Actually, the size of differential expressions is relatively impressive, as will become clear soon.

1.5. Systems of second-order ordinary differential equations. First of all, let $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} or more generally any field of characteristic zero equipped with a valuation, so that the local \mathbb{K} -analyticity of formal power series with coefficients in \mathbb{K} possesses a mathematical signification. Let $x \in \mathbb{K}$, let $m \geq 2$, let $y := (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{K}^m$ and let

$$(1.6) \quad y_{xx}^1(x) = F^1(x, y(x), y_x(x)), \dots, y_{xx}^m(x) = F^m(x, y(x), y_x(x))$$

be a collection of \mathbb{K} -analytic second order ordinary differential equations, possibly nonlinear, of the most general form. In [GG1983], it was shown that the Lie symmetry group of this system is at most of dimension $m^2 + 4m + 3$, with the upper bound attained for the flat system $Y_{XX}^j = 0, j = 1, \dots, m$. The infinitesimal Lie symmetry algebra of this system is isomorphic to $\mathfrak{sl}(m + 2, \mathbb{K})$. In [Ch1939] (for fiber-preserving transformations) and in [F1995] (for arbitrary point transformations), the É. Cartan method of equivalence is conducted through absorptions of torsion, normalizations and prolongations up to the reduction to an $\{e\}$ -structure. Because of their real complexity, the computations are achieved in a non-parametric way in these references. As a byproduct of the uniqueness of the obtained $\{e\}$ -structure for which all invariants vanish, it is deduced in [F1995] that the flat system $Y_{XX}^j = 0, j = 1, \dots, m$, is, up to equivalence, the only system of second order possessing a symmetry group of maximal dimension. Similar results appeared previously in [G1988], where an explicit necessary and sufficient condition for the local flatness of linear second order systems is given.

Our first main theorem provides the generalization of S. Lie's theorem to the case of $m \geq 2$ dependent variables. Before stating it, we would like to mention that, throughout this article, we shall *not* adopt the summation convention. Indeed, from our point of view, it is more convenient to see explicitly the classical summation symbol \sum when dealing with rather massive expressions, because it helps to see clear differences between apparently similar terms. (However, the reader used to the summation convention may well read the identities by dropping the sums, looking at repetitions of indices.) Also, we always put commas between the indices, to prevent ambiguities like : “does 11 mean “one-one” or “eleven” ?” ; finally, a partial differentiation of an indexed quantity is always appended in index notation, also separated from the indices by a comma : for instance $L_{l_1, l_3, y^{l_2}}^j$ denotes $\partial L_{l_1, l_3}^j / \partial y^{l_2}$.

Theorem 1.7. Suppose $m \geq 2$. A local system of m second order ordinary differential equations $y_{xx}^j = F^j(x, y, y_x), j = 1, \dots, m$, is equivalent under an invertible point transformation $(x, y) \mapsto (X(x, y), Y(x, y))$ to the free particle system $Y_{XX}^j = 0, j = 1, \dots, m$, if and only if the following two conditions are satisfied :

- (i) *There exist local \mathbb{K} -analytic functions $G^j, H_{l_1}^j, L_{l_1, l_2}^j$ and M_{l_1, l_2} , where $j, l_1, l_2 = 1, \dots, m$, enjoying the symmetries $L_{l_1, l_2}^j = L_{l_2, l_1}^j$ and $M_{l_1, l_2} = M_{l_2, l_1}$ and depending only on (x, y) such that the right hand side $F^j(x, y, y_x)$ may be written as the following specific cubic polynomial with respect to y_x :*

(1.8)

$$y_{xx}^j = G^j + \sum_{l_1=1}^m y_x^{l_1} H_{l_1}^j + \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m y_x^{l_1} y_x^{l_2} L_{l_1, l_2}^j + y_x^j \cdot \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m y_x^{l_1} y_x^{l_2} M_{l_1, l_2}.$$

- (ii) *The functions $G^j, H_{l_1}^j, L_{l_1, l_2}^j$ and M_{l_1, l_2} satisfy the following system of four families of first order partial differential equations :*

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= -2G_{y^{l_1}}^j + H_{l_1, x}^j + 2\delta_{l_1}^j G_{y^{l_2}}^{l_2} - \delta_{l_1}^j H_{l_2, x}^{l_2} + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^m G^k L_{l_1, k}^j - 2\delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m G^k L_{l_2, k}^{l_2} + \\ &+ \frac{1}{2} \delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m H_{l_2}^k H_k^{l_2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k H_k^j, \end{aligned} \right.$$

where the indices j, l_1 vary in $\{1, 2, \dots, m\}$;

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= L_{l_1, l_2, x}^j - \frac{1}{2} H_{l_1, y^{l_2}}^j - \frac{1}{3} \delta_{l_1}^j L_{l_2, l_2, x}^{l_2} - \frac{2}{3} \delta_{l_2}^j L_{l_1, l_1, x}^{l_1} + \frac{1}{6} \delta_{l_1}^j H_{l_2, y^{l_2}}^{l_2} + \\ &+ \frac{1}{3} \delta_{l_2}^j H_{l_1, y^{l_1}}^{l_1} + G^j M_{l_1, l_2} - \frac{1}{3} \delta_{l_1}^j G^{l_2} M_{l_2, l_2} - \frac{2}{3} \delta_{l_2}^j G^{l_1} M_{l_1, l_1} + \\ &+ \frac{1}{3} \delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m G^k M_{l_2, k} - \frac{1}{3} \delta_{l_2}^j \sum_{k=1}^m G^k M_{l_1, k} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m H_k^j L_{l_1, l_2}^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k L_{l_2, k}^j + \\ &+ \delta_{l_1}^j \left(\frac{1}{6} \sum_{k=1}^m H_k^{l_2} L_{l_2, l_2}^k - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^m H_{l_2}^k L_{l_2, k}^{l_2} \right) + \\ &+ \delta_{l_2}^j \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^m H_k^{l_1} L_{l_1, l_1}^k - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k L_{l_1, k}^{l_1} \right), \end{aligned} \right.$$

where the indices j, l_1, l_2 vary in $\{1, 2, \dots, m\}$;

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= L_{l_1, l_2, y^{l_3}}^j - L_{l_1, l_3, y^{l_2}}^j + \delta_{l_3}^j M_{l_1, l_2, x} - \delta_{l_2}^j M_{l_1, l_3, x} + \\ &+ \frac{1}{2} H_{l_3}^j M_{l_1, l_2} - \frac{1}{2} H_{l_2}^j M_{l_1, l_3} + \\ &+ \frac{1}{2} \delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m H_{l_3}^k M_{l_2, k} - \frac{1}{2} \delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m H_{l_2}^k M_{l_3, k} + \\ &+ \frac{1}{2} \delta_{l_3}^j \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k M_{l_2, k} - \frac{1}{2} \delta_{l_2}^j \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k M_{l_3, k} + \\ &+ \sum_{k=1}^m L_{l_1, l_3}^k L_{l_2, k}^j - \sum_{k=1}^m L_{l_1, l_2}^k L_{l_3, k}^j, \end{aligned} \right.$$

where the indices j, l_1, l_2, l_3 vary in $\{1, \dots, m\}$; and

$$(IV) \quad \left\{ 0 = M_{l_1, l_2, y^{l_3}} - M_{l_1, l_3, y^{l_2}} - \sum_{k=1}^m L_{l_1, l_2}^k M_{l_3, k} + \sum_{k=1}^m L_{l_1, l_3}^k M_{l_2, k}, \right.$$

where the indices l_1, l_2, l_3 vary in $\{1, \dots, m\}$.

Of course, the form of the right hand side in (1.8) is the analog of the form of the right hand side in (1.3) of S. Lie's theorem (however, we notice that the right hand side of (1.8) is not the most general degree three polynomial in the variables y_x^j , $j = 1, \dots, m$: some coefficients of the cubic terms vanish). On the contrary, whereas the system satisfied by the functions G, H, L and M was of second order in S. Lie's Theorem 1.2, for $m \geq 2$, the system satisfied by the functions $G^j, H_{l_1}^j, L_{l_1, l_2}^j$ and M_{l_1, l_2} is of first order.

We mention that we recover the main theorem of [G1988] in the linear case where $F^j := G_0^j(x) + \sum_{l=1}^m y^l G_{1,l}^j(x) + \sum_{l_1=1}^m y_x^{l_1} H_{l_1}^j(x)$: putting this expression in the system **(I)** (the three others vanish identically), one recovers the necessary and sufficient condition discovered in [G1988] for local flatness of linear systems. We also mention that in [F1995], the parametric computations are achieved after restriction to the identity of the (prolonged) (prolonged) G -structure, which lightens substantially the computations. The vanishing of the two tensors \tilde{P}_i^j and \tilde{S}_{ikl}^j at the identity of the structure group, namely, as computed in Lemma 4.1 of [F1995], yields (translating into our notation)

$$(1.9) \quad \begin{cases} 0 = (\tilde{S}_{ikl}^j)|_{\text{Id}} = F_{y_x^i y_x^k y_x^l}^j - \frac{1}{n+2} \sum_{l_1=1}^m \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \delta_{\sigma(l)}^j F_{y_x^{l_1} y_x^{\sigma(i)} y_x^{\sigma(k)}}^{l_1}, \\ 0 = (\tilde{P}_i^j)|_{\text{Id}} = \frac{1}{2} D(F_{y_x^i}^j) - F_{y^i}^j - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m F_{y_x^k}^j F_{y_x^i}^k - \\ \quad - \frac{1}{m} \delta_i^j \left[\frac{1}{2} D\left(\sum_{k=1}^m F_{y_x^k}^k\right) - \sum_{k=1}^m F_{y^k}^k - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m F_{y_x^k}^l F_{y_x^i}^l \right], \end{cases}$$

where we set $D := \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{l=1}^m y_x^l \frac{\partial}{\partial y^l} + \sum_{l=1}^m F^l \frac{\partial}{\partial y_x^l}$, and where $i, j, k, l = 1, \dots, m$. Strikingly, one may check that the first equation is equivalent to the form (1.8) and then that the second equation yields the (complicated) four families of first order partial differential equations **(I)**, **(II)**, **(III)** and **(IV)** of Theorem 1.7. Hence the necessary conditions found in [F1995] (whose sufficiency was open) were in fact also sufficient! This phenomenon may be explained as follows: as soon as the tensors \tilde{S}_{ikl}^j vanish, the systems enjoys a projective connection (appendix of [F1995]); with such a connection, the tensors \tilde{P}_i^j then transform according to a specific rule via tensorial rotation formulas and their general expression may be deduced from their expression at the identity (cf. [M2003]); a similar phenomenon has been observed in [B2003]).

Finally, even if the expressions (1.9) are more compact than the (equivalent) conditions in Theorem 1.7, we prefer the expressions of Theorem 1.7, since they are more explicit. If the reader prefers compact expressions and “short” theorems, (s)he may replace the conditions of Theorem 1.7 by (1.9).

1.10. Complete systems of second order partial differential equations in $n \geq 2$ independent variables. We shall also study a second generalization of S. Lie's

theorem to the case of one dependent variable $y \in \mathbb{K}$ and $n \geq 2$ independent variables $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Consider a complete system of local \mathbb{K} -analytic second order partial differential equations of the form

$$(1.11) \quad y_{x_{j_1} x_{j_2}}(x) = F^{j_1, j_2}(x, y(x), y_{x_1}(x), \dots, y_{x_n}(x)), \quad j_1, j_2 = 1, \dots, n,$$

where $F^{j_1, j_2} = F^{j_2, j_1}$. Of course, we assume that this system is completely integrable, namely that the vector field system associated to (1.11) in the second order jet space enjoys the Frobenius involutivity condition (*cf.* for instance [St2000], Ch. 1). Concretely, this integrability condition just amounts to say that

$$(1.12) \quad D_{x_{j_3}}(F^{j_1, j_2}) = D_{x_{j_2}}(F^{j_1, j_3}),$$

for all $j_1, j_2, j_3 = 1, \dots, n$, where, for $j = 1, \dots, n$, the D_{x_j} are the *total differentiation operators* defined by

$$(1.13) \quad D_{x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j} + y_{x_j} \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{l=1}^n F^{j, l} \frac{\partial}{\partial y_{x_l}}.$$

1.14. Motivation from Cauchy-Riemann geometry. The interest to such systems was raised in the early beginnings of the domain of research nowadays called *Cauchy-Riemann geometry* (CR geometry for short). One of the main purposes of this field is to study the invariants of real analytic hypersurfaces M in \mathbb{C}^{n+1} under the pseudo-group of biholomorphic transformations $(z, w) \mapsto (Z(z, w), W(z, w))$, where Z^1, \dots, Z^n, W are holomorphic functions of the $(n+1)$ complex variables (z, w) . Three classical founder memoirs of the subject are [P1907], [Se1931] and [Ca1932]. Let us recall how systems of the form (1.11) are naturally associated to real analytic hypersurfaces in \mathbb{C}^{n+1} , an observation firstly made by B. Segre in [Se1931] and then exploited further in [Ca1932], [Ch1975]. We refer the reader to [BER1999], Ch. 1, for elementary background about the local geometry of CR manifolds (however, in this reference, nothing can be found about differential symmetries and invariants of differential equations) and to [Su2001], [NS2003], [GM2003], [GM2004] for more about the canonical correspondence between CR manifolds and certain systems of partial differential equations.

In suitable local holomorphic coordinates $(z, w) = (z_1, \dots, z_n, w) \in \mathbb{C}^{n+1}$, such a real analytic hypersurface passing through the origin may be represented locally as the set of $(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1}$ satisfying a holomorphic graphed equation of the form

$$(1.15) \quad w = \bar{\Theta}(z, \bar{z}, \bar{w}),$$

where \bar{z}, \bar{w} are the complex conjugates of z, w , where $\bar{\Theta}(z, \bar{z}, \bar{w}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \sum_{k \in \mathbb{N}} \Theta_{\alpha, \beta, k} z^\alpha \bar{z}^\beta \bar{w}^k$ is a power series converging in some neighborhood of the origin in \mathbb{C}^{2n+1} which, together with its conjugate $\Theta(\bar{z}, z, w)$, satisfies the functional equation

$$(1.16) \quad w \equiv \bar{\Theta}(z, \bar{z}, \Theta(\bar{z}, z, w)),$$

stemming from the fact that M is a *real* hypersurface in \mathbb{C}^{n+1} . Replacing now \bar{z} and \bar{w} in (1.12) by new independent variables $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ and $w \in \mathbb{C}$, we may view the sets

$$(1.17) \quad \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} : w - \bar{\Theta}(z, \zeta, \xi) = 0\}$$

as a family of *complex hypersurfaces* (complex submanifolds of codimension one in \mathbb{C}^{n+1}) graphed over the z space and parametrized by $(\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Differentiating w with respect to z_k for $k = 1, \dots, n$, we get

$$(1.18) \quad w_{z_k} = \bar{\Theta}_{z_k}(z, \zeta, \xi).$$

In generic cases, the rank at $(\zeta, \xi) = (0, 0)$ of the mapping

$$(1.19) \quad (\zeta, \xi) \longmapsto (\bar{\Theta}(0, \zeta, \xi), \bar{\Theta}_{z_1}(0, \zeta, \xi), \dots, \bar{\Theta}_{z_n}(0, \zeta, \xi)) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

is maximal equal to $n + 1$; technically, this rank property holds if and only if the real analytic hypersurface is *Levi-nondegenerate* at the origin, cf. [BER1999], Ch. 1 for the definition. In this circumstance, we can solve, by means of the complex analytic implicit function theorem, the parameters (ζ, ξ) with respect to the variables (z, w, w_z) , which yields

$$(1.20) \quad (\zeta, \xi) = \Psi(z, w, w_z),$$

for some local \mathbb{C}^{n+1} -valued holomorphic mapping Ψ . Finally, differentiating twice w with respect to $z_{j_1} z_{j_2}$ for $j_1, j_2 = 1, \dots, n$, and replacing (ζ, ξ) , we obtain

$$(1.21) \quad \begin{cases} w_{z_{j_1} z_{j_2}} = \bar{\Theta}_{z_{j_1} z_{j_2}}(z, \zeta, \xi) \\ \quad \quad \quad = \bar{\Theta}_{z_{j_1} z_{j_2}}(z, \Psi(z, w, w_z)) \\ \quad \quad \quad =: F^{j_1, j_2}(z, w, w_z). \end{cases}$$

In conclusion we obtain a system of the form (1.11), with different notations. Of course, the system (1.21) is completely integrable, just because $w(z) := \bar{\Theta}(z, \zeta, \xi)$ was the general solution from which it was constructed ! More information about the correspondence between a system of partial differential equations of the form (1.9) and an associated *submanifold of solutions* of equation $\{(z, w, \zeta, \xi) \in \mathbb{C}^4 : w - \bar{\Theta}(z, \zeta, \xi) = 0\}$ can be found in [GM2003], [M2004]. In particular, this reference contains a new theory of Lie symmetries of partial differential equations, valuable in the \mathbb{K} -analytic category, by concentrating on the submanifold of solutions instead of looking at the skeleton associated to the differential system in the suitable jet space.

The equivalence method for Levi-nondegenerate hypersurfaces in \mathbb{C}^2 has been considered by É. Cartan in part II of [Ca1932]. In fact, immediately after he discovered the observation of B. Segre that a second order ordinary differential equation may be associated to a real analytic hypersurface in \mathbb{C}^2 , É. Cartan, who knew perfectly S. Lie's and A. Tresse's works on differential equations, started his memoir on pseudo-conformal invariants of hypersurfaces in \mathbb{C}^2 . Later, in 1974, S.-S. Chern (a student of É. Cartan) jointly with J.K. Moser studied in [CM1974] the equivalence method for Levi nondegenerate hypersurfaces in \mathbb{C}^{n+1} for $n \geq 2$. In

1975, with slight modifications, S.-S. Chern applied in [Ch1975] the equivalence method for complete, completely integrable systems of partial differential equations of the form (1.21), coming from a hypersurface. As observed in [Fa1980], not all systems of the form (1.11) come from a real analytic hypersurface, but the reduction to an $\{e\}$ -structure achieved by S.-S. Chern in [Ch1975] is valid, without almost any modification, for all systems of the general form (1.11), *cf.* also [BN2002] and [B2003]. It is important to emphasize that S.-S. Chern's computations have never been achieved in a parametric way, though there has been a vivid continuation of S.-S. Chern and J.K. Moser's work on real analytic hypersurfaces (*cf.* for instance [Kr1987], [Vi1990], [Is1996], [We1977] and the references therein).

Recently, S. Neut implemented in [N2003] a general Maple program for the É. Cartan equivalence algorithm. The program takes a differential system as input, the appropriate G -structure (which depends on the chosen class of transformations : fiber preserving, point, contact, Bäcklund, *etc.*) and it provides an associated $\{e\}$ -structure together with all relations between the tensors appearing in the final structure equations. The main fruit of this program is the characterization of differential systems for which all invariant tensors on the $\{e\}$ -structure are constant, hence having in most cases a symmetry group of maximal possible dimension. For the time being, the program does not incorporate the discussion of the relations between invariants in the case of lower dimensional symmetry groups, as is done for instance in [HK1989]. In the case $n = 2$, this program has been applied to the system (1.11). After three hours of Maple computations, the $\{e\}$ -structure obtained in a non-parametric way by S.-S. Chern in [Ch1975] is obtained parametrically by the computer machine (with slightly different normalizations) together with all covariant differential relations between the tensors, whose storage costs 1.1 Mo of memory ; one gets that the differential algebra generated by the tensors is generated by a single tensor, over a family of forty eight. The vanishing of this tensor yields the following linear system of second order partial differential equations satisfied by the right members $F^{j_1, j_2}(x, y, y_x)$, extracted from [BN2002] and [N2003] :

$$(1.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial^2 F^{1,1}}{\partial y_{x_2} y_{x_2}}, \\ 0 = \frac{\partial^2 F^{2,2}}{\partial y_{x_1} y_{x_1}}, \\ 0 = \frac{\partial^2 F^{1,2}}{\partial y_{x_2} y_{x_2}} - \frac{\partial^2 F^{1,1}}{\partial y_{x_1} y_{x_2}}, \\ 0 = \frac{\partial^2 F^{1,2}}{\partial y_{x_1} y_{x_1}} - \frac{\partial^2 F^{2,2}}{\partial y_{x_1} y_{x_2}}, \\ 0 = \frac{\partial^2 F^{1,1}}{\partial y_{x_1} y_{x_1}} - 4 \frac{\partial^2 F^{1,2}}{\partial y_{x_1} y_{x_2}} + \frac{\partial^2 F^{2,2}}{\partial y_{x_2} y_{x_2}}. \end{array} \right.$$

In fact, this system is easily seen to be equivalent to the formulation of Theorem 1.23 just below, in the case $n = 2$. In the case $n = 3$, the computer data are so huge that the complete explicit computation of the $\{e\}$ -structure does not succeed.

