LA SATISFACTION MATHÉMATIQUE

Joël Merker

Abstract. **Résumé.** Il existe un niveau antéprédicatif et infralinguistique dans les mathématiques. Zone obscure ? Pensée sans mots ? Mystère de la découverte ? Mais alors, quel est le principe moteur véritable de la science ?

(i) Suggestion : s'il y a prolongement, dans les mathématiques, d'une *force de création* dont l'origine profonde reste encore mystérieuse, elle entretient alors des rapports intimes avec une *philosophie de la volonté*. Car invention et inconscient apparaissent au moment seulement où le réalisable se réalise, seulement parce qu'il est réalisable et lorsqu'une volonté d'actuation cherche à le réaliser.

(ii) Thèse : le procès historique et effectif des mathématiques est le fruit d'une *volonté rationnelle et impersonnelle*. Corollaire : absence idéale de vide dans la pensée mathématique, le tout entretenu par des nécessités rationnelles. Ces dernières s'exercent de plusieurs manières : ici force de remplissement, là émergence de connexions nécessaires, ou encore mûrissement total des concepts, le tout assimilable à une cristallisation simultanée de la conscience et de la volonté.

(iii) Et de son côté, l'inconscient aide involontairement (c'est-à-dire par un effet de volonté subsidiaire et inertiel) à l'absence de vide : tel est son rôle moteur principal, par un effet d'entraînement automatique et impulsionnel. En définitive, le sujet conscient dévoile et insuffle de son inconcient moteur dans l'objet mobilisable. Mais un tel propos impose un retour à la philosophie du mobile, un retour aux causes motrices et un *retour aux naturalités discursives*, afin de ne pas faire reposer la constitution du réel mathématique uniquement sur la catégorie du sujet.

(iv) Les mathématiques sont en effet universellement dominées par certaines *structures métaphysiques* de la *vérité mathématique*. Partant, se dessine une contemplation activante du rôle de l'inconscient en tant que facette de la méthode génétique. Cette dernière invite à focaliser l'analyse sur les "bonnes questions", sur les "objets naturels" et sur les "objets pertinents". En mathématiques, la dimension objective est le théâtre principal des protensions subjectives, qui sont essentielles en tant qu'elles révèlent et *véhiculent* la nécessaire existence de protensions objectives.

(v) Mais pourtant, hésitation, obscurité et confusion du sujet vu comme support de l'actuation et de l'objectivation jouent un rôle majeur dans l'édification des théories mathématiques : c'est dans un mouvement descendant (abyssal) que s'oblitèrent les évidences dans lesquelles le vrai est celé, et c'est dans un mouvement d'approfondissement que se révèlent les concepts cachés dans les pratiques intuitives du calcul. L'inconscient, tel un essaim d'abeilles en pérégrinations, se suspend à l'occultation du vrai pour l'ouvrir à l'opérable.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 00A30.

Key words and phrases. Philosophie des Mathématiques, Satisfaction, Inconscient, Naturalités discursives, Intention rationnelle, Structures métaphysiques de la vérité mathématique.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

À ma Renarde
À Gilles Châtelet
À mes Parents

§1. Introduction

Le sujet dont nous allons traiter[1] est loin d'être inexploré[2] et l'on pourrait souligner de manière liminaire l'existence de nombreuses tentatives pour aborder les liaisons mystérieuses qui existent entre les termes d'une quadrilogie qui est au coeur de ce colloque :

$$
\begin{tikzcd}
\textbf{Inconscient} \arrow[r, "?"] & \textbf{Découverte} \arrow[d, "?"] \\
\textbf{Travail} \arrow[u, "?"] & \textbf{Conscient.} \arrow[l, "?"]
\end{tikzcd}
$$