Our second main theorem treats the general case $n \geq 2$ by means of hand computations and following the strategy of S. Lie, cf. [M2003]. Since the proof resembles a lot to the proof of Theorem 1.7, we shall not write down the details. We would like to mention that C. Bièche also obtained recently in [B2003] a complete proof of this theorem by computing explicitly some (and sufficiently many) of the tensors of S.-S. Chern. But of course, she does not compute all the tensors explicitly, which does the computer program in the case $n = 2$. Finally, we mention that for general $n \geq 2$, the *only if* part of Theorem 1.23 just below was established in [BN2002], [N2003] (in a slightly different form) and that the “if” part was stated there as an open problem.

Theorem 1.23. ($n = 2$: [BN2002] [N2003]; general $n \geq 2$: [B2003], [M2003])
Suppose $n \geq 2$. *The above system (1) is equivalent to the system $Y_{X_{j_1} X_{j_2}} = 0$, $j_1, j_2 = 1, \dots, n$ if and only if there exist arbitrary functions G_{j_1, j_2} , $H_{j_1, j_2}^{k_1}$, $L_{j_1}^{k_1}$ and M^{k_1} of the variables (x_1, \dots, x_n, y) for $1 \leq j_1, j_2, k_1 \leq n$ satisfying (of course !) the two symmetry conditions $G_{j_1, j_2} = G_{j_2, j_1}$ and $H_{j_1, j_2}^{k_1} = H_{j_2, j_1}^{k_1}$, such that the equation (1.11) is of the specific cubic polynomial form*

$$(1.24) \quad \left\{ y_{x_{j_1} x_{j_2}} = G_{j_1, j_2} + \sum_{k_1=1}^n y_{x_{k_1}} \left(H_{j_1, j_2}^{k_1} + \frac{1}{2} y_{x_{j_1}} L_{j_2}^{k_1} + \frac{1}{2} y_{x_{j_2}} L_{j_1}^{k_1} + y_{x_{j_1}} y_{x_{j_2}} M^{k_1} \right) \right\},$$

for $j_1, j_2 = 1, \dots, n$.

Again, the explicit form of the right hand side of (1.24) is the analog of the form of the right hand side of (1.3) in S. Lie’s Theorem 1.2; however, we again notice that the right hand side of (1.24) is not the most general degree three polynomial in the variables y_{x_j} . Apparently, the statement seems to be much simpler (and perhaps mysterious or maybe false !) than the statement of Theorem 1.7 above, and even simpler than S. Lie’s Theorem 1.2 in the case $n = 1$, because the analog of conditions (ii) there do not appear in Theorem 1.23. However, by generalizing S. Lie’s computations for the proof of Theorem 1.2, we shall see that there exists in fact a system of *second order partial* differential equations satisfied by the functions G_{j_1, j_2} , $H_{j_1, j_2}^{k_1}$, $L_{j_2}^{k_1}$ and M^{k_1} which is the combinatorial counterpart of the second order system appearing in (ii) of Theorem 1.2. By a strange phenomenon, this system of second order partial differential equations is in fact a consequence of the compatibility conditions (1.12). A similar phenomenon also holds for Theorem 1.7 : there also exists a system of *second order partial* differential equations satisfied by the functions G^j , $H_{l_1}^j$, L_{l_1, l_2}^j and M_{l_1, l_2} which is the combinatorial counterpart of the second order system appearing in (ii) of Theorem 1.2 and which is a consequence of the four families of first order partial differential equations (I), (II), (III) and (IV).

Hence to see explicitly what is the analog of **(I)**, **(II)**, **(III)** and **(IV)** in Theorem 1.23, we must develop the compatibility conditions (1.12), in the case where the right hand sides F^{j_1, j_2} are given by the cubic polynomial (1.24). After some nontrivial manual work, we obtain the equation (1.12) in length :

$$\begin{aligned}
(1.25) \quad 0 &= G_{j_1, j_2, x_{j_3}} - G_{j_1, j_3, x_{j_2}} + \sum_{k_1=1}^n H_{j_1, j_2}^{k_1} G_{k_1, j_3} - \sum_{k_1=1}^n H_{j_1, j_3}^{k_1} G_{k_1, j_2} + \\
&+ \sum_{k_1=1}^n y_{x_{k_1}} \left[\begin{aligned}
&\delta_{j_3}^{k_1} G_{j_1, j_2, y} - \delta_{j_2}^{k_1} G_{j_1, j_3, y} + H_{j_1, j_2, x_{j_3}}^{k_1} - H_{j_1, j_3, x_{j_2}}^{k_1} + \\
&+ \frac{1}{2} G_{j_1, j_3} L_{j_2}^{k_1} - \frac{1}{2} G_{j_1, j_2} L_{j_3}^{k_1} + \\
&+ \frac{1}{2} \delta_{j_1}^{k_1} \sum_{k_2=1}^n G_{k_2, j_3} L_{j_2}^{k_2} - \frac{1}{2} \delta_{j_1}^{k_1} \sum_{k_2=1}^n G_{k_2, j_2} L_{j_3}^{k_2} + \\
&+ \frac{1}{2} \delta_{j_2}^{k_1} \sum_{k_2=1}^n G_{k_2, j_3} L_{j_1}^{k_2} - \frac{1}{2} \delta_{j_3}^{k_1} \sum_{k_2=1}^n G_{k_2, j_2} L_{j_1}^{k_2} + \\
&+ \sum_{k_2=1}^n H_{k_2, j_3}^{k_1} H_{j_1, j_2}^{k_2} - \sum_{k_2=1}^n H_{k_2, j_2}^{k_1} H_{j_1, j_3}^{k_2}
\end{aligned} \right] + \\
&+ \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n y_{x_{k_1}} y_{x_{k_2}} \left[\begin{aligned}
&\delta_{j_3}^{k_2} H_{j_1, j_2, y} - \delta_{j_2}^{k_2} H_{j_1, j_3, y} + \frac{1}{2} \delta_{j_2}^{k_2} L_{j_1, x_{j_3}}^{k_1} + \frac{1}{2} \delta_{j_1}^{k_2} L_{j_2, x_{j_3}}^{k_1} - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{j_3}^{k_2} L_{j_1, x_{j_2}}^{k_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_1}^{k_2} L_{j_3, x_{j_2}}^{k_1} + \\
&+ \delta_{j_2}^{k_2} G_{j_1, j_3} M^{k_1} - \delta_{j_3}^{k_2} G_{j_1, j_2} M^{k_1} + \\
&+ \delta_{j_1, j_2}^{k_1, k_2} \sum_{k_3=1}^n G_{k_3, j_3} M^{k_3} - \delta_{j_1, j_3}^{k_1, k_2} \sum_{k_3=1}^n G_{k_3, j_2} M^{k_3} + \\
&+ \frac{1}{2} \delta_{j_1}^{k_1} \sum_{k_3=1}^n H_{k_3, j_3}^{k_2} L_{j_2}^{k_3} - \frac{1}{2} \delta_{j_1}^{k_1} \sum_{k_3=1}^n H_{k_3, j_2}^{k_2} L_{j_3}^{k_3} + \\
&+ \frac{1}{2} \delta_{j_2}^{k_1} \sum_{k_3=1}^n H_{k_3, j_3}^{k_2} L_{j_1}^{k_3} - \frac{1}{2} \delta_{j_3}^{k_1} \sum_{k_3=1}^n H_{k_3, j_2}^{k_2} L_{j_1}^{k_3} + \\
&+ \frac{1}{2} \delta_{j_3}^{k_1} \sum_{k_3=1}^n H_{j_1, j_2}^{k_3} L_{k_3}^{k_2} - \frac{1}{2} \delta_{j_2}^{k_1} \sum_{k_3=1}^n H_{j_1, j_3}^{k_3} L_{k_3}^{k_2}
\end{aligned} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \sum_{k_3=1}^n y_{x_{k_1}} y_{x_{k_2}} y_{x_{k_3}} \left[\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \delta_{j_3, j_1}^{k_3, k_2} L_{j_2, y}^{k_1} - \frac{1}{2} \delta_{j_2, j_1}^{k_3, k_2} L_{j_3, y}^{k_1} + \\
 & + \delta_{j_2, j_1}^{k_3, k_2} M_{x_{j_3}}^{k_1} - \delta_{j_3, j_1}^{k_3, k_2} M_{x_{j_2}}^{k_1} + \\
 & + \delta_{j_2, j_1}^{k_3, k_1} \sum_{k_4=1}^n H_{k_4, j_3}^{k_2} M^{k_4} - \\
 & - \delta_{j_3, j_1}^{k_3, k_1} \sum_{k_4=1}^n H_{k_4, j_2}^{k_2} M^{k_4} + \\
 & + \frac{1}{4} \delta_{j_1, j_3}^{k_1, k_3} \sum_{k_4=1}^n L_{k_4}^{k_2} L_{j_2}^{k_4} - \\
 & - \frac{1}{4} \delta_{j_1, j_2}^{k_1, k_3} \sum_{k_4=1}^n L_{k_4}^{k_2} L_{j_3}^{k_4}
 \end{aligned} \right].
 \end{aligned}$$

By identifying to zero all the coefficients of this cubic polynomial, we obtain a system of four families, **(I')**, **(II')**, **(III')** and **(IV')** of first order partial differential equations satisfied by the functions G_{j_1, j_2} , $H_{j_1, j_2}^{k_1}$, $L_{j_1}^{k_1}$ and M^{k_1} . Strikingly, this system is analogous to the system obtained in Theorem 1.7, by the notational correspondence

$$(1.26) \quad (G_{j_1, j_2}, H_{j_1, j_2}^{k_1}, L_{j_1}^{k_1}, M^{k_1}) \longmapsto (-M^{l_1, l_2}, -L_{l_1, l_2}^j, -H_{l_1}^j, -G^j)$$

and by the exchange of coordinates $(x_1, \dots, x_n, y) \mapsto (y^1, \dots, y^m, x)$, in the case $n = m$ of course. Based on this intuitive observation, one may then deduce formally that Theorem 1.23 is a corollary of Theorem 1.7, and conversely (cf. [M2003]).

RÉFÉRENCES

- [BER1999] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Real submanifolds in complex space and their mappings*. Princeton Mathematical Series, **47**, Princeton University Press Princeton, NJ, 1999, xii+404 pp.
- [B2003] BIÈCHE, C. : *Le problème d'équivalence locale pour un système scalaire complet d'équations aux dérivées partielles d'ordre deux à n variables indépendantes*, Preprint, 25 pp., septembre 2003.
- [BN2002] BIÈCHE, C. ; NEUT, S. : *Sur le problème d'équivalence de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2*, Preprint, 2002.
- [BK1989] BLUMAN, G.W. ; KUMEI, S. : *Symmetries and differential equations*, Springer-Verlag, New-York, 1989.
- [Ca1924] CARTAN, É. : *Sur les variétés à connexion projective*, Bull. Soc. Math. France **52** (1924), 205–241.
- [Ca1932] CARTAN, É. : *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, I*, Ann. Math. Pura Appl. **11** (1932), 17–90 ; *II*, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa **I** (1932), 333–354.
- [Ch1939] CHERN, S.-S. : *Sur la géométrie d'un système d'équations différentielles du second ordre*, Bull. Sci. Math. **63** (1939), 206–212.

- [Ch1975] CHERN, S.-S. : *On the projective structure of a real hypersurface in \mathbb{C}^{n+1}* , Math. Scand. **36** (1975), 74–82.
- [CM1974] CHERN, S.S. ; MOSER, J.K. : *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), no.2, 219–271.
- [Fa1980] FARAN, J.J. : *Segre families and real hypersurfaces*, Invent. Math. **60** (1980), no. 2, 135–172.
- [F1995] FELS, M. : *The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations*, Proc. London Math. Soc. **71** (1995), 221–240.
- [G1989] GARDNER, R.B. : *The method of equivalence and its applications*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **58** (SIAM, Philadelphia, 1989), 127 pp.
- [GM2003] GAUSSIER, H. ; MERKER, J. : *Symmetries of partial differential equations*, J. Korean Math. Soc. **40** (2003), no. 3, 517–561.
- [GM2004] GAUSSIER, H. ; MERKER, J. : *Nonalgebraizable real analytic tubes in \mathbb{C}^n* , Math. Z. **247** (2004), no. 2, 337–383.
- [GG1983] GONZÁLEZ-GASCÓN, F. ; GONZÁLEZ-LÓPEZ, A. : *Symmetries of differential equations, IV*, J. Math. Phys. **24** (1983), 2006–2021.
- [G1988] GONZÁLEZ-LÓPEZ, A. : *Symmetries of linear systems of second-order differential equations*, J. Math. Phys. **29** (1988), 1097–1105.
- [GO1988] GONZÁLEZ-LÓPEZ, A. : *Symmetries of linear systems of second order differential equations*, J. Math. Phys. **29** (1988), 1097–1105.
- [GTW1989] GRISSOM, C. ; THOMPSON, G. ; WILKENS, G. : *Linearization of second order ordinary differential equations via Cartan's equivalence method*, J. Diff. Eq. **77** (1989), 1–15.
- [H2001] HAWKINS, T. : *Emergence of the theory of Lie groups*, Springer, Berlin, 2001.
- [HK1989] HSU, L. ; KAMRAN, N. : *Classification of second order ordinary differential equations admitting Lie groups of fibre-preserving point symmetries*, Proc. London Math. Soc. **58** (1989), no. 3, 387–416.
- [IB1992] IBRAGIMOV, N.H. : *Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics*, Russian Math. Surveys **47** :4 (1992), 89–156.
- [Is1996] ISAEV, A.V. : *Rigid spherical hypersurfaces*, Complex Variables Theory Appl. **31** (1996), no. 2, 143–163.
- [Kr1987] KRZHILIN, N.G. : *Description of the local automorphism groups of real hypersurfaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 749–758, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Lie1883] LIE, S. : *Klassifikation und Integration vo gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y , die eine Gruppe von Transformationen gestaten I-IV*. In : Gesammelte Abhandlungen, Vol. 5, B.G. Teubner, Leipzig, 1924, pp. 240–310 ; 362–427, 432–448.
- [M2003] MERKER, J. : *hand manuscript I*, 212 pp., May – July 2003 ; *hand manuscript II*, 114 pp., August 2003 ; *hand manuscript III*, 47 pp., September 2003.
- [M2004] MERKER, J. : *Symmetries of completely integrable systems of analytic partial differential equations*, in preparation.
- [N2003] NEUT, S. : *Implantation et nouvelles applications de la méthode d'équivalence d'Élie Cartan*, Thèse, Université Lille 1, October 2003.
- [NS2003] NUROWSKY, P. ; SPARLING, G.A.J. : *3-dimensional Cauchy-Riemann structures and 2nd order ordinary differential equations*, e-print arXiv :math.DG/0306331.
- [OL1986] OLVER, P.J. : *Applications of Lie groups to differential equations*. Springer Verlag, Heidelberg, 1986.

- [OL1995] OLVER, P.J. : *Equivalence, Invariance and Symmetries*. Cambridge, Cambridge University Press, 1995, xvi+525 pp.
- [P1907] POINCARÉ, H. : *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser **23** (1907), 185–220.
- [Se1931] SEGRE, B. : *Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudoconforme*, Rend. Acc. Lincei, VI, Ser. **13** (1931), 676–683.
- [Ste1982] STERNBERG, S. : *Differential geometry*. Chelsea, New York, 1982.
- [St2000] STORMARK, O. : *Lie's structural approach to PDE systems*, Encyclopædia of mathematics and its applications, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, xv+572 pp.
- [Su2001] SUKHOV, A. : *Segre varieties and Lie symmetries*, Math. Z. **238** (2001), no.3, 483–492.
- [TR1896] TRESSE, A. : *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$* , Hirzel, Leipzig, 1896.
- [Vi1990] VITUSHKIN, A.G. : *Holomorphic mappings and the Geometry of Hypersurfaces*, Encyclopædia of Mathematical Sciences, Volume 7, Several Complex Variables, I, Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. 159–214.
- [We1977] WEBSTER, S.M. : *Pseudo-hermitian structures on a real hypersurface*, J. Differential Geom. **13** (1978), no. 1, 25–41.

[G] : Deux caractérisations des sous-ensembles analytiques réels de \mathbb{C}^n ne contenant pas de courbes holomorphes. Il s'agit d'un théorème dont j'ai essentiellement vérifié la véracité, mais que je n'ai pas encore eu le temps d'écrire soigneusement. On trouvera ci-dessous un résumé rapide du résultat, qui présente des analogies structurales profondes avec le théorème d'aplatissement local de M. Lejeune, H. Hironaka et B. Teissier. J'ai communiqué oralement ce résultat à S. Pinchuk, en visite à Marseille en juin 2004, et il l'a trouvé intéressant, car c'est la première fois (d'après lui) qu'il entendait parler d'un critère géométrique pour vérifier l'inexistence de courbes holomorphes contenues dans un sous-ensemble analytique réel. D'après lui, cette condition d'inexistence était mal comprise auparavant. Et les spécialistes connaissent la rareté des appréciations positives de S. Pinchuk.

If M is a local real analytic hypersurface of \mathbb{C}^n defined by an equation $r(z, \bar{z}) = 0$, if $p \in M$, the *order of contact of M with holomorphic curves at p* (defined according to De Angelo) is the sup over all local holomorphic curves $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ with $f(0) = p$ of the quotient : $\text{order}_0(r \circ f) / \text{order}_0(f)$. This number is called the *type of M at p* and is denoted by $\Delta(M, p)$.

Being independent of the choice of a defining function, this concept has nonetheless some defects. The type is neither a upper nor a lower semi-continuous function of p , whereas good numerical invariants about analytico-geometrical (possibly singular) objects should, as usual, be upper semicontinuous in one or the other sense. Fortunately, De Angelo was able to prove that finiteness of the type at a point entails finiteness of the type at every nearby point, even in the C^∞ realm.

But the main flaw of this definition is that *the type is uncomputable*, except in very particular specially cooked examples. This is unavoidable, since the quantification is made over the infinite family of all local complex curves passing through

p , which is a huge family. Consequently, this definition may perhaps be meaningful and useful in the realm of pure, abstract functional analysis, but definitely not in the realm of concrete, intuitive geometry. Most of all, as the finiteness of the type is known to be equivalent to the nonexistence of complex curves lying inside M , a good definition of type should provide an algorithmic mean of deciding whether there exist complex curves sitting in an arbitrary real analytic subset.

My purpose is to provide *two new and different constructive algorithms*. The first one follows by a special application of the so-called *Cartan-Kähler* algorithm, in the vector field version restituted by E. Vessiot in 1924. In short, considering the system of CR vector fields \mathbb{L} tangent to a generic submanifold, this (quite general) algorithm enable ones to chase all the subsystems $\mathbb{L}' \subset \mathbb{L}$ having the Frobenius property, hence which yield a foliation of M by complex submanifolds. The general solution usually depends on a certain computable number of functions, whose number of variables is also computable. This algorithm works at a Zariski-generic point, because some explicit functional determinants have to be nonvanishing. In particular, under the assumption that there are no complex curves lying inside, thanks to a stratification of the singular lower dimensional locus at each step, one is able, after a finite number of steps organized along the branches of a finite tree, to conclude, in a *universally valid algorithmic manner*, that complex curves lying inside do not exist. More generally, the Cartan-Vessiot-Kähler algorithm enables one also to find complex submanifolds and complex subfoliations of maximal dimension.

The second algorithm stems from a slight modification of S.M. Webster's celebrated 1978 geometric construction for the reflection principle. Let M be a real analytic subset of \mathbb{C}^n . After stratification, restriction to intrinsic complexification and localization, M is generic in \mathbb{C}^n . Consider the affine Grassmannian of all complex lines passing through all points $p \in \mathbb{C}^n$ as a new \mathbb{C}^{n_1} , in some suitable chart. Consider the set of all points $p \in M$ together with all complex lines passing through p which are tangent to M at p . The difference with S.M. Webster's construction is that one does not take whole the complex tangent planes $T_p^c M$, and the reason is quite simple : if there exists a complex curve lying inside M passing through a point p , its tangent complex line at p is of course contained in $T_p^c M$, but *one does not know in which direction exactly it is contained in $T_p^c M$* . This is why one has to consider all possible directions, namely all possible complex lines passing through p and contained in $T_p^c M$. However, for the reflection principle, it is sufficient to gather all complex tangent directions at once and to consider the map $p \mapsto (p, T_p^c M)$ (S.M. Webster's 1978 version, in fact equivalent to S. Pinchuk's 1975 analytical computations) or more generally the maps of k -th jets of Segre varieties (Diederich-Webster 1980). In the same appropriate chart, the set of points (p, ℓ_p) , where $p \in M$ and ℓ_p is an arbitrary complex line in $T_p^c M$, provides a real submanifold M^1 of \mathbb{C}^{n_1} . Every local complex curve inside M lifts to M^1 .

Theorem 5.1. *A real analytic subset M of \mathbb{C}^n does not contain complex curves if and only if :*

Loop algorithm :

□ *Stratify, choose a stratum, restrict to intrinsic complexification, localize at every point.*

□ *Construct the Grassmanian of complex tangent lines, gather all charts, pick up a chart, construct the lifted submanifold.*

After a finite number of steps :

□ *Get a finite tree of successive Grassmannian blowing-ups.*

□ *Each final leaf of the tree is a real analytic generic submanifold $N_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$, $j = 1, \dots, N_j$, equipped with a holomorphic projection map $\pi_j : N_j \rightarrow \mathbb{C}^{n_j}$ such that*

$$\bigcup_{j=1}^J \pi_j(N_j) = M.$$

Structure of the N_j 's : *each N_j is foliated by complex manifolds of dimension $m_j \geq 1$ [unavoidable, except if the CR dimension of the original M is equal to 1], every of which is mapped to a single point of M by π_j and most importantly, each N_j is **transversally maximally real**, in the sense that at every point $p_j \in N_j$, the complex tangent space $T_{p_j}^c N_j$ is completely absorbed by the “vertical” complex foliation.*

The inexistence of a local complex curve inside M is therefore obviously seen, since, if it existed, an open part of it would lift to at least one N_j , yielding a local complex submanifold A_j of N_j not contained a single leaf of the vertical complex foliation, which contradicts the transversal maximal reality of N_j .

Even if the Cartan-Vessiot-Kähler algorithm does not proceed in a way strictly equivalent to the second algorithm, there must exist deep links between the two algorithms, and this deserves to be well understood.

Applications of this geometric characterization could be expected (even if everything is up to know rather unclear), for instance for the study of optimal regularity of the solutions of the $\bar{\partial}$ operator in general pseudoconvex domains of finite type in \mathbb{C}^n , or for the study of cluster sets of families of complex analytic sets along real analytic subsets.

[22] : Propagation de l'analyticité pour des applications CR essentiellement finies de classe C^∞ . Cet article est tiré du dernier chapitre d'un projet de livre que j'ai conduit en partie durant l'été 2002. Il redémontre un *principe de réflexion généralisé* pour les applications CR de classe C^∞ qu'avait obtenu S. Damour dans sa thèse. Je rappelle que la partie algébrique de son théorème ne présentait aucune différence notable avec la partie algébrique du théorème obtenu auparavant par A. Sukhov (en collaboration avec B. Coupet et S. Pinchuk) dans [CPS1], mais que la partie « prolongement méromorphe d'un quotient CR » présentait des difficultés techniques réelles en codimension quelconque, par opposition au cas des hypersurfaces. Grâce à ma connaissance spécialisée des techniques d'extension holomorphe pour les fonctions CR, j'ai résolu oralement ce problème pour lequel A. Sukhov n'avait pas de réponse complète, et j'ai suggéré à S. Damour de le rédiger. Sa démonstration a largement inspiré celle de F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev

(rédacteur principal) dans [MMZ1]. Après trois années de décantation, voyant que ce type de comportement peu honnête n'avait pas réellement été perçu comme tel par les analystes complexes extérieurs au sujet (tant les problèmes de priorité sont difficiles à arbitrer), j'ai décidé d'écrire un article dans lequel je redémontrais le théorème de S. Damour en citant à égalité la démonstration (identique) de F. Meylan, N. Mir et D. Zaitsev. Vu de la planète de mes concurrents, cet effet de mise en perspective équilibrée (sans mention du problème de priorité) a dû paraître surprenant. Grâce à un style sobre et neutre, l'article a été accepté très rapidement à *Manuscripta Mathematica*.

Je dois ajouter que j'avais avant tout une motivation scientifique : trouver une démonstration plus simple que celle que j'avais indiquée à S. Damour et qui couvre aussi le théorème original dû à S.M. Baouendi, H. Jacobowitz et F. Treves ; ces derniers ne supposaient pas la variété générique source minimale. En utilisant la déformation normale des disques analytiques, j'ai élaboré une démonstration courte d'un théorème qui unifie vraiment tous les résultats connus dans cette direction.

The analyticity of local C^∞ -smooth CR diffeomorphisms between two essentially finite generic real analytic submanifolds of \mathbb{C}^n is established in [BJT], as a kind reflection principle, provided that all the components of the CR diffeomorphism extend holomorphically to a fixed wedge. In [BR1], [BR2] and more recently in [CPS1], [CPS2], [Da], [MMZ1] (*cf.* also the applications [CDMS], [MMZ2]), the CR diffeomorphism assumption has been weakened : instead, it is assumed that the so-called *characteristic variety* is zero-dimensional at the central point. However, it is always assumed that the source generic submanifold is minimal at the central point, whereas, in [BJT], no minimality assumption was needed. This modest note is devoted to fill the gap between these two trends of thought, applying the technique of normal deformations of analytic discs introduced in [Tu2].

1.1. Initial data. Let $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} . Let $\nu \in \mathbb{N}$. Let $x \in \mathbb{C}^\nu$. Denote $|x| := \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|$. For $\rho > 0$, denote $\Delta_n(\rho) := \{x \in \mathbb{C}^\nu : |x| < \rho\}$.

We consider a C^∞ -smooth local CR mapping between two local generic submanifolds M in \mathbb{C}^n and M' in $\mathbb{C}^{n'}$, defined *precisely* as follows (background material may be found in [BER], [M2]).

Définition 1.2. A local C^∞ -smooth CR mapping consists of the following data :

- (I) A local generic submanifold M of \mathbb{C}^n of positive codimension $d \geq 1$ and of positive CR dimension $m := n - d \geq 1$ passing through a point $p_0 \in \mathbb{C}^n$ and defined in coordinates $t = (z, w) = (x + iy, u + iv) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ vanishing at p_0 as a graph :

$$(1.3) \quad M = \{(z, w) \in \Delta_n(\rho_1) : v_j = \varphi_j(x, y, u), j = 1, \dots, d\},$$

where the functions φ_j are real analytic on $\Delta_{2m+d}(2\rho_1)$, for some $\rho_1 > 0$. We also require that for all ρ with $0 \leq \rho \leq 2\rho_1$, we have $|\varphi(x, y, u)| < \rho$ if $|(x, y, u)| < \rho$, namely M is a uniformly approximatively horizontal graph. Of course, after perhaps shrinking $\rho_1 > 0$, this condition is automatically

satisfied if we adjust the coordinates at the beginning in order that $T_0M = \{v = 0\}$. In fact, it is more convenient to work with a local representation of M by complex defining equations

$$(1.4) \quad M = \{(z, w) \in \Delta_n(\rho_1) : \bar{w}_j = \Theta_j(\bar{z}, z, w), j = 1, \dots, d\},$$

obtained by applying the implicit function theorem to (1.3), where of course we may assume that Θ_j converge normally for $|(\bar{z}, z, w)| < 2\rho_1$ and that for all ρ with $0 \leq \rho \leq 2\rho_1$, we have $|\Theta_j(\bar{z}, z, w)| < \rho$ if $|(\bar{z}, z, w)| < \rho$.

(II) A local generic submanifold M' in $\mathbb{C}^{n'}$ with central point p'_0 of positive codimension $d' \geq 1$ and of positive CR dimension $m' := n' - d' \geq 1$ passing through a point $p'_0 \in \mathbb{C}^n$ and defined in coordinates $t' = (z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ similarly as in (1.4).

(III) A C^∞ -smooth mapping $t' = h(t) = (f(t), g(t)) = (z', w')$ with $h(p_0) = p'_0$ which is defined in $M \cap \Delta_n(\rho_1) \equiv M$ and which satisfies for some two radii ρ_2, ρ'_2 with $0 < \rho_2 < \rho_1, 0 < \rho'_2 < \rho'_1$, the condition

$$(1.5) \quad h(M \cap \Delta_n(\rho_2)) \subset M' \cap \Delta'_{n'}(\rho'_2).$$

By [BT] (and also [BER]), after shrinking (if necessary) $\rho_1 > 0$ and $\rho_2 > 0$ with $0 < \rho_2 < \rho_1$:

(IV) every C^∞ -smooth CR function defined on $M \cap \Delta_n(\rho_1)$ (and in particular the n' components $h_1, \dots, h_{n'}$ of h) is a uniform limit of polynomials on $M \cap \Delta_n(\rho_2)$.

Définition 1.6. A complete wedge in $\Delta_n(\rho_2)$ with edge $M \cap \Delta_n(\rho_2)$ is a subset of \mathbb{C}^n of the form $\mathcal{W} = \mathcal{W}(M, C, \Delta_n(\rho_2)) = \{(z, w) \in \Delta_n(\rho_2); v - \varphi(x, y, u) \in C\}$, where C is some open strictly convex infinite (i.e. not truncated) cone in \mathbb{R}^d .

As in [BJT], it will be assumed that :

(V) there exists a complete wedge \mathcal{W}_2 in $\Delta_n(\rho_2)$ with edge $M \cap \Delta_n(\rho_2)$ such that the n components of h extend holomorphically to \mathcal{W}_2 .

1.7. CR differentiations. Put $r_j(t, \bar{t}) := \bar{w}_j - \Theta_j(\bar{z}, z, w)$ for $j = 1, \dots, d$ and and $r'_{j'}(t', \bar{t}') := \bar{w}'_{j'} - \Theta'_{j'}(\bar{z}', z', w')$ for $j' = 1, \dots, d'$. Let $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m$ be an arbitrary basis of $(0, 1)$ vector fields tangent to M having real analytic coefficients (the most convenient is written in (3.2) below). We consider the *first characteristic variety of h at p_0* to be the complex analytic subset \mathbb{V}'_0 of $\Delta'_{n'}(\rho'_2)$ consisting of elements t' satisfying the equations

$$(1.8) \quad \left[\bar{L}^\beta r'_{j'}(t', \overline{h(t)}) \right] \Big|_{t=0} = 0, \text{ for all } j' = 1, \dots, d' \text{ and all } \beta \in \mathbb{N}^m.$$

It is indeed a complex analytic subset defined as the zero set of an infinite collection of functions which are holomorphic in $\Delta'_{n'}(\rho'_2)$. By (1.5), $r'_{j'}(h(t), \overline{h(t)}) = 0$, for $j' = 1, \dots, d'$ and for all $t \in M$. It follows that the origin p'_0 belongs to the complex analytic subset \mathbb{V}'_0 . The focus is on the dimension at p'_0 of \mathbb{V}'_0 . The map h will be called *essentially finite at p_0* if $\dim_{p'_0} \mathbb{V}'_0 = 0$. Denote by $\mathcal{O}_{CR}(M, p_0)$ the (not local) CR orbit of p_0 in M .

Theorem 1.9. *Let $h : M \rightarrow M'$ be a local C^∞ -smooth CR mapping between two real analytic local generic submanifolds of \mathbb{C}^n and of $\mathbb{C}^{n'}$. Assume that there exists a complete wedge \mathcal{W}_2 in $\Delta_n(\rho_2)$ with edge $M \cap \Delta_n(\rho_2)$ such that the n' components of h extend holomorphically to \mathcal{W}_2 , assume that there exist at points*

$$(1.10) \quad q_0 \in \mathcal{O}_{CR}(M, p_0) \cap \Delta_n(\rho_2)$$

arbitrarily close to p_0 at which h is real analytic and assume that h is essentially finite at p_0 . Then there exists a radius $\rho_3 > 0$ with $0 < \rho_3 < \rho_2 < \rho_1$ such that h extends holomorphically to $\Delta_n(\rho_3)$.

In the version of Theorem 1.9 published in [Da], [MMZ1], it is assumed that M is minimal at p_0 , which entails the holomorphic extendability assumption **(V)**, thanks to [Tu1]. In [Da], [MMZ1], a crucial proposition about envelopes of meromorphy (same statement and same proof in the two references, modulo changes of notations), relying on subtle geometric arguments which stem from the theory of deformations of analytic discs developed in [A], [Tu1], [MP1] is applied. In this note, the purpose is to clean up and to simplify these geometric arguments, by means of the propagation of wedge extendability theorem established in [Tr], [Tu2] (cf. [HT] for a preliminary version). The stronger Theorem 1.9 will be established thanks to this change of geometric point of view. An elementary lemma applies to recover from Theorem 1.9 the main result of [Da], [MMZ1].

Lemme 1.11. *Let $h : M \rightarrow M'$ be a local C^∞ -smooth CR mapping between two real analytic local generic submanifolds of \mathbb{C}^n and of $\mathbb{C}^{n'}$. Assume that M is minimal at p_0 , so that $\mathcal{O}_{CR}(M, p_0)$ contains $M \cap \Delta_n(\rho_2)$ for some $\rho_2 > 0$ and so that (thanks to [Tu1]) after perhaps shrinking $\rho_2 > 0$, the assumption **(V)** holds. If h is essentially finite at p_0 , then there exist points $q_0 \in \mathcal{O}_{CR}(M, p_0) \cap \Delta_n(\rho_2)$ arbitrarily close to p_0 at which h is real analytic.*

Finally, in order to recover the main result of [BJT], remind that the essential finiteness of M' at p'_0 together with the CR diffeomorphism assumption entails the essential finiteness of h at p_0 ([Da], Lemma 4.1; a more general version is Corollary 1.3 in [MMZ1]; the most general version appears as Theorem 4.3.1 **(3)** in [M2], in which it is shown that CR-transversality of h at p_0 together with essential finiteness of M' at p'_0 implies that h is essentially finite at p_0). In [BJT], it is observed that essential finiteness of a hypersurface M at one of its points p_0 implies its minimality (finite type in the sense of Lie-Chow-Kohn-Bloom-Graham) at p_0 .

Lemme 1.12. *Let M' be a local generic submanifold of $\mathbb{C}^{n'}$ passing through a point p'_0 which is essentially finite at p'_0 . Then $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{CR}(M', p'_0) \geq 2\text{CRdim } M' + 1$ and the CR orbit $\mathcal{O}_{CR}(M', p'_0)$ itself is essentially finite at p'_0 .*

Assume that $n = n'$ and that h is a CR diffeomorphism. Then there exists a Zariski-dense open subset of points $q'_0 \in \mathcal{O}_{CR}(M', p'_0)$ at which M' is finitely nondegenerate. It follows that h itself is finitely nondegenerate at $q_0 := h^{-1}(p_0)$, and by an application a known result ([P1], [Ha], [BER], [La]), h is real analytic at q_0 .

Corollaire 1.13. ([BJT]) *Let $h : M \rightarrow M'$ be a local C^∞ -smooth CR mapping which is a CR diffeomorphism. If the components of h extend holomorphically to a wedge at p_0 , then h is real analytic at p_0 .*

Further applications (in the spirit of [CDMS], [MMZ2]) that may be stated are left to the interested reader. The remainder of this note is devoted to the proofs of Theorem 1.9, of Lemma 1.11 and of Lemma 1.12.

RÉFÉRENCES

- [A] AĪRAPETYAN, R.A. : *Extension of CR-functions from piecewise smooth CR manifolds*, Mat. Sb. **134(176)** (1987), no.1, 108–118. English transl. in Math. USSR-Sb. **62** (1989), no.1, 111–120.
- [BER] BAOUENDI, M.S. ; EBENFELT, P. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Real submanifolds in complex space and their mappings*. Princeton Mathematical Series, **47**, Princeton University Press Princeton, NJ, 1999, xii+404 pp.
- [BJT] BAOUENDI, M.S. ; JACOBOWITZ, H. ; TREVES, F. : *On the analyticity of CR mappings*, Ann. Math **122** (1985), no.2, 365–400.
- [BR1] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Germes of CR maps between real analytic hypersurfaces*, Invent. Math. **93** (1988), no.3, 481–500.
- [BR2] BAOUENDI, M.S. ; ROTHSCCHILD, L.P. : *Geometric properties of mappings between hypersurfaces in complex space*, J. Differential Geom. **31** (1990), no.2, 473–499.
- [BT] BAOUENDI, M.S. ; TREVES, F. : *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields*, Ann. of Math. **113** (1981), no.2, 387–421.
- [CDMS] COUPET, B. ; DAMOUR, S. ; MERKER, J. ; SUKHOV, A. : *Sur l'algébricité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **334** (2002), 953–956.
- [CPS1] COUPET, B. ; PINCHUK, S. ; SUKHOV, A. : *On partial analyticity of CR mappings*, Math. Z. **235** (2000), 541–557.
- [CPS2] COUPET, B. ; PINCHUK, S. ; SUKHOV, A. : *Analyticité des applications CR*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **329** (1999), no.6, 489–494.
- [Da] DAMOUR, S. : *On the analyticity of smooth CR mappings between real analytic CR manifolds*, Michigan Math. J. **49** (2001), no.3, 583–603.
- [DF] DIEDERICH, K. ; FORNÆSS, J.E. : *Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in \mathbb{C}^n* , Math. Ann **282** (1988), no.4, 681–700.
- [Ha] HAN, C.K. : *Analyticity of CR equivalences between some real analytic hypersurfaces in \mathbb{C}^n with degenerate Levi-forms*, Invent. Math **73** (1983), no.1, 51–69.
- [HT] HANGES, N. ; TREVES, F. : *Propagation of holomorphic extendability of CR functions*, Math. Ann. **263** (1983), no.2, 157–177.
- [J] JÖRICKKE, B. : *Deformation of CR-manifolds, minimal points and CR-manifolds with the microlocal analytic extension property*, J. Geom. Anal. **6** (1996), no.4, 555–611.
- [KS] KAJIWARA, J. ; SAKAI, E. : *Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions*, Nagoya Math. J. **29** (1967), 75–84.
- [La] LAMEL, B. : *Holomorphic maps of real submanifolds in complex spaces of different dimensions*, Pacific Math. J. **201** (2001), no. 2, 357–387.
- [M1] MERKER, J. : *Global minimality of generic manifolds and holomorphic extendibility of CR functions*, Internat. Math. Res. Notices **1994**, no.8, 329 ff., approx. 14 pp. (electronic), 329–342.

- [M2] MERKER, J. : *On the local geometry of generic submanifolds of \mathbb{C}^n and the analytic reflection principle* (Part I), Viniti, Kluwer, to appear, 80 pp.
- [M3] MERKER, J. : *Étude de la régularité analytique de l'application de réflexion CR formelle*, Prépublication, Université de Provence, 87 pages, janvier 2004.
- [MP1] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *On removable singularities for integrable CR functions*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), no.3, 805–856.
- [MP2] MERKER, J. ; PORTEN, E. : *On wedge extendability of CR-meromorphic functions*, Math. Z. (to appear).
- [MMZ1] MEYLAN, F ; MIR, N. ; ZAITSEV, D. : *Analytic regularity of CR-mappings*, Mathematical Research Letters **9** (2002), 73–93.
- [MMZ2] MEYLAN, F ; MIR, N. ; ZAITSEV, D. :
- [N] NEELON, T.S. : *On solutions of real analytic equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no.3, 2531–2535.
- [P1] PINCHUK, S. : *On the analytic continuation of holomorphic mappings* (Russian), Mat. Sb. (N.S.) **98(140)** (1975) no.3(11), 375–392, 416–435, 495–496.
- [P2] PINCHUK, S. : *Holomorphic mappings of real-analytic hypersurfaces* (Russian), Mat. Sb. (N.S.) **105(147)** (1978), no. 4 574–593, 640.
- [P3] PINCHUK, S. : State Thesis, Moscow, 1980.
- [Pu] PUSHNIKOV, A. Yu. : *Holomorphicity of CR-mappings into a space of large dimension*, Mat. Zametki **48** (1990), no. 3, 147–149.
- [Tr] TRÉPREAU, J.-M. : *Sur la propagation des singularités dans les variétés CR*, Bull. Soc. Math. Fr. **118** (1990), no. 4, 403–450.
- [Tu1] TUMANOV, A.E. : *Extending CR functions on a manifold of finite type over a wedge*, (Russian), Mat. Sb. (N.S.) **136(178)** (1988), no.1, 128–139. English transl. in Math. USSR-Sb. **64** (1989) no.1, 129–140.
- [Tu2] TUMANOV, A.E. : *Connections and propagation of analyticity for CR functions*, Duke Math. J. **73** (1994), no.1, 1–24.