Cette rencontre a lieu autour du thème "Mathématiques et Inconscient", et nous avons la chance d'accueillir des psychanalystes de profession, intéressés par la mise en question – par les mathématiciens eux-mêmes – de ce qui fait sens en mathématiques. Aujourd'hui, la difficulté de ce sujet : l'étude philosophique, sociologique et psychanalytique de l'invention mathématique, à travers le prisme de cette quadrilogie, cette difficulté a cessé d'être seulement intrinsèque. Autrement dit, elle n'est plus seulement due au caractère intrinsèquement contingent et imparfait de toute activité humaine, que l'on étudierait dans son inachèvement, comme l'artisanat, la composition musicale ou le travail d'écriture mathématique. Car à la difficulté intrinsèque du sujet se superpose une difficulté extrinsèque : *l'enjeu de ce qu'on peut dire et de ce que l'on choisit de dire sur la création mathématique* et par conséquent aussi, *l'enjeu de ce que dit le discours des autres*, et ce dernier enjeu constitue d'ailleurs l'un des obstacles les plus évidents et les plus difficiles à surmonter dans un tel travail réflexif. *Car il s'agirait avant tout de trouver une posture d'inscription originale et neuve dans des champs prédéterminés d'analyse.* Il s'agirait d'enfoncer le coin dans plusieurs failles essentielles du discours épistémologique classique. Et l'inconscient mathématique signalerait à merveille l'existence de ces failles !

Enfin, ce sujet est devenu d'autant plus délicat que les orientations de la psychologie cognitive et les exigences de la philosophie des mathématiques semblent maintenant converger pour désigner un objet de pensée, une objectivité adéquate pressentie, dont on attendrait qu'elle rende compte pleinement des forces de création (plutôt incontrôlées !) qui sont à l'oeuvre dans *notre* contexte socio-culturel. Cette objectivité se déclinerait de plusieurs manières – je n'en dirai rien pour l'instant, toute la bataille est bien là ! –, mais elle ne serait plus aujourd'hui réductible au paradigme structuraliste qui a connu son apogée en France dans les années 1950

[1]Communication au Colloque : **Mathématiques et Inconscient**, organisé par Nathalie Charraud, Marie-France Coste-Roy et Bernard Teissier. *Paris, École Normale Supérieure, 13-15 Juin 1997.* Dernier remaniement : Mars 2000.

[2]Clin d'oeil à l'ouverture de l'ouvrage bien connu de Jacques Hadamard, intitulé *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton, 1945, et traduit chez Bordas en 1975.

à 1970. Il n'est donc pas étonnant qu'un déploiement nouveau doive être mis en oeuvre par rapport à la primauté accordée dans la plus grande période du vingtième siècle au langage et à la formalisation.

Organisation de l'intervention. Elle sera rhétorique puis théorique : l'économie des paragraphes introductifs n^o 2 à 10 étant de nature essentiellement argumentative et introductive, la partie spéculative originale de ce travail sera présentée en fin de parcours dans les paragraphes n^o 11 à 20 ci-dessous. Je souhaite en effet galvaniser au préalable le cercle de l'hésitation traditionnelle quant au thème délicat de l'inconscient mathématique.

§2. Difficultés liminaires

2.1. La spécialisation : obstacle à la pensée des mathématiques ?. Mais d'un côté, l'exigence actuelle de se dessaisir du catéchisme formaliste – trahison d'une mode ? – est saisie dans une pure attente d'analyses entièrement nouvelles de la création en mathématiques, et d'un autre côté, sans cesse, le dispositif de la science se *durcit*. La science progresse. La science se spécialise. Elle échappe de plus en plus à l'emprise de la philosophie, mue ses concepts en opérations, et *métamorphose de plus en plus finement le mouvement en langages*. De tels dispositifs ne se contentent pas, hélas, de protéger la souveraineté de la science par la spécialisation, prétexte pour elle de "tour d'ivoire", dû à son organicité et à sa complexité inexorables. Il y a en sus un phénomène bien connu d'*autonomisation* de plus en plus marquée par rapport à la pensée philosophique, par rapport à la "pensée universelle". Ainsi, si la mathématique s'enfouit dans des terres granitiques, et organisées en profondeur, si elle subit le travail constant et sûr des déformations métamorphiques (les mathématiques sont une roche qui pénètre comme le gneiss dans des profondeurs terrestres qui en modifient la structure), on ne voit pas bien alors comment recentrer la question psychologique ou la question psychanalytique et comment satisfaire la tentation de *saisir les mathématiques comme dominées par le désir*, le désir d'originalité, par le besoin, le *besoin d'élévation*, par une force unique, la *force motrice*, par une quête, une *quête du sens*, qui ne se réduisent pas au sens esthétique (tentation d'une vision réductrice et partielle du travail d'harmonisation nécessaire de la pensée), et encore moins au sens logique (apanage paradoxal d'un positivisme anglo-saxon routinier lui aussi hautement menacé de ringardise) !