[A] : Équations de la gravitation d'Einstein (d'après Élie Cartan). Sur un espace-temps local à quatre dimensions, équipé de coordonnées x^i , $i = 1, 2, 3, 4$, et muni d'une métrique pseudo-riemannienne $\sum_{i,j=1}^4 g_{ij}(x) dx^i dx^j$ de signature $(3, 1)$, un tenseur à deux indices C_{ij}^0 est dit *covariant* s'il se transforme comme le tenseur métrique g_{ij} à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. En 1922, Élie Cartan démontrait que tout tenseur covariant

$$C_{ij}^0 = C_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right)$$

qui dépend du jet d'ordre 2 des coefficients métriques via une fonction C_{ij}^0 indépendante du système de coordonnées et linéaire par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}$, est nécessairement de la forme :

$$C_{ij}^0 = \nu A_{ij} + \mu A g_{ij} + \lambda \delta_i^j;$$

ici, λ , μ et ν sont des constantes, A_{ij} désigne le tenseur de Ricci deux fois covariant associé à la connexion de Levi-Civita et A désigne la courbure scalaire de

la métrique pseudo-riemannienne. Il en découlait aisément que le tenseur une fois covariant et une fois contravariant défini par :

$$E_i^j := \mu \left(A_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j A \right) + \lambda \delta_i^j$$

est le plus général qui satisfait la loi de conservation $\sum_{j=1}^n \nabla_j E_i^j = 0$, exprimant l'annulation de sa divergence absolue. Ici, le quotient $\Lambda := \frac{\lambda}{\mu}$ coïncide avec la constante cosmologique. Ainsi, le tenseur deux fois covariant qu'Einstein avait introduit en 1916 pour écrire les équations de la gravitation $E_{ij} = -T_{ij}$ en relativité générale était-il essentiellement unique.

À partir d'une lecture directe du mémoire de 1922, nous reconstituons les raisonnements originaux d'Élie Cartan sous une forme complète et accessible.

En 1922, dans un mémoire souvent cité mais resté difficile d'accès¹, Élie Cartan démontrait que le tenseur E_{ij} , construit par Einstein en 1916 et apparaissant dans le membre *géométrique* des équations $E_{ij} = -T_{ij}$ de la gravitation², était essentiellement *unique* (voir le Théorème 1.85 ci-dessous ou le RÉSUMÉ ci-dessus). Ce résultat fondamental d'Élie Cartan s'effectuait par la synthèse entre trois théories :

- (1) sa propre «méthode d'équivalence», qu'il appliquait aux variétés pseudo-riemanniennes ;
- (2) le calcul tensoriel, développé par Gregorio Ricci, Tullio Levi-Civita, Enrico Bompiani et autres représentants de l'école italienne ;
- (3) la géométrie projective complexe, considérablement approfondie à la fin du dix-neuvième siècle par l'école allemande.

La première, la «méthode d'équivalence», fut inventée et appliquée par Élie Cartan dans les années 1902–1910, peu après qu'il eut édifié la théorie des formes différentielles, au cours de ses recherches sur les groupes de Lie de dimension infinie. Grâce au langage des formes différentielles, Élie Cartan fut à même de résoudre un problème de classification laissé en chantier par son maître Sophus Lie, à savoir la classification de tous les groupes de Lie de dimension infinie qui agissent localement sur un espace complexe de dimension deux³. C'était là la première application imposante d'une méthode que le jeune Élie Cartan, alors Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lyon, ébauchait dès 1902 dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ([Ca1902]).

Malheureusement, à cause de leur ampleur et de leur réelle complexité, les détails exacts de ces résultats de classification complète sont restés méconnus. Dans de nombreux autres mémoires, Élie Cartan applique la méthode d'équivalence à des problèmes géométriques variés : groupes infinis simples, déformation projective des surfaces, systèmes de Pfaff à cinq variables, transformations de contact,

¹Sur les équations de la gravitation d'Einstein, J. Math. pures et appl. **1** (1922), 141–203.

²Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik **49** (1916), 769–822.

³Avec cette méthode, il retrouvait aussi les résultats de classification pour les groupes continus de dimension finie, publiés par Lie dans un mémoire de synthèse unanimement considéré comme fondateur historique de la théorie des «groupes de Lie» : S. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, Math. Ann. **16** (1880), 441–528.

transformations de Bäcklund, *etc.* Malgré cette richesse, à l'époque moderne, seule une partie de ces travaux a été lue, comprise et assimilée en profondeur. À partir de la seconde moitié du vingtième siècle, le mouvement (post)boubachique ayant orienté l'intérêt des jeunes générations de mathématiciens vers des thématiques émergentes, telles que la géométrie algébrique, l'étude globale des variétés, les systèmes dynamiques, *etc.*, la connaissance de l'héritage mathématique d'Élie Cartan – et notamment de la méthode d'équivalence – souffre de certaines lacunes en France.

Cette situation est regrettable, car l'approche d'Élie Cartan achève et parfait une profonde synthèse, illustration de l'unité indissoluble des mathématiques, entre deux points de vue : la théorie des objets géométrico-différentiels et la théorie des *groupes continus de transformation*, appelés aujourd'hui *groupes de Lie*. Toute l'œuvre d'Élie Cartan s'enracine dans la théorie des groupes continus de transformation⁴, qui fut fondée par Sophus Lie dans les années 1873–1880.

Au début des années 1920, Élie Cartan transférait la méthode d'équivalence à la théorie des espaces de Riemann, et ce faisant, il en tirait une application spectaculaire à la relativité générale : l'unicité du tenseur d'Einstein, ainsi que la décomposition du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel en trois composantes irréductibles. À nouveau, dans le mémoire [Ca1922] ainsi que dans d'autres mémoires rédigés à la même période, les détails techniques étaient complexes et difficiles d'accès. Hermann Weyl lui-même reconnaissait n'avoir pas saisi la totalité des raisonnements qui conduisaient Élie Cartan à établir l'unicité du tenseur d'Einstein.

En nous aidant de présentations modernisées de la méthode d'équivalence ([Ko1972], [St1983], [Ga1989], [OL1995]), nous nous proposons de reprendre et de développer les raisonnements elliptiques d'Élie Cartan, à partir d'une lecture directe du mémoire de 1922. Pour ce faire, nous devons faire preuve d'un effort de formulation conceptuelle et d'un effort de présentation pour rendre accessibles les démonstrations techniques. Ce faisant, nous serons conduits à réexprimer des résultats connus.

Avant de formuler précisément le théorème d'unicité du tenseur d'Einstein, présentons un bref aperçu historique du concept de courbure en géométrie riemannienne.

1.1. Courbure de Gauss et variétés riemanniennes. Dans une variété riemannienne locale de dimension n , identifiée à \mathbb{R}^n grâce à un système de coordonnées (x^1, \dots, x^n) , les rapports de distances infinitésimales sont fournis par un produit scalaire euclidien dont les coefficients dépendent du point où l'on se place. Plus précisément, soit $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ la base de champs de vecteurs naturellement associée à ce système de coordonnées et soit

$$(1.2) \quad dx := dx^1 \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + dx^n \cdot \frac{\partial}{\partial x^n},$$

⁴«La plupart de mes travaux mathématiques gravitent autour de la théorie des groupes», [Ca1952], p. 1, première phrase du texte de synthèse écrit par Élie Cartan à l'occasion de sa réception à l'Académie des Sciences.

un vecteur infinitésimal placé au point x de composantes $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$ relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$. Le carré ds^2 de la norme de ce vecteur infinitésimal dx placé au point x est représenté par une forme quadratique définie positive en ses composantes infinitésimales :

$$(1.3) \quad ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j,$$

dont les coefficients variables $g_{ij}(x)$ satisfont la symétrie $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$. Ces coefficients fondamentaux seront toujours supposés *analytiques réels* dans ce mémoire, c'est-à-dire localement développables en série entière. Cette hypothèse de régularité n'est ni optimale ni nécessaire pour la plupart de nos considérations, mais nous l'adopterons par souci de simplicité et parce qu'elle était implicitement admise dans les travaux d'Élie Cartan.

Comme le lecteur l'aura remarqué, nous n'avons pas adopté la convention d'Einstein dans l'écriture de (1.3) (lire aussi le §3.1 ci-dessous). Dans la suite, nous maintiendrons toujours les signes de sommation dans l'écriture de nos formules. La raison principale est la suivante : à partir de la Section 2, un paramètre $\varepsilon_i = \pm 1$, indexé par $i = 1, \dots, n$, entrera dans l'écriture de nos formes différentielles, lesquelles incorporeront aussi l'indice i , ainsi que d'autres indices j, k, \dots répétés, mais il n'y aura pas (la plupart du temps) de sommation sur cet indice i . Il deviendrait inélégant et pesant d'avoir à préciser au cas par cas si l'on doit sommer sur l'indice i répété. Par exemple, dans la formule (2.5) ci-dessous, où l'indice i de ε_i est répété, on doit sommer sur i , tandis que dans la formule (3.15) ci-dessous, où l'indice i de ε_i est aussi répété, on ne doit *pas* sommer sur i .

Ce n'est que dans cette Section 1 que nous pourrions adopter la convention d'Einstein. En effet, nous présentons des concepts classiques de calcul tensoriel pour lesquels cette convention a amplement fait ses preuves. Cependant, pour des raisons de cohérence globale, nous maintiendrons partout les signes de sommation. Ainsi, le lecteur qui a adopté ladite convention reconnaîtra simplement les formules habituelles de géométrie riemannienne, s'il fait l'émission des signes Σ . Du reste, ces signes ne tiennent pas une place considérable dans l'écriture des formules et ils ont la vertu de signaler directement à la lecture quels sont les indices sur lesquels on doit sommer, sans avoir à repérer préalablement la répétition de ces indices. Il est vrai que sur des formules relativement simples comme (1.3) ci-dessus ou encore (1.25) ci-dessous, le repérage des indices répétés se fait rapidement. Par contre, dans des formules comme (7.) incorporant huit répétitions d'indices qui n'ont pas de dénomination homogène simple (par exemple $j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8$), le repérage des indices répétés demande un long travail de lecture. Dans un tel cas de figure, sur le plan pratique, le maintien des signes de sommation présente des avantages indéniables.

La *méthode du repère mobile*, introduite par Ribaucour, Frenet, Serret puis systématisée par Darboux à la fin du dix-neuvième siècle, consiste à attacher un système d'axes variables ou de vecteurs «mobiles» à tout objet géométrico-différentiel, afin d'en étudier les propriétés qui sont *invariantes par rapport à un groupe de transformations*, par exemple le groupe des déplacements euclidiens. Dans son œuvre, Élie Cartan l'a poussée si loin qu'aujourd'hui encore, seule une partie de ses travaux a été relue, comprise et assimilée. Cette «méthode» en

quelque sorte implicite dans les calculs de Gauss, permet d'étudier très progressivement (et sans éprouver l'impression de s'égarer dans des calculs interminables) la géométrie intrinsèque d'une surface «gaussienne», équipée d'une métrique de la forme :

$$(1.4) \quad ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2,$$

[en coordonnées (u, v) au lieu de (x^1, x^2)], et notamment, de retrouver la célèbre expression de la courbure $\kappa = \kappa(u, v)$ en un point de coordonnées (u, v) , en fonction des dérivées partielles des coefficients E, F et G , *i.e.* :

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa = & \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \left\{ E \left[\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 \right] + \right. \\ & + F \left[\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + 4 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \right] \\ & + G \left[\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right] - \\ & \left. - 2(EG - F^2) \left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Cette expression relativement complexe aura coûté tant d'années de recherches à Carl Friedrich Gauss qu'il baptisera⁵ «*Theorema Egregium*» (théorème «remarquable», «extraordinaire») la conséquence qui en découle directement et qu'il avait en vue, à savoir que la courbure est préservée par toute application isométrique d'une surface sur une autre, et ce, grâce à un argument purement intrinsèque, qui se dispense de tout plongement de la surface dans l'espace⁶. En effet, grâce à cette formule qui affirme que la courbure est une expression algébrique explicite universelle en fonction des dérivées partielles (d'ordre au plus égal à deux) des coefficients de la métrique infinitésimale (1.4) dans les coordonnées internes (u, v) , il devient évident que si l'on a une transformation $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$ isométrique qui transforme le ds^2 (1.4) en un $d\bar{s}^2 = \bar{E} d\bar{u}^2 + 2\bar{F} d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G} d\bar{v}^2$ similaire, autrement dit, si l'on a $\bar{E} = E, \bar{F} = F$ et $\bar{G} = G$ [après remplacement de l'expression de (\bar{u}, \bar{v}) en fonction de (u, v)], alors on a aussi pour les dérivées partielles $\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial E}{\partial v}, \text{ etc.}$, d'où il découle immédiatement que $\bar{\kappa} = \kappa$: la courbure $\bar{\kappa}$ au point de coordonnées $(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$ coïncide avec la courbure au point repéré par les coordonnées (u, v) .

1.6. Coefficients de courbure riemannienne. En 1854, Bernhard Riemann propose trois sujets possibles à l'université de Göttingen pour passer sa thèse d'habilitation. C.F. Gauss, président du jury, âgé de 77 ans et riche de plusieurs décennies de méditations solitaires sur les géométries non-euclidiennes, choisit de mettre Riemann à l'épreuve sur l'une des trois propositions, intitulée *Sur les hypothèses qui*

⁵Dans [Me2004], nous proposons d'appeler «*formula egregia*» la formule (1.5).

⁶C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comment. soc. Gött. **6** (1828), 99–146.

servent de fondement à la géométrie [Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen]. Or, c'était le moins mûr et le moins préparé des trois sujets que Riemann avait proposés. Après six semaines de réflexion et de rédaction, Riemann présente oralement son *habilitationsvortrag* devant un public d'universitaires non mathématiciens, en évitant soigneusement de présenter des calculs et de rentrer dans des considérations techniques.

Dans ce texte court publié à titre posthume en 1868 et qui révolutionna la géométrie, Riemann pose *ab initio* le problème de la nature des notions topologiques, des notions géométriques et des notions métriques de base grâce auxquelles on peut concevoir mathématiquement l'espace, sans entacher cette «Idée problématique» d'hypothèses implicites. En particulier, il propose de généraliser aux espaces à n dimension la notion de produit scalaire infinitésimal via la définition (1.3), qui généralise la définition (1.4) que Gauss avait prise pour fondement de l'étude intrinsèque des surfaces plongées dans l'espace tridimensionnel. Se posait alors la question de généraliser la notion de courbure en dimension $n \geq 3$ et d'obtenir un analogue de la *formula egregia* (1.5). Pour cela, une stratégie d'économie aurait alors été la bienvenue, puisque les calculs de Gauss étaient déjà considérables en dimension $n = 2$.

Or Riemann savait que la courbure de Gauss s'exprime de manière particulièrement simple dans un système de coordonnées dites «géodésiques». Dans un tel système, le ds^2 se réduit à la forme normalisée $ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2$. Ici, u représente le rayon géodésique issu de l'origine et v représente l'angle que fait ce rayon à l'origine avec une géodésique fixe. Ainsi, on a $G(u, 0) = G(u, 2\pi)$, et il faut considérer qu'une telle métrique est une déformation de la métrique euclidienne $dr^2 + r^2 d\theta^2$, écrite en coordonnées polaires. Avant d'obtenir la *formula egregia* (1.5), Gauss avait démontré en 1822 l'existence de systèmes de coordonnées géodésiques pour toute surface plongée dans l'espace et il en déduisit la même année une expression intrinsèque pour la courbure. Évidemment, nous pouvons retrouver cette expression en appliquant la formule (1.5), que Gauss n'obtint que cinq années plus tard, en 1827, ce qui donne :

$$(1.7) \quad \kappa = \frac{1}{4G^2} \left\{ \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 - 2G \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right\} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

De plus, Riemann savait que dans un système de coordonnées géodésiques, la courbure des surfaces apparaît dans le développement limité du coefficient $G(u, v)$ du ds^2 au voisinage de l'origine. En effet, après une normalisation élémentaire de la métrique à l'origine qui assure que $\sqrt{G(0, v)} = 0$ et que $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(0, v) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(u, v) = 1$, on démontre ([Sp1970], Chapter 3B, Adendum) que

$$(1.8) \quad \sqrt{G}(u, v) = u - \frac{1}{6} \kappa(0)u^3 + o(u^3),$$

où $\kappa(0)$ est la courbure de la surface à l'origine.

Dans des travaux manuscrits non publiés – difficiles à dater –, en partant de (1.7), Riemann généralise donc la notion de courbure aux variétés de dimension $n \geq 2$ munies d'un ds^2 général de la forme (1.3). Il se place dans un système de coordonnées appelé depuis «*coordonnées normales de Riemann*», qui généralise le système de coordonnées géodésiques à la dimension quelconque $n \geq 2$. Dans un tel système de coordonnées, on a $g_{ij}(0) = \delta_j^i$ et $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$, pour tous $i, j, k = 1, \dots, n$ (voir [Sp1970], Chapitre 4B). En effectuant un développement limité des coefficients $g_{ij}(x)$ à l'origine, on peut écrire :

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} ds^2(x) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j \\ = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(0) x^k x^l dx^i dx^j + o(|x|^2). \end{array} \right.$$

Ensuite, grâce à un calcul algébrique – passé sous silence –, Riemann affirme qu'il existe des nombres A_{ijkl} tels que l'on peut réécrire le précédent développement limité sous la forme :

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} ds^2(x) = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - \\ - \frac{1}{6} \sum_{i,j,k,l=1}^n A_{ijkl} (x^k dx^i - x^i dx^k) (x^l dx^j - x^j dx^l) + o(|x|^2). \end{array} \right.$$

Dans ce mémoire de 1854, on ne trouve pas de formule mathématique explicite, mais on remarque une phrase qui décrit «en langue naturelle» le contenu de la formule (1.10), et ce de manière très précise.

Sept années plus tard, en 1861, Riemann soumet à l'Académie des Sciences de Paris un mémoire intitulé *Commentatio mathematica qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia Parisiensi propositae*⁷. Dans ce mémoire qui traite de l'équation de la chaleur, Riemann démontre rigoureusement que l'annulation des coefficients A_{ijkl} est la condition nécessaire et suffisante pour que la variété riemannienne (M, ds^2) soit localement isométrique à l'espace \mathbb{R}^n , muni de la métrique euclidienne standard. Ce résultat généralisait le théorème de Gauss sur les surfaces de courbures nulles. Cet extrait du mémoire de 1861 est traduit en anglais et commenté par M. Spivak dans le Chapitre 4B de [Sp1970].

En 1869, peu de temps après la publication posthume de l'*habilitationsvortrag* de 1854, le disciple de Riemann Erwin Bruno Christoffel entreprend le premier travail de classification des variétés riemanniennes à isométrie près (cf. [Bo1993]). Supposons donnée une isométrie $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ entre deux variétés riemanniennes (M, ds^2) et $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$, c'est-à-dire une application qui transforme

⁷Ce travail, publié à titre posthume, fait partie de la liste des mémoires qui n'ont pas été traduits en français dans [Ri1898].

une métrique $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j$ en une autre métrique $d\bar{s}^2 = \sum_{i,j=1}^n \bar{g}_{ij}(\bar{x}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j$. Pour isoler les dérivées secondes des composantes d'une telle isométrie, pour exprimer les composantes de courbure riemannienne et pour calculer ce qu'on appelle (depuis l'article [LR1901] de Ricci et Levi-Civita) les *dérivées covariantes* du tenseur de Riemann, Christoffel choisit d'introduire la notation :

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n g^{pk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{pj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{pi} - \frac{\partial}{\partial x^p} g_{ij} \right),$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de la matrice (g_{ij}) . On appelle maintenant ces expressions *coefficients de Christoffel* de la *connexion de Levi-Civita* de la variété riemannienne (M, ds^2) . Cette notation permit à Christoffel de contracter substantiellement l'expression du tenseur de courbure de Riemann. En effet, il obtint l'expression compacte suivante pour les A_{ijkl} que Riemann avait introduits dans (1.10) :

$$(1.12) \quad A_{ijkl} = \sum_{p=1}^n g_{pl} A_{ijk}^p,$$

où

$$(1.13) \quad A_{ijk}^l := \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} l \\ i k \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} + \sum_{p=1}^n \left(\left\{ \begin{matrix} p \\ i k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ j p \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} p \\ j k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ i p \end{matrix} \right\} \right).$$

En vérité, si l'on insérait les coefficients de Christoffel (1.11) dans ces formules (1.13), on obtiendrait une expression nettement plus complexe qui généraliserait pleinement la *formula egregia* (1.5) au cas de $n \geq 2$ variables (voir (1.28) ci-dessous).

Grâce à une telle expression des composantes de la courbure, Christoffel établit alors qu'une isométrie $x \mapsto \bar{x}(x)$ induit la loi de transformation

$$(1.14) \quad \sum_{l=1}^n A_{ijk}^l \frac{\partial \bar{x}^\delta}{\partial x^l} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^n \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} \bar{A}_{\alpha, \beta, \gamma}^\delta$$

entre les composantes de la courbure. Plus encore, en introduisant certaines *dérivées modifiées* des composantes de la courbure, Christoffel exprima une famille infinie de conditions nécessaires pour l'existence d'une isométrie entre deux variétés riemanniennes locales. Il démontra aussi que ces conditions sont suffisantes, avec des raisonnements incomplets qui ne s'appliquent en vérité que lorsque le groupe de Lie local des isométries de (M, ds^2) est de dimension zéro. Pour des groupes de dimension quelconque, ce problème fut définitivement résolu par Élie Cartan dans les années 1920, grâce à une stratégie qui fait la synthèse entre deux notions : formes différentielles, et groupes de Lie.

Ce rappel historique achevé, afin d'être en mesure d'exprimer rigoureusement le théorème d'unicité du tenseur d'Einstein dû à Élie Cartan, effectuons maintenant une brève présentation des concepts de géométrie différentielle riemannienne qui sont à la base des équations de la gravitation d'Einstein, tels qu'ils sont exposés dans la plupart des manuels contemporains.

1.15. Connexion de Levi-Civita. Nous renvoyons le lecteur à [DC1992], [We1972] ainsi qu'à d'autres références pour une présentation plus complète du formalisme.

Classiquement, une variété riemannienne M est canoniquement équipée d'une connexion ∇ , dite *de Levi-Civita*. C'est l'unique connexion de torsion nulle sur M qui soit compatible avec la métrique. Rappelons pour commencer les définitions de ces termes.

Tout d'abord, une *connexion affine* (au sens de Koszul) est un opérateur intrinsèque de dérivation d'un champ de vecteur le long d'un autre champ de vecteur. Pour être plus précis, désignons par $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M : c'est un module sur l'algèbre $\mathcal{C}^\omega(M)$ des fonctions analytiques réelles sur M , *i.e.* on peut additionner les champs de vecteurs et les multiplier par des fonctions $f \in \mathcal{C}^\omega(M)$, avec des règles d'associativité et de distributivité évidentes. Une *connexion affine* ∇ est une application qui à un couple de champs de vecteurs $(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ associe un champ de vecteurs $\nabla_X(Y) \in \mathcal{X}(M)$, le «dérivé de Y le long de X ». Cette opération satisfait les propriétés suivantes :

- (c1) linéarité par rapport à chacun des deux champs : $\nabla_{X_1+X_2}(Y) = \nabla_{X_1}(Y) + \nabla_{X_2}(Y)$ et $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X(Y_1) + \nabla_X(Y_2)$;
- (c2) linéarité pour la multiplication (par une fonction $f \in \mathcal{C}^\omega(M)$) du champ le long duquel on dérive : $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X(Y)$;
- (c3) règle de Leibniz pour la multiplication (par une fonction $f \in \mathcal{C}^\omega(M)$) du champ que l'on dérive : $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f) \cdot Y$; ici, $X(f)$ est la fonction obtenue en appliquant le champ X – vu comme dérivation – à f .

La connexion est dite *de torsion nulle* si pour tout couple de champs de vecteurs $(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, on a

$$(1.16) \quad \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y],$$

où $[X, Y]$ désigne le *crochet de Lie* de X avec Y . Cette terminologie «torsion» s'explique dans la théorie des connexions affines développées par Élie Cartan à partir du concept de repère mobile, mais nous n'entrerons pas dans les détails.

Appliquons maintenant le principe d'après lequel tous les objets de la géométrie différentielle qui possèdent une définition indépendante du choix de coordonnées locales doivent aussi être saisis en coordonnées locales, sous une forme explicite et concrète. Soient donc (x^1, x^2, \dots, x^n) des coordonnées locales, soient $X_1 := \frac{\partial}{\partial x^1}, X_2 := \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, X_n := \frac{\partial}{\partial x^n}$ les n champs de vecteurs «naturels» associés, qui forment un repère mobile. Grâce aux règles (c1), (c2) et (c3) ci-dessus, en décomposant les champs X et Y sous la forme $X = \sum_{i=1}^n a^i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_{i=1}^n b^i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$, on vérifie aisément que la connaissance de l'expression $\nabla_X(Y)$ se ramène à la connaissance des n^2 champs de vecteurs $\nabla_{X_i}(X_j)$, que

l'on peut décomposer le long de la base des X_k sous la forme

$$(1.17) \quad \nabla_{X_i}(X_j) =: \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k},$$

en introduisant des fonctions $\Gamma_{ij}^k(x)$ qui sont appelées *coefficients de Christoffel* de la connexion. Jusqu'au milieu du vingtième siècle, une connexion était habituellement définie dans les ouvrages classiques par la donnée d'une collection de n^3 fonctions $\Gamma_{ij}^k(x)$ qui se transforment de la manière suivante à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$:

$$(1.18) \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{k_1=1}^n \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^j} \Gamma_{i_1 j_1}^{k_1} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}.$$

C'est encore cette «ancienne» définition qui est choisie dans certains ouvrages de physique mathématique, comme par exemple dans [HT1990], p. 53. Bien entendu, on peut déduire cette formule de transformation de la définition «abstraite» (*i.e.* présentée *sans* en référer à un système de coordonnées locales) de connexion donnée ci-dessus, en utilisant le fait que les champs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ se transforment en $\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$, et en utilisant la règle de Leibniz (c3).

La règle de transformation (1.18) n'est pas de caractère tensoriel, puisque les dérivées secondes du changement de coordonnées interviennent dans le deuxième terme du membre de droite. Néanmoins, cette règle possède un caractère précis et une structure bien définie qui leur confèrent un statut indépendant du système de coordonnées.

Toute connexion affine définit de manière unique un *transport parallèle* le long des courbes tracées dans M , et ce transport parallèle permet de «connecter» les espaces tangents entre eux d'une manière intrinsèque, indépendante du choix de coordonnées locales. Mais il faut insister sur le fait que ce lien entre les espaces tangents dépend non seulement de la connexion choisie mais aussi de la courbe le long de laquelle on déplace parallèlement un vecteur tangent. Plus précisément, pour toute courbe analytique réelle $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ et tout vecteur Y_0 tangent à M au point $\gamma(0)$, il existe une unique famille à un paramètre $t \in [0, 1]$ de vecteurs $Y(t)$ tangents à M au point $\gamma(t)$ tels que $Y(0) = Y_0$ et tels que la dérivée de $Y(t)$ le long du vecteur tangent $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ s'annule identiquement, *i.e.*

$$(1.19) \quad \nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}}(Y(t)) \equiv 0.$$

En explicitant ces équations différentielles dans des coordonnées (x^1, \dots, x^n) avec le repère mobile $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$, on obtient un système de n équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$(1.20) \quad 0 = \frac{\partial b^k}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k b^j \frac{\partial b^i}{\partial t}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ce système porte sur les coefficients $b^i(t)$ des vecteurs $Y(t) = \sum_{i=1}^n b^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ pour $t \in [0, 1]$, avec la condition initiale $b^i(0) = b_0^i$, si l'on a écrit le champ

$Y_0 = \sum_{i=1}^n b_0^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(0)}$ au point $\gamma(0)$. Grâce aux propriétés connues des solutions de tels systèmes d'équations différentielles, on déduit que l'application qui à $Y_0 = Y(0)$ associe le vecteur tangent final $Y(1)$ est un *isomorphisme linéaire* entre $T_{\gamma(0)}M$ et $T_{\gamma(1)}M$: c'est l'application que l'on appelle *transport parallèle* associé à la connexion le long de la γ .

Soit maintenant (M, ds^2) une variété riemannienne qui est aussi équipée d'une connexion ∇ . Plus généralement, si le produit scalaire $\langle Y_1, Y_2 \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) a_1^i a_2^j$ entre vecteurs tangents $Y_1 = \sum_{i=1}^n a_1^i X_i$ et $Y_2 = \sum_{i=1}^n a_2^i X_i$ en un point $p \in M$ est seulement non-dégénéré, mais pas forcément défini positif, on dira que (M, ds^2) est une variété *pseudo-riemannienne*. Tel est le cas, par exemple, dans l'espace de Minkowski équipé de la métrique $-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2$.

La connexion ∇ est dite *compatible avec la métrique* si, pour tout point $p \in M$, pour toute courbe analytique réelle $\gamma := [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\gamma(0) = p$ et pour tout couple de vecteurs Y_0^1 et Y_0^2 tangents à M en p , le produit scalaire entre Y_0^1 et Y_0^2 au point $\gamma(0)$ possède la même valeur numérique que le produit scalaire entre les deux vecteurs Y_1^1 et Y_1^2 transportés parallèlement le long de γ jusqu'au point $\gamma(1)$. Autrement dit, le produit scalaire est invariant par transport parallèle.

En 1917, Levi-Civita a démontré qu'étant donné une variété riemannienne, il existe une unique connexion de torsion nulle qui est compatible avec la métrique. L'énoncé s'étend sans modification aux variétés pseudo-riemanniennes. En analysant ces deux conditions, on vérifie que les coefficients fondamentaux de cette unique connexion possèdent une expression explicite en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 de la métrique :

$$(1.21) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n g^{pk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{pj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{pi} - \frac{\partial}{\partial x^p} g_{ij} \right).$$

Ici, (g^{ij}) désigne la matrice inverse de la matrice (g_{ij}) . La nullité de la torsion équivaut alors à la propriété de symétrie indicielle $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Ces coefficients Γ_{ij}^k coïncident avec les coefficients que Christoffel notait $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i j \end{smallmatrix} \right\}$. Historiquement, le point de vue de Levi-Civita eut une importance cruciale, puisqu'il apportait (enfin) une mise en forme géométrique des calculs de courbure dus à Riemann et à Christoffel.

Montrons maintenant comment les coefficients de Christoffel d'une connexion linéaire peuvent servir à différentier des objets géométriques plus généraux que les champs de vecteurs : les tenseurs.

1.22. Tenseurs, calcul tensoriel, dérivées covariantes des tenseurs. Résumons d'abord quelques éléments de calcul tensoriel classique. Un tenseur p fois *contra-variant* et q fois *contravariant* consiste en la donnée de $n^p n^q$ fonctions $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ qui dépendent analytiquement de x , dans le système initial de coordonnées (x^1, \dots, x^n) , et qui se transforment comme suit. Pour tout changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$, ces quantités se transforment en des quantités $\bar{\Lambda}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$

qui sont reliées aux $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ d'une manière linéaire, avec des coefficients qui ne dépendent que de la matrice jacobienne $(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j})$:

$$(1.23) \quad \bar{\Lambda}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum_{i'_1, \dots, i'_p=1}^n \sum_{j'_1, \dots, j'_q=1}^n \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \cdot \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \Lambda_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}.$$

Dans cette transformation jacobienne généralisée, notons que les indices supérieurs se comportent comme dans la formule $d\bar{x}^i = \sum_{i'=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^{i'}} \cdot dx^{i'}$ pour les différentielles, et que les indices inférieurs se comportent comme dans la formule $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \sum_{i'=1}^n \frac{\partial x^{i'}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$ pour les champs de vecteurs.

La première opération, appelée *contraction des indices*, consiste à sommer sur des indices sélectionnés à l'avance. Par exemple, voici deux contractions possibles d'un tenseur $\Lambda_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3}$: on sélectionne i_1 en haut et j_2 en bas et on définit $\Psi_{j_1}^{i_2 i_3} := \sum_{p=1}^n \Lambda_{j_1 p}^{p i_2 i_3}$; autre possibilité, on sélectionne (i_1, i_3) en haut et (j_1, j_2) en bas et on définit $\Phi^{i_2} := \sum_{p, q=1}^n \Lambda_{p q}^{p i_2 q}$. En général, soit $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ un tenseur quelconque et soit r un entier positif tel que $r \leq p$ et $r \leq q$. Dans les indices inférieurs et dans les indices supérieurs du tenseur $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, choisissons r indices et sommons sur ces indices. Le résultat fournit une quantité à $(p - r)$ indices supérieurs et à $(q - r)$ indices inférieurs. En effectuant les mêmes choix d'indices dans (1.23) et en observant que $\sum_{p=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^i$, on vérifie que le résultat obtenu est effectivement un tenseur.

La seconde opération est une différentiation «absolue», *i.e.* indépendante du système de coordonnées. En utilisant les coefficients de Christoffel d'une connexion linéaire quelconque ∇ , il est possible de définir des dérivées directionnelles d'un tenseur, qu'on appellera *dérivées covariantes*. Ces dérivées doivent fournir un résultat indépendant du système de coordonnées pour qu'il puisse être question d'un «calcul différentiel absolu», au sens de Ricci et de Levi-Civita. Par exemple, si Λ^i est un tenseur une fois contravariant, sa k -ième dérivée covariante sera définie par :

$$(1.24) \quad \nabla_k (\Lambda^i) := \frac{\partial}{\partial x^k} \Lambda^i + \sum_{l=1}^n \Gamma_{kl}^i \Lambda^l.$$

Par un calcul qui utilise la loi de transformation (1.18) des coefficients de Christoffel de la connexion ∇ , on peut vérifier que $\nabla_k (\Lambda^i)$ est effectivement un tenseur qui comporte un indice inférieur supplémentaire et qui jouit de la loi de transformation (1.23), avec $p = q = 1$. Second exemple : la k -ième dérivée covariante d'un tenseur Λ_j^i une fois contravariant et une fois covariant sera définie par

$$(1.25) \quad \nabla_k (\Lambda_j^i) := \frac{\partial}{\partial x^k} \Lambda_j^i - \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l \Lambda_l^i + \sum_{l=1}^n \Gamma_{kl}^i \Lambda_j^l.$$

Notons l'apparence du signe «-». À nouveau, on peut vérifier en utilisant la loi de transformation (1.18) que la dérivée covariante $\nabla_k (\Lambda_j^i)$ ainsi définie constitue

(g_{ij}) et (g^{ij}) , que l'on peut réécrire matriciellement nous obtenons $\nabla_k (g^{ij}) = -\sum_{p,q=1}^n g^{qi} \nabla_k (g_{qp}) g^{pj}$. \square

Le tenseur métrique deux fois covariant g_{ij} et son inverse g^{ij} qui est deux fois contravariant peuvent servir à élever et à baisser les indices d'un tenseur donné $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. Prenons par exemple un tenseur Λ_j une fois covariant. On vérifie aisément que le tenseur $\Lambda^i := \sum_p g^{pi} \Lambda_p$ est une fois contravariant, et l'on a les formules inverses $\Lambda_j = \sum_p g_{pj} \Lambda^p$. Prenons maintenant un tenseur une fois covariant et une fois contravariant Λ_j^i . On vérifie que $\sum_p g_{pi} \Lambda_j^p$ définit un tenseur deux fois covariants en termes des indices i et j . Mais comment écrire ce tenseur : Λ_{ij} ou Λ_{ji} ? Faut-il mettre i ou j à la première place ? Par construction, c'est l'indice supérieur i que nous avons abaissé dans Λ_j^i . Convenons provisoirement d'écrire Λ_{ij} . Pour retrouver le tenseur initial Λ_j^i par une formule inverse, il faut écrire $\sum_p g^{pi} \Lambda_{pj}$ et non pas $\sum_p g^{pj} \Lambda_{pi}$, parce que c'était le premier indice de Λ_{ij} qui avait été abaissé et non pas le second. En définitive, puisque la notation Λ_j^i devient ambiguë lorsque l'on élève et abaisse les indices, *il est nécessaire de préciser l'ordre d'apparition des indices colonne par colonne*. Ainsi, nous écrivons Λ_j^i (ou bien Λ_j^i : il faut faire un choix définitif au départ, mais tous les choix sont équivalents) en affectant chaque indice à une colonne, afin de conserver le numéro de colonne des indices que l'on élève ou que l'on abaisse. Dans la notation Λ_{ij} , deux colonnes étant déjà clairement délimitées, on pourra déduire que $\Lambda_{ij} = \sum_p g_{pi} \Lambda_{pj}$ s'obtient à partir de Λ_j^i par abaissement du premier indice i . Par la même occasion, le tenseur $\Lambda_j^i := \sum_p g^{pi} \Lambda_{jp}$, obtenu par élévation du second indice de Λ_{ji} sera clairement distingué de $\Lambda_j^i = \sum_p g^{pi} \Lambda_{pj}$. Cette distinction, invisible dans la notation Λ_j^i , est absolument nécessaire, puisque les deux tenseurs Λ_j^i et Λ_j^i (évidemment égaux dans le cas spécial où le tenseur $\Lambda_{jp} = \Lambda_{pj}$ est symétrique) peuvent être réellement différents, comme on s'en convaincrait sur un exemple.

Pour terminer, mentionnons que la version mixte du tenseur de courbure $g_j^i := \sum_p g_{pj} g^{pi} = \delta_j^i$ coïncide avec le symbole de Kronecker et que dans ce cas, il est inutile de préciser les colonnes dans la notation des indices.

1.32. Composantes du tenseur de courbure et ses symétries. Grâce à la notion de connexion présentée ci-dessus, on peut introduire maintenant le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. La *courbure* d'une variété riemannienne M est une correspondance qui associe à toute paire de champs de vecteurs (X, Y) sur M une application $A(X, Y)$ définie sur l'ensemble des champs de vecteurs et à valeurs dans l'ensemble des champs de vecteurs. Elle est définie par

$$(1.33) \quad A(X, Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

où Z est un champ de vecteurs sur M et où ∇ est la connexion de Levi-Civita sur M . Grâce aux propriétés **(c1)**, **(c2)** et **(c3)** caractéristiques d'une connexion et grâce à la nullité de la torsion (1.16), on vérifie que l'application $(X, Y, Z) \mapsto$

$A(X, Y)Z$ est trilinéaire. De plus, la trilinearité est aussi satisfaite en multipliant les champs de vecteurs par des fonctions analytiques arbitraires $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\omega(M)$:

$$(1.34) \quad \begin{cases} A(f_1X_1 + f_2X_2, Y)Z = f_1A(X_1, Y)Z + f_2A(X_2, Y)Z, \\ A(X, f_1Y_1 + f_2Y_2)Z = f_1A(X, Y_1)Z + f_2A(X, Y_2)Z, \\ A(X, Y)[f_1Z_1 + f_2Z_2] = f_1A(X, Y)Z_1 + f_2A(X, Y)Z_2. \end{cases}$$

Grâce à ces propriétés de linéarité, la courbure est uniquement déterminée par la collection de champs de vecteurs $A(X_i, X_j)X_k$, où $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$. En décomposant $A(X_i, X_j)X_k$ selon la base des X_i , on introduit des coefficients $A_{ijk}{}^l$ tels que

$$(1.35) \quad A(X_i, X_j)X_k =: \sum_{l=1}^n A_{ijk}{}^l X_l.$$

Comme nous l'avons argumenté après le Lemme 1.30, il est nécessaire d'affecter une fois pour toutes une colonne à chacun des quatre indices (i, j, k, l) . Tous les choix sont équivalents, pourvu que l'on respecte rigoureusement le choix effectué au départ. Ici, nous choisissons d'écrire $A_{ijk}{}^l$, car les trois champs de vecteurs X_i, X_j et X_k apparaissent à la suite dans la définition (1.35). Dans [Ch1963], l'auteur utilise la notation $A_k{}^l{}_{ij}$.

En utilisant l'expression (1.17) de la dérivée covariante en l'insérant dans la définition (1.33) (bien entendu, le terme $\nabla_{[X_i, X_j]}X_k$ s'annule, puisque l'on a trivialement : $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$), on obtient :

$$(1.36) \quad A_{ijk}{}^l = \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l + \sum_{p=1}^n \left(\Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l - \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l \right).$$

C'est l'expression des n^4 composantes du tenseur de courbure. On dit en effet que la collection de ces composantes $A_{ijk}{}^l$ est un *tenseur* parce qu'elle se transforme de la manière suivante à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$:

$$(1.37) \quad \bar{A}_{ijk}{}^l = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{k_1=1}^n \sum_{l_1=1}^n \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^{l_1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^k} A_{i_1j_1k_1}{}^{l_1}.$$

Seul le comportement infinitésimal tangentiel d'ordre 1 d'un changement de coordonnées influe sur les composantes d'un tenseur.

Après un calcul dont nous ne reproduisons pas les étapes intermédiaires ici, nous obtenons une expression massive qu'il faut prendre comme telle, puisque

nous analysons ses caractères immédiatement après :

$$(1.38) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{ijk}{}^l &= \frac{1}{2} \sum_{m,p,q=1}^n g^{qm} g^{pl} \left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^j} \left[\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right] \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m,p,q=1}^n g^{qm} g^{pl} \left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^i} \left[\frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right] \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{ml} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{jm}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^m} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{m,p,q=1}^n g^{pm} g^{ql} \left(\left[\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} \right] \left[\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{qj}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^q} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^p} \right] \left[\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^q} \right] \right). \end{aligned} \right.$$

Voici l'analyse de cette formule.