2.2. Premier doute quant au transfert des catégories psychanalytiques dans les mathématiques. Car le dispositif de la science confronte actuellement tant l'historien que le philosophe aux formes de scepticisme et de découragement que ressentent les spécialistes eux-mêmes devant l'inertie et la lourdeur des techniques spécialisées lancées au galop. Notre époque saura-t-elle déplacer, modifier puis repenser sous un angle de visée universel, l'équilibre de la mathématique acquise ? Saura-t-elle réhabiliter le statut du sujet mathématique ? Saura-t-elle reconsidérer l'*émergence subjective* des objets actuels avec un sage recul interne et immédiat ? Ou bien, au contraire, ces formes de révolutions paradigmatiques locales, ces charnières de la pensée, ces présences de l'irrationnel, ces *fulgurations silencieuses de l'intuition* qui sont oubliées par l'histoire, toutes ces *couleurs subjectives* de l'inventivité et de la constructivité mathématique, ne sont-elles pas déjà acquises, cristallisées, durcies, *scellées* au point que leur *exigence* et que leur *méditation* passent pour une *évidence* ? *On peut se demander finalement à fort juste titre si l'expérience, le geste, la pulsion, la satisfaction, ne sont pas à présent enveloppés, involués, implicités et cachés, à l'intérieur même des mathématiques et dans le travail de la preuve.* Même le métaphorique, supplanté dans l'exposition par le technique, serait réduit à n'être plus qu'une coulisse subsidiaire du vérificatoire.

2.3. La métaphysique silencieuse de la satisfaction. J'insiste. Comme on le sait, les acquis métaphysiques d'une époque percolent jusqu'à nous, ils traversent toutes nos pensées comme autant d'évidences assimilées à travers l'histoire, évidences qui sont aussi inscrites fondamentalement dans une dialectique hégélienne de la phénoménologie de l'esprit. L'empire métaphysique, qui semble si invisible au non-philosophe, imprime en vérité à nos actes des mouvements qui semblent se régler sur des typographies en filigrane. Par des démarches indépendantes, l'algèbre, la géométrie et la théorie des équations différentielles rencontrent sur leur route l'objet "*groupe de Galois*", puis le développent, le thématisent, le retrouvent dans la théorie des équations différentielles holomorphes, l'enveloppent dans une théorie générale, et enfin le naturalisent : comment ne pas voir là l'existence d'une *réalité de compréhension transversale dominant la genèse de cet objet algébrique (groupe de Galois)* ? Voici donc un exemple paradigmatique de ce que l'on pourrait appeler un concept mathématique essentiel, un concept mathématique naturel (groupe d'une équation, groupe abstrait), une naturalité *conquise*, parce qu'immanente à de nombreuses situations mathématiques, sans être pour autant immédiate. Alors, par analogie avec le phénomène général des *naturalités conquises* en mathématiques, lesquelles apparaissent de manière complètement autonomes, indépendantes de tel ou tel inventeur, lesquelles peuvent être découvertes en Moldavie comme en Belgique, et redécouvertes ailleurs et dix ans plus tard, *il se pourrait très bien que le besoin de la satisfaction et le désir des bons objets et des bons théorèmes soient d'une certaine manière niés et refoulés par la plupart des mathématiciens*, tout en rayonnant de manière effective comme l'inconscient dans le conscient, au sens que la psychanalyse freudienne a attribué à ces termes. Et il se pourrait très bien aussi qu'ils soient sublimés volontairement par le sujet, en tant que les mathématiques entretiennent un rapport absolument fondamental avec une *exigence de vérité.* En résumé, il se pourrait très bien que le sujet oriente sciemment ses pulsions de vie (l'ancrage dans le corps) vers la réalisation d'un idéal mathématique.