- (1) Dans le cas $n = 2$, il n'y a essentiellement qu'une seule composante de courbure $A_{121}{}^2$, car les $A_{ijk}{}^l$ possèdent de fortes propriétés de symétrie, et alors la formule (1.38) pour $A_{121}{}^1$ coïncide avec la *formula egregia* (1.5) de Gauss. [Check].
- (2) Les $A_{ijk}{}^l$ sont donnés par une *expression explicite universelle, fonction algébrique des dérivées partielles d'ordre 2, 1 et 0 des coefficients métriques $g_{ij}(x)$ par rapport aux variables x^k* . En effet, grâce aux formules de Cramer, les éléments de la matrice inverse (g^{ij}) s'expriment en fonction des g_{kl} . Cette expression est universelle en ce sens qu'elle ne dépend ni de la métrique, ni du système de coordonnées : pour une autre métrique riemannienne quelconque $d\bar{s}^2 = \sum_{i,j=1}^n \bar{g}_{ij}(\bar{x}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j$, les coefficients de courbure $\bar{A}_{ijk}{}^l$ s'expriment par la même formule rationnelle, en fonction des dérivées partielles d'ordre 2, 1 et 0 des $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$ par rapport aux \bar{x}^k . Nous pouvons donc abréger l'écriture de cette formule sous la forme :

$$(1.39) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{ijk}{}^l(x) &= \mathcal{A}_{ijk}{}^l \left(g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) \\ &= \mathcal{A}_{ijk}{}^l (J_x^2 g_{\alpha\beta}(x)), \end{aligned} \right.$$

en désignant par $J_x^2 g_{\alpha\beta}$ le *jet d'ordre 2 de $g_{\alpha\beta}$* , c'est-à-dire la collection de ses dérivées partielles d'ordre 2, 1 et 0. Dans cette écriture, nous entendons que les indices α, β, γ et δ varient entre 1 et n . La fonction en question sera notée $\mathcal{A}_{ijk}{}^l$. Ainsi, $\bar{A}_{ijk}{}^l(\bar{x}) = \mathcal{A}_{ijk}{}^l (J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}))$.

- (3) Les coefficients de courbure $A_{ijk}{}^l$ s'expriment linéairement en fonction des dérivées partielles d'ordre deux des $g_{\alpha\beta}$. Autrement dit, la fonction $\mathcal{A}_{ijk}{}^l$ de (1.39) est linéaire par rapport à ses derniers arguments. Cette propriété est évidente dans (1.38).

Les composantes $A_{ijk}{}^l$ satisfont les relations de symétrie suivantes :

$$(1.40) \quad \begin{cases} 0 = A_{ijk}{}^l + A_{kij}{}^l + A_{jki}{}^l, \\ 0 = A_{ijk}{}^l + A_{jik}{}^l. \end{cases}$$

Introduisons maintenant les composantes «totalelement covariantes» du tenseur de courbure, qui sont définies par :

$$(1.41) \quad A_{ijkl} := \sum_p g_{pl} A_{ijk}{}^p.$$

On dit que ces composantes sont *totalelement covariantes* parce qu'elles se transforment de la manière suivante à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$:

$$(1.42) \quad \bar{A}_{ijkl} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{k_1=1}^n \sum_{l_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^l} A_{i_1 j_1 k_1 l_1}.$$

On démontre ([DC1992], Chapter 4) que ces nouveaux coefficients A_{ijkl} satisfont les quatre relations de symétrie indicielle suivantes :

$$(1.43) \quad \begin{cases} 0 = A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl}, \\ 0 = A_{ijkl} + A_{jikl}, \\ 0 = A_{ijkl} + A_{ijlk}, \\ 0 = A_{ijkl} - A_{klij}, \end{cases}$$

la quatrième étant conséquence subtile des trois premières. À cause de ces relations de symétries, il n'existe en réalité que $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ composantes A_{ijkl} linéairement indépendantes. Enfin, les $A_{ijk}{}^l$ initiaux qui satisfont les deux relations de symétrie (1.40) *ne satisfont pas de relations de symétrie qui seraient analogues aux deux dernières de la liste (1.43)*.

1.44. Identités de Bianchi. Rappelons que $X_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$ et notons $\nabla_m := \nabla_{X_m}$ l'opérateur de dérivée covariante le long du champ de vecteurs X_m . D'après le calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita (§1.22 ci-dessus), cet opérateur se prolonge comme un *opérateur de différentiation covariante* agissant sur le tenseur de courbure $A_{ijk}{}^l$ de la manière suivante :

$$(1.45) \quad \nabla_m A_{ijk}{}^l := \frac{\partial A_{ijk}{}^l}{\partial x^m} + \sum_{p=1}^n \left(\Gamma_{pm}^l A_{ijk}{}^p - \Gamma_{im}^p A_{pjk}{}^l - \Gamma_{jm}^p A_{ipk}{}^l - \Gamma_{km}^p A_{ijp}{}^l \right)$$

Classiquement, au moyen d'un calcul algébrique qui est parfois présenté de manière «aveugle», on démontre que ce tenseur satisfait les identités suivantes, dites «*de Bianchi*» :

$$(1.46) \quad 0 = \nabla_m A_{ijk}{}^l + \nabla_j A_{mik}{}^l + \nabla_i A_{jmk}{}^l.$$

Observons la permutation circulaire sur les trois indices (m, i, j) .

Grâce à la méthode du repère mobile d'Élie Cartan, il est possible de comprendre pourquoi une telle permutation circulaire apparaît et d'interpréter cette

identité de manière géométrique (voir [Ca1951]). Afin d'offrir au passage une idée intuitive de cette raison, mentionnons que l'identité de Bianchi provient d'une application particulière du Lemme de Poincaré d'après lequel $dd\omega = 0$ pour toute forme différentielle. En effet, considérons une 2-forme différentielle exacte $d\omega := \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \cdot dx^i \wedge dx^j$, différentielle d'une 1-forme ω , et prolongeons la définition de ses coefficients en posant $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$ pour $i \geq j$. Après une réorganisation qui fait apparaître la base de 3-formes $(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k)_{1 \leq i < j < k \leq n}$, la différentielle extérieure de cette 2-forme $d\omega$ s'écrit sous la forme suivante :

$$(1.47) \quad 0 = dd\omega = \sum_{i < j < k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \cdot \left(\frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Lambda_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Lambda_{jk}}{\partial x^i} \right).$$

Ainsi, l'annulation de cette 3-forme conduit aux identités

$$(1.48) \quad 0 = \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Lambda_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Lambda_{jk}}{\partial x^i},$$

pour $1 \leq i < j < k \leq n$. On vérifie alors qu'elles sont satisfaites pour tous $i, j, k = 1, \dots, n$. Formellement, elles sont très similaires aux identités de Bianchi (1.46).

1.49. Tenseur de Ricci et sa divergence covariante. Les relations de symétrie (1.) impliquent que toutes les contractions que l'on peut effectuer sur les indices de $A_{ijk}{}^l$ se ramènent ou bien au tenseur nul (inintéressant) ou bien au *tenseur de Ricci*, ou à son opposé. Ce tenseur à deux indices est défini par :

$$(1.50) \quad A_{ij} := \sum_{k=1}^n A_{ikj}{}^k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g^{kl} A_{ikjl}.$$

En partant de la deuxième représentation de A_{ij} , issue de (1.41) et en appliquant la quatrième relation de symétrie (1.43), on vérifie que ce tenseur contracté est symétrique : $A_{ij} = A_{ji}$. De plus, en contractant la transformation (1.42), on vérifie que l'on a :

$$(1.51) \quad \bar{A}_{ij} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} A_{i_1 j_1}.$$

Autrement dit, le tenseur de Ricci est complètement covariant.

En appliquant le principe d'élévation des indices que nous avons déjà utilisé en (1.41), définissons maintenant le *tenseur de Ricci mixte*, qui est une fois covariant et une fois contravariant :

$$(1.52) \quad A_i{}^j := \sum_{p=1}^n g^{pj} A_{ip}.$$

Définissons aussi la *courbure scalaire* par :

$$(1.53) \quad A := \sum_{i,j=1}^n g^{ij} A_{ij}.$$

Observons que la courbure scalaire possède une expression équivalente, utile dans la suite :

$$(1.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} A_{ij} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{p=1}^n g^{ij} A_{ipj}{}^p = \sum_{i,p=1}^n A_{ip}{}^{ip} \\ = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}{}^{ij}. \end{array} \right.$$

Le lemme suivant constituera le point de départ fondamental pour l'écriture des équations de la gravitation d'Einstein.

Lemme 1.55. *La divergence covariante du tenseur de Ricci s'exprime en fonction de la dérivée covariante de la courbure scalaire de la manière suivante :*

$$(1.56) \quad \sum_{j=1}^n \nabla_j (A_i{}^j) = \frac{1}{2} \nabla_i (A).$$

Autrement dit, le *tenseur mixte d'Einstein* défini par

$$(1.57) \quad E_i{}^j := A_i{}^j - \frac{1}{2} \delta_i^j A$$

a une «divergence absolue» nulle.

Démonstration. Définissons les composantes deux fois covariantes et deux fois contravariantes du tenseur de courbure :

$$(1.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{ij}{}^{kl} := \sum_{p=1}^n g^{pk} A_{ijp}{}^l \\ = \sum_{p,q=1}^n g^{pk} g^{ql} A_{ijpq} \end{array} \right.$$

En insérant les deux relations d'antisymétrie $A_{ijkl} = -A_{jikl} = -A_{ijlk}$ dans cette définition, on vérifie immédiatement que l'on a aussi les deux relations d'antisymétrie suivantes :

$$(1.59) \quad A_{ij}{}^{kl} = -A_{ji}{}^{kl} = -A_{ij}{}^{lk}.$$

Pour établir (1.), partons de l'identité de Bianchi (1.) dans laquelle on remplace k par p , multiplions par g^{pk} et sommons sur l'indice p , ce qui donne :

$$(1.60) \quad 0 = \sum_{p=1}^n \left(g^{pk} \cdot \nabla_m (A_{ijp}{}^l) + g^{pk} \cdot \nabla_j (A_{mip}{}^l) + g^{pk} \cdot \nabla_i (A_{jmp}{}^l) \right).$$

Grâce au théorème de Ricci d'après lequel $\nabla_k (g_{ij}) = \nabla_k (g^{ij}) = 0$, nous pouvons insérer les g^{pk} à l'intérieur des dérivées covariantes, ce qui donne, en tenant compte de la définition des $A_{ij}{}^{kl}$:

$$(1.61) \quad 0 = \nabla_m (A_{ij}{}^{kl}) + \nabla_j (A_{mi}{}^{kl}) + \nabla_i (A_{jm}{}^{kl}).$$

Maintenant, contractons cette identité : posons $k := i, l := j$ et sommons sur i et sur j :

$$(1.62) \quad 0 = \nabla_m \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}{}^{ij} \right) + \sum_{j=1}^n \nabla_j \left(\sum_{i=1}^n A_m{}^i{}_{ij} \right) + \sum_{i=1}^n \nabla_i \left(\sum_{j=1}^n A_{jm}{}^{ij} \right).$$

D'après (1.), dans la première parenthèse, nous reconnaissons la courbure scalaire. En permutant les indices i et j dans la seconde parenthèse, nous reconnaissons le tenseur de Ricci mixte $-A_m{}^j{}_{ij}$ défini en (1.). Enfin, en permutant les indices j et m dans la seconde parenthèse, nous reconnaissons $-A_m{}^i$. Au total, nous pouvons réécrire cette identité sous la forme :

$$(1.63) \quad 0 = \nabla_m(A) - \sum_j \nabla_j (A_m{}^j) - \sum_i \nabla_i (A_m{}^i).$$

Cette identité est clairement équivalente à (1.56), ce qui complète la démonstration. \square

1.64. Covariance de la forme quadratique de Ricci. Nous affirmons que la forme différentielle quadratique

$$(1.65) \quad \sum_{i,j=1}^n A_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^n \bar{A}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j$$

est conservée par tout changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. En effet, grâce à la tensorialité de A_{ij} exprimée par la loi de transformation (1.52), nous pouvons calculer :

$$(1.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k,l=1}^n \bar{A}_{kl} d\bar{x}^k d\bar{x}^l = \sum_{k,l,p,q,i,j=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l} A_{pq} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} dx^i dx^j \\ \qquad \qquad \qquad = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} dx^i dx^j. \end{array} \right.$$

1.67. Analyse fine de la covariance du tenseur de Ricci. Par ailleurs, en contractant l'expression (1.39), nous observons que les composantes A_{ij} du tenseur de Ricci s'expriment comme des fonctions \mathcal{A}_{ij} du jet d'ordre 2 des coefficients métriques $g_{\alpha\beta}$ et que ces fonctions \mathcal{A}_{ij} dépendent linéairement des dérivées partielles d'ordre 2 des $g_{\alpha\beta}$. D'après les remarques qui suivent l'expression (1.38), il se trouve que les \bar{A}_{ij} s'expriment par *les mêmes fonctions* \mathcal{A}_{ij} du jet d'ordre deux $J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}$ des coefficients métriques transformés. Ainsi, la loi de transformation tensorielle (1.51) doit-elle précisément s'écrire :

$$(1.68) \quad \mathcal{A}_{ij} (J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} \mathcal{A}_{i_1 j_1} (J_x^2 g_{\alpha_1 \beta_1}),$$

avec les mêmes fonctions \mathcal{A}_{ij} de part et d'autre de l'égalité. Dans cette relation, nous sous-entendons que le jet $J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}$ s'exprime en fonction du jet $J_x^2 g_{\alpha_1\beta_1}$. En effet, grâce à (1.28), nous savons déjà comment $\bar{g}_{\alpha\beta}$ s'exprime en fonction de $g_{\alpha_1\beta_1}$ à travers le changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. En appliquant la dérivation $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\gamma} = \sum_{\gamma_1=1}^n \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_1}}$ à ces relations $\bar{g}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha_1, \beta_1=1}^n \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\alpha_1\beta_1}$, nous obtenons la loi de transformation pour les dérivées premières :

$$(1.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma} = \sum_{\alpha_1, \beta_1=1}^n \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\alpha_1\beta_1} + \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial^2 x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\gamma} g_{\alpha_1\beta_1} \right) + \\ \quad + \sum_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1=1}^n \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial g_{\alpha_1\beta_1}}{\partial x^{\gamma_1}}. \end{array} \right.$$

En appliquant à nouveau la dérivation $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\delta}$, on obtiendrait une formule de transformation pour les dérivées secondes $\frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma \partial \bar{x}^\delta}$. Soit $G = (g_{ij})$ la matrice (symétrique) des coefficients métriques, où i désigne l'indice des lignes et j celui des colonnes. De même, soit \bar{G} la matrice des \bar{g}_{ij} . Nous résumons les relations obtenues entre le jet d'ordre 2 de \bar{G} et le jet d'ordre 2 de G sous la forme suivante :

$$(1.70) \quad J_{\bar{x}}^2 \bar{G} = \Pi (J_{\bar{x}}^3 x, J_x^2 G).$$

Par construction, Π est un polynôme universel (dont on pourrait aisément écrire l'expression explicite) à valeurs vectorielles qui dépend du jet d'ordre trois du changement de coordonnées (noter l'apparition des dérivées d'ordre 2 de x par rapport à \bar{x} dans (1.69)). C'est avec ces formules que l'on doit remplacer $J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}$ en fonction de $J_x^2 g_{\alpha_1\beta_1}$ dans les relations (1.68) pour leur donner sens.

1.71. Formes différentielles quadratiques covariantes. En suivant Élie Cartan, nous dirons qu'une forme quadratique différentielle

$$(1.72) \quad \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^0 dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j$$

dont les coefficients sont des fonctions C_{ij}^0 du jet d'ordre 2 des coefficients métriques est *covariante de la forme quadratique fondamentale* $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$ si l'on a :

$$(1.73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^0 \left(\bar{g}_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma}(\bar{x}), \frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma \partial \bar{x}^\delta}(\bar{x}) \right) d\bar{x}^i d\bar{x}^j = \\ \quad = \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j, \end{array} \right.$$

avec les mêmes fonctions C_{ij}^0 de part et d'autre de l'égalité, pour tout changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. De manière équivalente, les C_{ij}^0 se comportent

comme le tenseur de Ricci A_{ij} et jouissent d'une loi de transformation précise, exactement analogue à (1.68) :

$$(1.74) \quad C_{ij}^0 (J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} C_{i_1 j_1}^0 (J_x^2 g_{\alpha_1 \beta_1}),$$

Pour être encore plus précis, en tenant compte de (1.70), les fonctions universelles C_{ij}^0 satisfont :

$$(1.75) \quad C_{ij}^0 (\Pi (J_{\bar{x}}^3 x, J_x^2 G)) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} C_{i_1 j_1}^0 (J_x^2 G),$$

après remplacement de \bar{x} en fonction de x pour donner sens à cette égalité.

Avant de formuler le théorème d'unicité d'Élie Cartan, évoquons rapidement les origines physiques des équations d'Einstein.

1.76. Géométrie et physique. En opposition à une physique des phénomènes discrets, la relativité générale se fonde sur un certain nombre de postulats qui sont caractéristiques d'une «physique du continu» : les objets célestes et terrestres peuvent être décrits au moyen de concepts géométriques ; continuité et différentiabilité sont acceptées comme hypothèses fondamentales ; mesure de l'espace et mesure du temps peuvent s'effectuer avec des moyens expérimentaux ; enfin, les appareils de mesure confèrent un sens tangible à l'idée de *système de coordonnées mathématiques sur l'espace-temps*. Se pose alors une question cruciale :

Quels objets géométriques doit-on placer au fondement d'une physique du continu ? Existe-t-il des objets géométriques qui s'imposent a priori pour penser l'univers physique continu ?

Sans approfondir le problème métaphysique des rapports entre la pensée mathématique pure et la pensée physique, contentons-nous d'évoquer la contribution de Riemann à cette question qui agite encore la science contemporaine.

Dans son *habilitationsvortrag*, Riemann s'interrogeait *a priori* sur la notion d'espace. Il s'agissait là d'un bouleversement philosophique majeur dans l'histoire des mathématiques. L'espace cessait d'être une notion transmise par l'expérience, intuitive et caractérisée de manière unique. En effet, l'espace changeait radicalement de statut pour devenir question *a priori* sur l'espace : en tant que donnée intuitive, l'espace disparaissait ; il réapparaissait en tant que question pour la science. Et les conceptions qui pouvaient naître de cette question *a priori* se démultipliaient *a priori*. En effet, le destin négatif de l'axiome des parallèles d'Euclide, l'émergence des géométries non-euclidiennes, à travers les travaux de Bolyai et de Lobatchevsky (anticipés par Gauss), la constitution de la géométrie projective dans l'école française et l'émergence des travaux de Gauss sur les transformations conformes appliquées à la cartographie, toutes ces innovations géométriques poussèrent Riemann à s'interroger totalement *a priori* sur les hypothèses qui peuvent servir de fondement à la conceptualisation de la notion d'espace, dans les mathématiques et dans la physique. Il s'agissait en particulier de s'interroger

sur les données primitives de la géométrie, sur leur degré de généralité, sur leur progressivité, sur leur dépendance relative, sur leur nécessité relative⁸, etc.

Les rapports mutuels des données primitives [de la Géométrie] restent enveloppés de mystère ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même *a priori* si elles peuvent l'être ([Ri1854], p. 280).

Ainsi Riemann anticipait-il l'*explosion et la ramification nécessaires des hypothèses géométriques possibles*. Effectivement, la seconde moitié du dix-neuvième siècle et le début du vingtième devaient voir naître la géométrie projective, la géométrie conforme, la géométrie lorentzienne, les espaces non holonomes, les espaces généralisés au sens d'Élie Cartan, etc.

Conséquence inévitable de cette diversité : la théorie physique se voyait obligée *a priori* d'effectuer un choix *a posteriori* parmi toutes les géométries possibles. Les mathématiques, avec leur *hubris* hypothético-déductive, et leur profusion incontrôlée de résultats abstraits, encombraient, embarrassaient, déconcertaient déjà la physique, qui se voyait contrainte de reconnaître sous cet afflux quelle géométrie correspondait à la réalité, dans un faisceau de théories géométriques architecturées.

[...] les propriétés, par lesquelles l'espace [physique] se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntés qu'à l'expérience. De là surgit le problème de rechercher les faits les plus simples au moyen desquels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature même de l'objet n'est pas complètement déterminé ; car on peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. [...] Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires ; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses ([Ri1854], p. 281). [...] Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui ([Ri1854]).

Ces prédictions allaient être confirmées par Einstein.