§3. Prospection préliminaire des attentes

Mais dans cet objectif quelque peu amphibologique concernant une analyse psychanalytique des mathématiques, il faudrait fournir d'abord, au seuil, avant de rompre le pain, un travail épistémologique considérable, qui n'est pas un travail philosophique, mais un *travail de prospection préliminaire et d'examen des attentes et des espoirs.* C'est-à-dire une analyse critique liminaire, basculant l'*a priori* d'une approche originale sur l'*a posteriori* d'une tradition assimilée. Après observation prolongée, on constate en effet que dans toute pensée théorique abstraite, tout pivote primordialement autour d'*intentions centrales* et d'*orientations effectives.* Fréquemment laissées en pâture aux exégètes d'une théorie, intention centrale et orientation effective font aussi la une des querelles de chapelles et dilapident souvent les forces de la philosophie des sciences dans une vaine *épistémologie comparée.* Mais au demeurant, leur prise en charge réelle et leur assomption sans concession font souvent défaut au discours, par manque d'engagement philosophique et par peur d'explicitation des *a priori*, voire d'*auto-exposition du discours*. La critique que je serais le plus spontanément porté à adresser aux tentatives de ressaisir l'activité mathématique comme protension, à travers notamment des catégories psychanalytiques, c'est leur manque d'engagement dans la pensée et leurs insuffisantes motivations, comme si l'on pouvait se contenter de faire circuler et de véhiculer un discours sur un sujet réservé à l'amateurisme, par opposition à l'activité professionnelle des mathématiciens spécialisés. Ainsi, attendu que l'intention centrale doit se dégager de toute présentation théorique, je soutiens d'une manière certes paradoxale, qu'il faudrait ici *voir tout ce que l'on veut savoir avant même de commencer, et d'ailleurs aussi, le voir beaucoup mieux avant même de commencer qu'après avoir dégagé certains concepts*. Bref, si le savoir s'articule à une volonté impersonnelle, mais décidée par une conscience, le psychanalytique en mathématiques est tenu quant à lui aussi de *formuler ses hypothèses, ce qu'il attend, et ce qu'il espère*. Par analogie, axiomes, objectifs et théorèmes ne sont-ils pas antéposés à toute démonstration ?

§4. Attentes et dominations externes

Mais pourquoi faudrait-il se représenter tout ce que l'on veut savoir avant de commencer le travail ? Objection votre honneur : mais c'est absurde ! N'est-ce pas anticiper exagérément sur l'imprévisibilité de toute connaissance ? Réponse : mis à part la nécessité mystique, mais éclairée, mais rationnelle, d'être *possédé par son sujet* pour le propulser suffisamment loin, l'exposition des intentions de fond nous sera tout simplement nécessaire parce qu'il nous faudra contourner *deux écueils lovés dans la tradition de la philosophie des mathématiques*.

4.1. Deux écueils dialectiques "duals". Le premier, je propose de l'appeler l'écueil d'une *domination faussement externe, et prétendument universelle, du concept et des structures*. Celle-ci est accompagnée d'un certain refoulement du sujet lié à un mythe (d'obédience philosophique) de l'universalité du concept. Cet écueil pourrait s'assimiler à un trop-plein d'épistémologies dogmatiques harcelant notre mémoire et nous exposant à la répétition des paradigmes. Dans les paragraphes 6 à 8, nous allons exposer un exemple de plaidoyer aveuglant pour les structures, *dégagées a posteriori d'une invention gaussienne*, qui interdirait toute analyse de l'inventivité subjective, voire du génie. Le second écueil, c'est la menace concrète de vide dû au faible et difficile ancrage historique et traditionnel de la psychanalyse dans les sciences, dont se méfie spontanément presque tout scientifique. Trop-plein du concept, vide relatif du psycho-logique : il y a quasiment dualité, avantage et désavantage en induction réciproque.