1.77. *Équations de la gravitation d'Einstein*. La relativité restreinte est fondée sur une classe restreinte de transformations de coordonnées, celles qui stabilisent

⁸Nous pourrions soutenir la thèse suivante : la méthode axiomatique et hypothético-déductive, en mathématiques s'enracine profondément dans la pensée riemannienne. En effet, Riemann est l'un des rares mathématiciens de l'histoire qui ait accepté les interrogations mathématiques dans leur pureté intrinsèque, quelle que soit leur difficulté invisible, et plus encore, qui les ait *formulées explicitement dans ses travaux*, quelle que soit leur ouverture. La méthode axiomatique construit un cadre arborescent pour insérer ces interrogations mathématiques absolues dans une architecture qui les prolonge, qui les réalise et qui les démultiplie. Sur la question de l'espace, Riemann aura anticipé les architectures modernes et stratifiées de la topologie et de la géométrie différentielle, et c'est pourquoi nous disons qu'il y a quelque chose de la pensée riemannienne qui se réalise dans la méthode axiomatique. Il est vrai que cette méthode, qui fut largement promue par Hilbert, aime à cacher son questionnement intrinsèque. Mais elle n'est qu'un cadre d'expression rigoureusement élaboré pour faire face à la complexité du réel spéculatif : elle ne contrôle que partiellement les tensions «riemanniennes» qui la déploient.

la forme de Minkowski $-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2$ sur l'espace-temps (après normalisation à 1 de la vitesse c de la lumière). Précisément, ce sont les transformations linéaires $\bar{x}^i = \sum_{j=1}^4 u_j^i x^j$ dites «de Lorentz» qui satisfont :

$$(1.78) \quad -(d\bar{x}^1)^2 - (d\bar{x}^2)^2 - (d\bar{x}^3)^2 + (d\bar{x}^4)^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2.$$

Il n'y a aucune raison de se restreindre à une telle classe de transformations. Mais à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ quelconque, cette géométrie lorentzienne ne subit qu'une déformation apparente : les trajectoires des particules ne sont certes plus rectilignes, mais elles sont curvilignes, et pour être plus exact, ce ne sont que des «images» curvilignes de droite, vues à travers le prisme déformant de la transformation $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. Notamment, la courbure de l'espace-temps reste constante, puisque celle de l'espace-temps de Minkowski l'était. Au total, la déformation $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ fournit une image différente du même objet.

En relativité restreinte, Einstein postulait que les lois physiques sont *invariantes* par rapport à toute transformation de Lorentz : leur forme est exactement la même dans tout référentiel lorentzien. Motivé par les expériences négatives de Michelson et Morley sur la détection du vent d'éther, Einstein postulait aussi la constance de la vitesse de la lumière dans tout référentiel. Pour insister sur le caractère *a priori* et «métaphysique» des raisonnements d'Einstein, on pourrait aussi considérer que la vitesse de la lumière est une loi physique, dont la forme est indépendante du référentiel lorentzien, et par conséquent, la vitesse de la lumière est constante : le second postulat serait une conséquence du premier.

En recherchant une généralisation de la relativité restreinte aux systèmes de coordonnées non lorentziens, Einstein fut conduit à *abandonner le principe d'invariance*, trop restrictif, et à le remplacer par un *principe de covariance*. Ce principe, qu'Einstein emprunta aux travaux mathématiques de Ricci et de Levi-Civita, exprime toujours une exigence purement *a priori*, sans origine physique :

Principe de covariance 1.79. *Les lois d'une physique géométrisée doivent pouvoir se transformer selon des règles précises lorsque l'on passe d'un système de coordonnées sur l'espace-temps à un autre.*

Seconde exigence *a priori*, qui doit évidemment être satisfaite :

Principe d'équivalence 1.80. *Deux systèmes physiques qui se déduisent l'un de l'autre par un changement de coordonnées sur l'espace-temps doivent être considérés comme rigoureusement équivalents.*

Comme son contemporain Nordström, Einstein recherchait une expression relativiste des lois de la gravitation newtonienne, gouvernée par l'équation de Poisson :

$$(1.81) \quad \Delta\Phi = 4\pi G \rho,$$

où Φ est le potentiel scalaire du champ de gravité, $G = 6,67 \text{ S.I.}$ est la constante de gravitation universelle et ρ est la densité de matière. Après plusieurs tentatives infructueuses, on a suggéré de remplacer le scalaire densité de matière ρ par un

tenseur énergie-impulsion T_{ij} . Cependant, cette voie a été abandonnée car il semblait impossible de satisfaire la loi de conservation. Einstein montra que cela est possible, à condition de travailler dans des coordonnées curvilignes quelconques, en présence de courbure.

1.82. Conditions auxquelles doit satisfaire le tenseur d'Einstein. Dans le mémoire où il expose sa synthèse finale ([Ei1916]), Einstein postule que toutes les caractéristiques géométriques de l'espace-temps peuvent être décrites au moyen d'un tenseur différentiel E_{ij} deux fois covariant qui satisfait quatre conditions.

1. Ce tenseur est exprimé dans un espace pseudo-riemannien quadridimensionnel.
2. Il doit dépendre des dérivées partielles des coefficients métriques d'ordre au plus égal à 2.
3. Il doit être linéaire par rapport aux dérivées partielles des coefficients métriques d'ordre exactement égal à 2.
4. Sa version mixte $E_i^j := \sum_{p=1}^n g^{pj} E_{ip}$ doit être de divergence absolue nulle :

$$(1.83) \quad 0 = \sum_{j=1}^n \nabla_j E_i^j.$$

Voici comment Einstein présentait le choix de ce tenseur :

[...] pour le champ de gravitation en l'absence de matière, il est naturel de chercher à annuler le tenseur symétrique $B_{\mu\nu}$, déduit du tenseur $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$. [...] avec le choix du système de coordonnées que nous avons fait, ces équations s'écrivent dans le cas du champ libre de matière :

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0 \\ \sqrt{-g} = 1. \end{cases}$$

Il faut remarquer que le choix de ces équations comporte un minimum d'arbitraire. Car, en dehors de $B_{\mu\nu}$, il n'existe pas de tenseur de rang 2 formé des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées qui ne comporte aucune dérivée d'ordre supérieur à deux et qui soit linéaire en fonction de ces dernières ([Ei1916], p. 209 de la traduction française).

Notons que les considérations sont légèrement différentes : la normalisation $\sqrt{-g} = 1$ du déterminant de la métrique introduit une simplification des équations de la gravitation dans le vide qui élimine la moitié des termes du tenseur de Ricci A_{ij} classique. En vérité, Einstein n'introduira le tenseur $A_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i A$ que dans un mémoire ultérieur. En tout état de cause, sa dernière affirmation revient à dire que le tenseur de Ricci A_{ij} est essentiellement le seul tenseur deux fois covariant qui dépend linéairement des dérivées partielles d'ordre deux des coefficients métriques. Cette affirmation signifie sans doute que le seul tenseur que l'on peut obtenir par contraction des indices à partir du tenseur de courbure A_{ijk}^l est le tenseur de Ricci, ce qui était bien connu.

Élie Cartan poussa plus loin la question d'unicité et démontra un théorème beaucoup plus fort que cette observation élémentaire.

1.84. Théorème d'unicité d'Élie Cartan. Supposons donc $n = 4$ et soit $\sum_{i,j=1}^4 g_{ij} dx^i dx^j$ une pseudo-métrique non-dégénérée, possédant trois valeurs propres négatives et une valeur propre positive en tout point. Soit A_{ij} le tenseur de Ricci. Nous avons déjà observé que la forme quadratique différentielle $\sum_{i,j=1}^4 A_{ij} dx^i dx^j$ est covariante de la forme quadratique fondamentale $\sum_{i,j=1}^4 g_{ij} dx^i dx^j$ (cf. (1.65)). On vérifierait qu'il en est de même pour la forme $\sum_{i,j=1}^4 A g_{ij} dx^i dx^j$, obtenue en multipliant la forme fondamentale par la courbure scalaire A . Enfin, la forme quadratique fondamentale est évidemment covariante d'elle-même.

Theorem 1.85. (Élie CARTAN 1922) *Toute forme quadratique différentielle*
(1.86)

$$\sum_{i,j=1}^4 C_{ij}^0 dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^4 C_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j,$$

linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre 2 des coefficients $g_{\alpha\beta}$ et covariante de la forme quadratique fondamentale est nécessairement une combinaison linéaire des trois formes précédentes :

$$(1.87) \quad \sum_{i,j=1}^4 C_{ij}^0 dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^4 [\nu A_{ij} + \mu A g_{ij} + \lambda g_{ij}] dx^i dx^j,$$

avec des constantes λ, μ et ν arbitraires.

Grâce au calcul effectué dans le Lemme 1.55, il en découle la conséquence suivante.

Corollaire 1.88. *Le tenseur une fois covariant et une fois contravariant défini par :*

$$(1.89) \quad E_i^j := \mu \left(A_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j A \right) + \lambda \delta_i^j,$$

où λ et μ sont des constantes, est le plus général qui satisfait la loi de conservation $\sum_{j=1}^4 \nabla_j E_i^j = 0$.

1.90. Avertissement. Quatre préoccupations sous-tendent la rédaction de ce mémoire :

- (i) un souci de mentionner régulièrement des pensées intuitives, conceptuelles, dialectiques, heuristiques et spéculatives propres à la géométrie, de les développer et de leur conférer le statut qu'elles méritent ; en effet, telles les âmes d'une Atlantide disparue, ces pensées virtuelles sont trop souvent englouties dans le langage formel ; elles sont quasi fossilisées dans les strates innombrables de la tour de Babel des langages mathématico-physiques formalisés ;

- (ii) un souci de concrétude absolue dans la présentation des concepts géométriques, cachés derrière les définitions «formalistes» ;
- (iii) un *respect absolu des calculs intermédiaires*, jamais envisagés comme des étapes obscures indignes d'apparaître dans le texte écrit, mais toujours considérés comme des briques essentielles pour ériger les raisonnements géométriques ;
- (iv) une volonté d'*approfondir et de méditer le contenu spéculatif immanent aux mémoires originaux* de Gauss, de Riemann, de Christoffel, de Lie, d'Einstein et d'Élie Cartan.

De ces quatre préoccupations découlent trois principes majeurs qui imposeront un style particulier à la rédaction de ce mémoire :

- (a) accepter la longueur du texte : il est paradoxalement beaucoup plus facile de lire un texte long et complet qui s'interdit les ellipses qu'un texte court qui fait l'impasse sur le suivi dialectique et rhétorique des raisonnements ;
- (b) renforcer la présence d'une langue «littéraire» ou tout du moins «littérale» : les explications reformulées en langue naturelle offrent toujours des éclaircissements qui sont indispensables à la compréhension adéquate d'un sujet ;
- (c) préciser chaque geste de calcul qui entre dans la dérivation d'une identité formelle et privilégier systématiquement la concrétude des calculs : ce n'est qu'à cette condition que le lecteur pourra pénétrer dans les royaumes oubliés de la géométrie classique, ceux que la vague de formalisation au milieu du vingtième siècle n'a pas eu l'énergie d'absorber et de réécrire en totalité.

Ces orientations s'expliquent par notre projet initial : rendre accessibles les idées d'Élie Cartan, les retraduire, les reconstruire, en s'aidant de sources modernes (par exemple [Ga1989], [OL1995]), mais en dépassant le niveau de la théorie générale. Quatre mois nous auront été nécessaires pour déchiffrer les soixante-trois pages du mémoire original [Ca1922] d'Élie Cartan. Parfois sans indiquer ses sources, Élie Cartan applique des théorèmes profonds qui requièrent une culture préalable. Certains passages laissent réellement perplexe quant aux arguments qu'il utilise. Le lecteur opiniâtre et curieux finit par admettre que la seule stratégie qui se présente à lui est de reconstituer *ab initio* tous les raisonnements suggérés de manière elliptique, et de compléter tous les calculs passés sous silence par Élie Cartan.

RÉFÉRENCES

- [Bo1993] BOURGUIGNON, J.-P. : *Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique*, dans : *1830–1930 : a century of geometry. Epistemology, history and mathematics*, L. Boi and J.-M. Salanskis Ed., Springer, Berlin, 1993, pp. 150–164.
- [Ca1902] CARTAN, É. : *Sur l'équivalence des systèmes différentiels*, C. R. Acad. Sc. **135** (1902), 781–783.
- [Ca1922] CARTAN, É. : *Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, J. Math. pures et appl. **1** (1922), 141–203.
- [Ca1951] CARTAN, É. : *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, deuxième édition revue et augmentée, 1951.

- [Ca1952] CARTAN, É. : *Notice sur les travaux scientifiques*, Œuvres, Tome 1, Vol. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1952.
- [Ch1963] CHARON, J.E. : *15 Leçons sur la relativité générale, avec une introduction au calcul tensoriel*, Genève, Kister, 1963.
- [Da1887-96] DARBOUX, G. : *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4 vol., Gauthier-Villars, Paris, 1887–1896.
- [DC1976] DO CARMO, M.P. : *Differential geometry of curves and surfaces*, Translated from the Portuguese, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976, viii+503 pp.
- [DC1992] DO CARMO, M.P. : *Riemannian geometry*, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser, Boston, 1992, xiv+300 pp.
- [Do1994] DOMBROWSKI, P. : *150 years after Gauss' «disquisitiones generales circa superficies curvas»*, Astérisque **62**, Société mathématique de France, 1979.
- [Ei1915] EINSTEIN, B. : *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin 1915 (1915), 778–786.
- [Ei1916] EINSTEIN, B. : *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik **49** (1916), 769–822. Traduction française dans Œuvres choisies, Relativités I, Paris, Seuil, 1993, pp. 179–227.
- [Ga1966] GANTMACHER, F. : *Théorie des matrices*, traduit du russe par C. SARTHOU, 2 Vol., Paris, Dunod, 1966.
- [Ga1989] GARDNER, R.B. : *The method of equivalence and its applications*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **58** (SIAM, Philadelphia, 1989), 127 pp.
- [Ga1827] GAUSS, C.F. : *Anzeige : Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gött. Gel. Anz. (1827), 1761–68. Werke IV, 341–47.
- [Ga1828] GAUSS, C.F. : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comment. soc. Gött. **6** (1828), 99–146. Werke IV, 217–58.
- [HT1990] HUGHSTON, L.P.; TOD, K.P. : *An introduction to general relativity*, London Mathematical Society Student Texts, No. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Ko1972] KOBAYASHI, S. : *Transformation groups in differential geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 70, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1972.
- [Kr1994] KREYSZIG, E. : *On surface theory in E^3 and generalizations*, Expo. Math. **12** (1994), 97–123.
- [Hi2003] HITCHIN, N. : *Projective geometry*, unpublished lecture notes, b3 course 2003.
- [Le1900] LEVI-CIVITA, T. : *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*, Rend. Circ. Mat. Palermo **42** (1917), 173–204.
- [LR1901] LEVI-CIVITA, T.; RICCI, G. : *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. **54** (1901), 125–201.
- [Li1978] LIBERMANN, P. : Article *Géométrie différentielle* dans J. Dieudonné (Ed.), *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700–1900*, Paris, Hermann, 1978.
- [Li1996] LIBERMANN, P. : *Élie. Cartan (1869–1951)*, Travaux mathématiques, Fasc. VIII, 115–158. Sém. Math. Luxembourg, Centre Univ. Luxembourg, 1996.
- [Me2004] MERKER, J. : *Commentaire philosophique du Theorema Egregium*, en préparation.
- [OL1995] OLVER, P.J. : *Equivalence, Invariance and Symmetries*. Cambridge, Cambridge University Press, 1995, xvi+525 pp.

- [Ri1854] RIEMANN, B. : *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationsvortrag, 10 juni 1854. *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13** (1868). *Œuvres complètes*, pp. 280–299, trad. J. HOÛEL, Paris, Gauthier-Villars, 1898.
- [Ri1898] RIEMANN, B. : *Œuvres mathématiques*, traduites en français par L. LAUGEL, avec une préface de C. HERMITE et un discours de F. KLEIN, Paris, Gauthier-Villars, 1898.
- [Sc1954] SCHOUTEN, J.A. : *Ricci calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.
- [Sp1970] SPIVAK, M. : *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol 2, ix+425 pp., Brandeis University, Publish or perish, Waltham, Mass., 1970.
- [St1983] STERNBERG, S. : *Lectures on differential geometry*, Chelsea, 1983.
- [St1889] STÄCKEL, P. : *Gauß als Geometer*, G.W. **10**, 2, *Abhandlung* 4, 1–123.
- [We1972] WEINBERG, S. : *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley, New York, 1972.

[F] : Tenseurs de Hachtroudi-Chern explicites. Il s’agit d’un projet particulièrement ambitieux, quant à l’ampleur du chantier de calculs formels. Je le décrirai très brièvement.

La méthode d’équivalence d’Élie Cartan est souvent conduite de manière *non paramétrique*, c’est-à-dire sans mener les calculs explicites jusqu’au bout. Les formes différentielles qui apparaissent peuvent en effet être introduites sans que l’on connaisse leur expression complète, en général très massive. Le « *Lemme de Cartan* » — un argument élémentaire d’algèbre linéaire — permet en effet d’introduire pas à pas de nouvelles formes différentielles sans avoir à les développer. Il semblerait qu’Élie Cartan ait assez rapidement inventé ce court-circuit qui apparaît fréquemment dans nombre de ses mémoires.

En appliquant la méthode d’équivalence aux hypersurfaces analytiques réelles Levi non-dégénérées de \mathbb{C}^{n+1} ($n \geq 1$), S.-S. Chern en reste aux calculs non paramétriques. Pour les hypersurfaces de \mathbb{C}^2 , les calculs explicites des formes différentielles ont été essentiellement conduits par É. Cartan, qui confirmait les travaux de S. Lie et d’A. Tresse. Pour $n = 2$, et pour le système différentiel associé, M. Hachtroudi a conduit les calculs jusqu’au bout, en bénéficiant des interprétations géométriques que lui apprenait É. Cartan pendant le déroulement de sa thèse, ce qui lui a permis d’éviter de nombreux calculs intermédiaires que la méthode directe (réemployée par S.-S. Chern) occasionne. Pour $n \geq 3$, M. Hachtroudi ne semble pas conduire tous les calculs explicitement. Malgré la difficulté que j’ai à déchiffrer son travail (pourtant beaucoup plus accessible que ceux d’É. Cartan), je devine qu’il applique des arguments indirects et astucieux pour obtenir (au moins) les Théorèmes 1.7 et 1.23 de [C] ci-dessus.

Avant de découvrir la thèse de M. Hachtroudi (dont s’est inspiré S.-S. Chern), j’ai conduit la méthode d’équivalence pour le système différentiel associé à une hypersurface analytique réelle Levi non-dégénérée de \mathbb{C}^{n+1} ($n \geq 2$) via un calcul *paramétrique et explicite*, jusqu’au niveau des tenseurs fondamentaux $S_{\alpha\beta}^{\sigma\rho}$. On sait en effet que les sept autres tenseurs de la $\{e\}$ -structure finale sont fonctionnellement dépendants des $S_{\alpha\beta}^{\sigma\rho}$, ce qui permet d’obtenir facilement la caractérisation différentielle explicite du système maximale symétrique $Y_{X_i X_j} = 0$,

$i, j = 1, \dots, n$. Cependant, je pense que le calcul paramétrique *complet* mérite d'être conduit jusqu'au bout, ne serait-ce qu'en vertu d'une exigence de complétude et parce que personne n'est jamais parvenu à le faire. S.M. Webster m'a écrit qu'un étudiant de Fornæss aurait essayé sans succès de programmer ce calcul sur machine ; S. Neut et M. Petitot, professionnels du calcul formel au LIFL, sont parvenus à implémenter la méthode d'équivalence dans ses grandes lignes, mais appliquée à de tels systèmes différentiels, elle n'aboutit que pour $n = 1$ (temps de calcul : 10 secondes) et pour $n = 2$ (temps de calcul sur un Sun : entre 1 heure et 3 heures, en fonction de la machine). G. Schmalz m'a dit que ce calcul complet serait un réel achèvement.

Lorsque je serai libéré des articles en retard, je me réserverai deux mois pour appliquer mes techniques personnelles de calcul manuel et achever ce travail. Grâce à mon travail [A] sur la méthode d'équivalence, je me suis armé d'astuces de calcul supplémentaires, de sorte que je suis certain d'aboutir.

[E] : Extension holomorphe des fonctions CR. Le projet est de compléter les deux excellents articles de survol [Trp1996] et [Tu1998] de J.-M. Trépreau et A.E. Tumanov, qui ne couvrent pas les aspects propagationnels que ces auteurs ont développés dans [Trp1990] et dans [Tu1994]. Ces travaux ont introduit des techniques puissantes qu'Egmont Porten, Burglind Jöricke et moi-même avons régulièrement appliquées à l'étude des singularités éliminables. B. Jöricke a toujours pensé que le théorème d'extension holomorphe à un wedge des fonctions CR définies sur une sous-variété générique globalement minimale de \mathbb{C}^n (conjecturé par J.-M. Trépreau dans [Trp1990] et démontré indépendamment dans [Jö1996], [Me1994]) devait être structurellement simplifié. Elle a l'idée (informelle ; parce que je ne pense pas que cette idée ait abouti) de construire de longs disques qui épousent les courbes CR tangentes par morceaux. Récemment, E. Porten a trouvé une simplification importante de la théorie, qui redémontre le théorème d'extension de Trépreau-Tumanov *en utilisant seulement une partie des outils de propagation développés dans* [Trp1990], [Tu1994]. Nous allons très probablement rédiger cette démonstration en commun, en incorporant une analyse optimale de l'équation de Bishop dans les classes $\mathcal{C}^{\kappa, \alpha}$, les travaux connus dans cette direction étant dispersés dans la littérature.

RÉFÉRENCES

- [Jö1996] JÖRICKE, B. : *Deformation of CR-manifolds, minimal points and CR-manifolds with the microlocal analytic extension property*, J. Geom. Anal. **6** (1996), no.4, 555–611.
- [Me1994] MERKER, J. : *Global minimality of generic manifolds and holomorphic extendibility of CR functions*. Internat. Math. Res. Notices 1994, no.8, 329–342.
- [Trp1990] TRÉPREAU, J.-M. : *Sur la propagation des singularités dans les variétés CR*, Bull. Soc. Math. Fr. **118** (1990), no.4, 403–450.
- [Trp1996] TRÉPREAU, J.-M. : *Holomorphic extension of CR functions : a survey*, Partial differential equations and mathematical physics (Copenhagen, 1995 ; Lund 1995), 333–355, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 21, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

- [Tu1994] TUMANOV, A.E. : *Connections and propagation of analyticity for CR functions*, Duke Math. J. **73** (1994), no.1, 1–24.
- [Tu1998] TUMANOV, A.E. : *Analytic discs and the extendibility of CR functions*, Integral geometry, Radon transforms and complex analysis (Venice, 1996), 123–141, Lecture Notes in Math., **1684**, Springer, Berlin, 1998.

[B] : Symétries de Lie de systèmes d'équations aux dérivées partielles analytiques complètement intégrables. Il s'agit d'un travail commencé en 2002 et abandonné depuis, dans un état d'inachèvement. La théorie des chaînes de Segre, développée pour les applications CR entre sous-variétés génériques, se transfère modulo quelques adaptations aux transformations ponctuelles entre des systèmes différentiels extérieurs complètement intégrables. Après un examen approfondi de la littérature ancienne et contemporaine sur les symétries de Lie, j'ai la certitude que cette théorie (élémentaire) est vraiment nouvelle. Actuellement, elle est valable pour les systèmes qui ont un groupe de symétries de Lie de dimension finie. Évidemment, il faudrait la généraliser aux systèmes différentiels ayant un groupe de symétrie de dimension infinie et la confronter aux travaux d'É. Cartan sur les pseudo-groupes de dimension infinie.

[D] : Principe de réflexion à cible algébrique. Après les travaux [CMS1999], [10] sur le principe de réflexion algébrique, un certain nombre d'auteurs ont bien exploité le « filon » : [CPS2000], [Da2001], [CDMS2002], [MMZ2002], [MMZ2003] (voir la bibliographie de [21] ci-dessus). Les résultats se généralisaient sans trop de difficulté en supposant la variété source analytique réelle et la variété cible algébrique réelle, ce qui constitue typiquement une hypothèse *ad hoc*, les résultats étant élaborés non pas en fonction d'un problème authentique, mais en fonction de l'applicabilité directe des techniques que l'on maîtrise. Je n'ai donc pas une opinion très élevée de ces travaux, que je juge trop « faciles » ou inopérants, car de vraies difficultés existent dans la catégorie analytique « non-algébrique », difficultés auxquelles, contrairement aux personnes citées, je me suis réellement confronté. Néanmoins, je ne suis pas satisfait par ces versions publiées récemment et je pense pouvoir « nettoyer » ce sujet. Lorsque j'aurai un mois et demi de libre, je rédigerai un mémoire de 60 à 100 pages qui fera une synthèse élégante, rigoureuse et honnête entre tous ces travaux, tout en mentionnant l'étendue de ce qu'il reste à accomplir.

§14. RÉSUMÉ DES TRAVAUX EN PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

RÉFÉRENCES

- [A] **Joël Merker**, *Commentaire philosophique et mathématique du theorema egregium de Gauss*, en préparation, 50 pp déjà rédigées.
- [B] **Joël Merker**, *Métaphysique de l'ouverture mathématique*, projet de thèse de philosophie des mathématiques, en gestation, 20 pp de résumé déjà rédigées.

[A]. Commentaire philosophique et mathématique du theorema egregium de Gauss. En 1827–28, après plus de quinze années de méditation, Gauss publie un mémoire intitulé *Disquisitiones generales circa superficies curvas* qui signe l'acte

de naissance de la géométrie différentielle moderne. Il s'agit là d'un des articles les plus célèbres de l'histoire des mathématiques, article qui frappe encore le lecteur contemporain par la perfection achevée de son contenu, par la richesse de ses idées novatrices et par la netteté de son architecture. Le point d'orgue de ce texte est une formule mathématique centrale, complexe et remarquable qui aura coûté plusieurs années de recherche au génie calculatoire de Gauss. Cette formule exprime la courbure d'une surface bidimensionnelle plongée dans l'espace tridimensionnel à l'aide de données métriques purement intrinsèques, libérées de la troisième dimension supplémentaire.

Plus précisément², en 1827, Gauss a démontré qu'étant donné une surface bidimensionnelle paramétrisée par deux coordonnées (u, v) et équipée d'une métrique infinitésimale

$$(1.1) \quad ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2,$$

où E , F et G sont des fonctions des deux variables u et de v , il est toujours possible de calculer en tout point de coordonnées (u, v) sa « courbure » $\kappa = \kappa(u, v)$, fonction elle aussi des deux variables u et v . La courbure d'une surface en un point de coordonnées (u, v) est une notion tridimensionnelle conçue par Gauss lui-même que nous redéfinirons en termes géométriques ci-après (voir aussi la Section 3 ci-dessous). La formule par laquelle Gauss calcule la courbure κ est spectaculaire en ceci qu'elle ne fait intervenir que la métrique infinitésimale bidimensionnelle (1.1), sans aucune référence à l'espace dans lequel est plongée la

¹GAUSS, Carl Friedrich (Brunswick 1777 - Göttingen 1851), mathématicien, astronome et physicien allemand, fils d'artisan issu d'un milieu modeste, remarqué pour la précocité de ses talents, put conduire ses études grâce à la protection et au soutien du duc de Brunswick. Adolescent, il développe sa virtuosité technique en calculant des logarithmes et il corrige la table des nombres premiers de G. von Vega et J. Lambert. À 19 ans, il démontre que le polygone régulier à dix-sept côtés inscrit dans un cercle est constructible à la règle et au compas — résultat très inattendu sur un sujet qui n'avait pas fait de progrès substantiels depuis l'antiquité. En 1799, il soutient sa thèse à l'université d'Helmstedt, donnant les premières démonstrations rigoureuses du théorème fondamental de l'algèbre, d'après lequel tout polynôme non constant à coefficients complexes possède au moins une racine réelle ou imaginaire. En 1801, à 24 ans, celui qu'on allait appeler le « prince des mathématiciens » publie un ouvrage majeur de cinq cents pages intitulé *Disquisitiones arithmeticae*, qui incorpore une nouvelle théorie des congruences, une théorie des formes quadratiques et dont le dernier chapitre est consacré à énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone à un nombre premier p de côtés soit constructible à la règle et au compas. Nommé directeur de l'observatoire de Göttingen en 1807, il consacra son énergie à la mécanique céleste, au magnétisme, à la théorie des erreurs, poursuivant occasionnellement ses travaux mathématiques, qu'il ne publiait pas et dont il faisait état par lettre et de manière confidentielle à quelques interlocuteurs choisis.

²Les Sections 2, 3 et 4 ci-dessous étant consacrées à présenter toutes les bases de la théorie des surfaces dans un langage très accessible, la compréhension totale des trois formules (1.1), (1.2) et (1.4) n'est pas indispensable. Il est conseillé au lecteur qui n'est pas connaisseur de cette théorie d'admettre provisoirement les quelques points techniques que nous résumons dans cette introduction et de poursuivre sereinement la lecture.

surface ; nous l'appellerons « *formula egregia*³ » ou « formule remarquable » :

$$(1.2) \quad \kappa = \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \left\{ E \left[\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 \right] + \right. \\ + F \left[\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + \right. \\ \left. \left. + 4 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \right] + \right. \\ + G \left[\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right] - \\ \left. - 2 (EG - F^2) \left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right] \right\}.$$

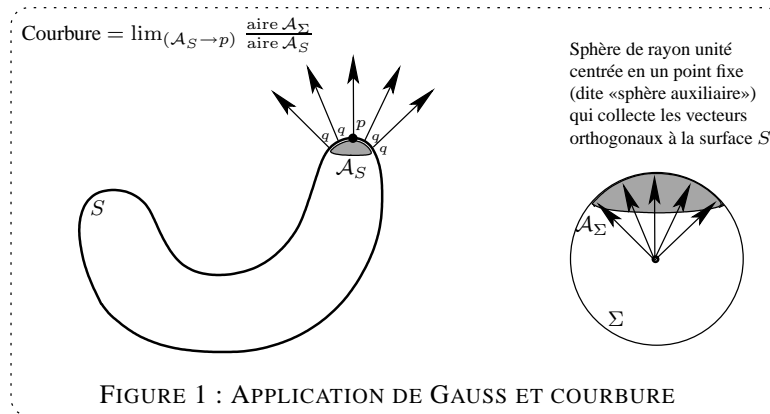
Cette expression mathématique, publiée en 1828, a été découverte en 1827 par un virtuose du calcul à qui l'on décernait déjà le titre de « *princeps mathematicorum* », à l'âge de la sagesse et de la maturité.

Dans ce texte philosophico-mathématique, nous nous proposons de reconstituer les spéculations méthodiques et les calculs formels qui ont conduit Gauss, après de nombreuses tentatives infructueuses, à découvrir et à élaborer cette « *formula egregia* ». Son caractère presque ésotérique et la complexité quasi-incompressible des calculs formels qui sont nécessaires pour l'obtenir en ont fait un objet que l'on est parfois tenté de reléguer à un rang secondaire dans les manuels contemporains de géométrie différentielle. Dans ce texte, loin d'écarter les difficultés, nous accepterons cette complexité interne et pour l'appréhender, nous dissèquerons la démonstration originale de Gauss en la comparant aux simplifications partielles et relatives que la postérité a apportées.

1.3. Définition géométrique de la courbure. Expliquons le côté paradoxal et remarquable de cette formule en rappelant tout d'abord la définition première de la courbure, due à Gauss lui-même. La courbure κ d'une surface mathématique plongée dans l'espace est une notion quantitative précise qui témoigne adéquatement des ondulations qu'une surface physique réelle présente à l'œil dans l'espace. En différents points d'une surface, la courbure est en général variable.

Pour la calculer, on introduit d'abord une sphère fixe Σ de rayon 1 (dans un système prédéfini d'unités, *e.g.* de rayon 1 mètre, s'il s'agit de l'unité de longueur qui est standard en physique) centrée en un point de l'espace, et appelée par Gauss *sphère auxiliaire*. Soit S une surface quelconque, par exemple celle qui est dessinée sur la FIGURE 1 ci-dessous, et soit p l'un de ses points.

³Cette dénomination n'est pas usuelle, mais elle fait écho à la dénomination « *theorem egregium* » (ou « théorème remarquable ») que la postérité a fixée pour désigner la conséquence principale (et élémentaire) de la formule (1.2), à savoir que la courbure est invariante par toute application isométrique.



On délimite une petite région autour du point p sur la surface S — par exemple la région appelée \mathcal{A}_S que l'on a dessinée en grisé sur la FIGURE 1. En tout point q de cette région \mathcal{A}_S , on considère le vecteur orthogonal à la surface⁴ de longueur 1, et on le déplace parallèlement jusqu'à ce que son origine coïncide avec le centre de la sphère auxiliaire. Les extrémités de ces vecteurs décrivent alors une région que l'on appelle \mathcal{A}_Σ sur la sphère auxiliaire Σ et que l'on dessine en grisé sur la FIGURE 1. Cette région \mathcal{A}_Σ dépend de la région \mathcal{A}_S ; lorsque la région \mathcal{A}_S se rétrécit autour du point p , la région correspondante \mathcal{A}_Σ diminue aussi (autour du point de la sphère auxiliaire qui se situe à l'extrémité du vecteur orthogonal à la surface en p).

Pour fixer rigoureusement la terminologie, nous appellerons *aire* d'une surface ou d'une portion limitée de surface le *nombre qui mesure son extension*, calculée dans un système prédéfini d'unités, e.g. en « mètres-carré » (m^2) s'il s'agit d'une mesure physique standard.

D'après la définition première due à Gauss, la courbure $\kappa(p)$ d'une surface S en l'un de ses points p est égale à la limite — quand la région \mathcal{A}_S se rétrécit autour de p , ce que l'on notera « $\mathcal{A}_S \rightarrow p$ » — d'un quotient dans lequel l'aire de la région \mathcal{A}_S apparaît au dénominateur, et dans lequel l'aire de la région \mathcal{A}_Σ apparaît au numérateur (cf. FIGURE 1 ci-dessous) :

$$(1.4) \quad \kappa(p) = \lim_{\mathcal{A}_S \rightarrow p} \frac{\text{aire de la région } \mathcal{A}_\Sigma \text{ sur la sphère auxiliaire}}{\text{aire de la région } \mathcal{A}_S \text{ sur la surface}}.$$

La sphère unité Σ étant considérée comme la surface canonique de référence, cette formule exprime visiblement un *principe de comparaison des aires « courbées »*, valable dans l'infiniment petit.

Sur la FIGURE 1, la région \mathcal{A}_Σ est plus grande que la région \mathcal{A}_S , y compris lorsque la région \mathcal{A}_S rétrécit autour du point p . Il en découle que le quotient ci-dessus et sa limite sont supérieurs à 1 : la surface est plutôt « assez courbée » au

⁴Pour cela, on sous-entend que la surface a été orientée, au moins localement autour du point p . Sur la FIGURE 1, l'orientation choisie est telle que l'extérieur « physique » et intuitif de la surface coïncide avec l'extérieur « mathématique ». En inversant l'orientation d'une surface, on ne change pas sa courbure.

point p . Comme on pourra le constater en exerçant son intuition, plus la surface est « courbée » ou « pointue » au voisinage du point p , plus l'aire \mathcal{A}_Σ est grande, par rapport à l'aire \mathcal{A}_S . La plupart des surfaces — par exemple, celle de la France — ont une courbure non nulle, positive ou négative, qui varie beaucoup d'un point à l'autre — notamment en montagne (on ne pense jamais assez souvent à la surface terrestre comme réservoir très riche d'exemples transcendant le caractère parfois exagérément sobre de l'intuition mathématique). Au contraire, si la surface S est un plan, tous les vecteurs qui lui sont orthogonaux sont parallèles entre eux ; la région \mathcal{A}_Σ est alors réduite à un point, donc son aire est nulle et le numérateur de la formule (1.4) est toujours nul ; par conséquent : *la courbure d'un plan dans l'espace est nulle en tout point p* — fort heureusement !

1.5. Paradoxe remarquable. De manière cruciale, pour définir la courbure d'une surface en l'un de ses points, on utilise l'application de Gauss qui transporte les vecteurs orthogonaux à la surface jusqu'à la sphère auxiliaire. De même qu'il suffit seulement de deux coordonnées pour repérer un point quelconque du plan euclidien, il suffit seulement de deux coordonnées (u, v) pour repérer un point quelconque q de la surface proche de p , mais il faudrait disposer d'une troisième coordonnée pour représenter les vecteurs orthogonaux à la surface et pour définir la région \mathcal{A}_Σ qui entre dans la définition (1.3) de la courbure. Il semble alors impossible de parler de la courbure en se limitant aux deux seuls degrés de liberté dont jouit une surface ; la troisième dimension et le plongement de la surface dans l'espace semblent absolument indispensables ; une saisie externe semble nécessaire tant pour l'appréhension intuitive de la courbure que pour sa définition. Ainsi, au premier abord, la courbure est une notion « extrinsèque », c'est-à-dire extérieure à la surface, n'appartenant pas à son essence interne et semblant dépendre fondamentalement de sa forme dans l'espace.

Mais la perspicacité géniale de Gauss aura dévoilé la nature « intrinsèque » cachée de cette notion de courbure : en effet, grâce à la *formula egregia* (1.2), la courbure de la surface S — dont les points arbitraires sont repérés par les deux coordonnées (u, v) — peut être saisie de manière interne et bidimensionnelle, sans sphère auxiliaire, sans vecteurs normaux à la surface, sans troisième dimension : tel est le paradoxe remarquable. Il fallait donc toute la persévérance de celui qu'on a appelé le « *princeps mathematicorum* » pour parachever la découverte de la courbure des surfaces par l'élaboration d'une formule aussi complexe que (1.2), grâce à laquelle le concept de courbure est envisageable sans aucun recours à une spatialité externe.

Le mystère est le suivant : comment Gauss a-t-il su, par un enchaînement intuitif complexe, entrevoir l'existence de la *formula egregia* et comment a-t-il pu achever le tour de force calculatoire qui l'y a conduit ?

1.6. Avertissement. Ce texte a été rédigé à partir des notes de l'exposé oral prononcé par l'auteur devant un auditoire littéraire lors de la Journée « Philosophie

et mathématiques», organisée par le *Centre international d'étude de la philosophie française contemporaine* le Samedi 24 mai 2003 à l'École Normale Supérieure de Paris, en Salle des Actes⁵.

Afin d'encourager les lecteurs philosophes qui s'intéressent de près ou de loin aux mathématiques à nous suivre sur ce chemin, nous avons organisé nos analyses de manière à rendre intuitivement accessibles tous les concepts mathématiques que nous utiliserons. Excepté une formation mathématique de niveau secondaire et une pratique minimale du calcul, nous croyons que nulle autre connaissance spécifique n'est requise pour aborder la lecture de ce texte. Mentionnons que nous avons choisi de recourir à un style « littéraire » synthétique pour rédiger des paragraphes qui résumeront l'essentiel des commentaires les plus techniques. Ces paragraphes peuvent être mis entre parenthèses par le lecteur non mathématicien, ce qui offrira une lecture plus rapide. À l'opposé, le lecteur mathématicien qui connaît déjà la théorie des surfaces gaussiennes pourra se laisser glisser directement dans les méandres de l'analyse technique, après avoir survolé les Sections 2 et 3 — destinées seulement à résumer les bases de la théorie, sous forme diagrammatique et sans démonstration.

Dans ce texte, plusieurs types de discours seront associés, assemblés et coordonnés. L'exposé didactique, volontairement développé, structuré très progressivement et agrémenté d'illustrations géométriques épurées donnera un côté « vulgarisation scientifique » à nos analyses techniques. Toujours, la précision et la rigueur intuitive l'emporteront sur le discours mathématique standard, souvent peu accessible à cause d'un excès d'abstraction et d'idéalisation. Toutefois, le caractère descriptif « agréable » de certains passages ne devra pas faire oublier qu'il existe des résultats mathématiques extrêmement précis et « impeccables » qui constituent le véritable soubassement des résultats cités.

Dans ces analyses, le discours philosophique viendra s'enchasser — presque implicitement — à la manière d'un « réveil » des métaphysiques internes et d'une reformulation des causalités conceptuelles, trop souvent masquées et sous-entendues dans le discours mathématique habituel. Ainsi privilégierons-nous en premier lieu : la clarté intuitive, l'accessibilité des concepts et la lisibilité des mouvements dialectiques.

En somme, nous avons choisi d'élaborer des réflexions philosophico-mathématiques *spécialisées* afin de reformuler en langue naturelle quelques-unes des innombrables dialectiques implicites dans lesquelles circule le mathématicien en action. Des trésors de spéculation aux formes insoupçonnées parsèment l'œuvre publiée et la correspondance de Gauss ; nous nous proposons de nous attacher à la pensée de Gauss en mouvement en étudiant un exemple précis : la genèse de la *formula egregia* (1.2).

⁵Programme : 10h : Ivahn SMADJA (ENS-Ulm) : *Schémas et structures : réflexion sur le savoir mathématique* ; 11h : Joël MERKER (CNRS) : *Métaphysique de l'ouverture mathématique* ; 14h : Quentin MEILLASSOUX (ENS-Ulm) : *Sur la portée spéculative des mathématiques : le problème du fossile et le problème de Hume* ; 15h : Jean-Jacques SZCZECINIARZ (Bordeaux-III) : *Philosophie et métaphysique de la finitude* ; 16h : Alain BADIOU (ENS-Ulm) : *Concepts à la lisière des mathématiques et de la philosophie. Un exemple : l'Ouvert*.

[B]. Métaphysique de l'ouverture mathématique. Projet de thèse (Philosophie des mathématiques) en gestation.

CNRS, UNIVERSITÉ DE PROVENCE, LATP, UMR 6632, CMI, 39 RUE JOLIOT-CURIE,
13453 MARSEILLE CEDEX 13, FRANCE

E-mail address: merker@cmi.univ-mrs.fr 00 33 / (0)4 91 11 36 72 /
(0)4 91 53 99 05