4.2. Le concept contre la conscience. Premier écueil à notre projet : l'objectivité du concept jouée contre la subjectivité de la conscience. L'un des acquis indéniables de la philosophie des mathématiques au vingtième siècle, attaché au nom de Jean Cavaillès, est le *principe d'immanence et d'autonomie des mathématiques*, lesquelles ne seraient en rien constituées dans le sujet, dans la conscience ou dans le cognitif. La théorie de la science, écrit Cavaillès, est théorie de l'histoire conceptuelle de la science et c'est dans l'"enchaînement dialectique des concepts" qu'il faut la chercher. Conséquence implicite : l'invention, l'idiosyncrasie, l'hubris de la production, l'isolement des chercheurs et la perspicacité des esprits ne sont alors que des épiphénomènes. Dans cette optique, très défendue par les historiens canguilhemiens et post-cavaillésiens, les critères de satisfaction, s'il en existe, sont plutôt à placer "hors sujet", peut-être dans le concept, si jamais l'on pouvait faire dire à Cavaillès que des critères de satisfaction puissent exister et appartenir au concept et être par là-même intersubjectifs, partageables et transmissibles. Bref, dans l'esprit de nombre d'historiens non praticiens des mathématiques, le concept à travers l'histoire constituerait le seul principe dominateur légitime de l'activité mathématique.

4.3. Ce qui se joue en nous. Or la question de savoir s'il existe un *principe dominateur*, voire même une multiplicité de principes moteurs dominateurs, par rapport auxquels s'articulerait le développement des mathématiques est une question vraiment délicate, *minée par des orientations idéologiques diverses*, hautement et légitimement refoulable il est vrai, mais qui est en fin de compte *inspirée par le désir de comprendre ce qui se joue en nous* et ce par quoi nous sommes joués, dans l'espoir d'accéder à quelques explications satisfaisantes des caractéristiques mystérieusement anthropologiques de la pensée, d'accéder aussi à une quiétude de la raison, à une paix de l'âme, bref, dans l'espoir de se rasséréner sur ce par quoi l'activité humaine (qu'elle soit mathématique ou autre) est fondamentalement dominée. *Désir, satisfaction* et *besoin de se rasséréner*, voilà bien des catégories liées à la psychanalyse : belle auto-suggestion du problématique !

En résumé, jouer le concept contre la conscience, en occultant les problématiques cruciales concernant la *motricité du conscient*, voilà pour nous un écueil d'importance.

4.4. Le désert de la psychologie des sciences. Second écueil à notre projet, l'ancrage flottant dans une tradition de pensée. Cette deuxième obstruction s'amplifie même des *dispositifs effectifs de réponse* que définit tout contexte interrogatif, toute recherche philosophique, dont notre recherche semble complètement privée ! On ne peut que constater l'inexistence de ces dispositifs, dans le domaine, quasi-désertique, de la psychologie des sciences. Il ne faudrait pas s'engager dans une voie dont les échecs sont *a posteriori* prévisibles et qui n'engendrerait que peu de *matière spéculative*. Autrement dit, avant même d'entreprendre une démarche psychanalytique consacrée aux mathématiques, on pourrait s'interroger sur le vide quasi-total, sur l'absence réelle de réussite convaincante dans ce domaine et sur la relative mésestime dans laquelle sont tenus les épistémologues qui ont frayé avec une philosophie, inaccessible et toujours fausse, de la création et du génie. En l'occurence, quelle pourrait être l'explication de l'absence de tradition de "psychologie des mathématiques" aux côtés d'une anthropologie et d'une psychologie cliniques, sinon la vacuité plus ou moins fatale de son objet ? Cet écueil, lui aussi, est de taille !

4.5. Scepticisme de principe à l'égard de la psychologie. Par conséquent, la tentation de voir la psychanalyse apporter ses propres outils pour éclairer la question de la création en mathématiques doit se modérer d'un *scepticisme de principe* permanent. Lorsqu'on assiste soi-même à son propre travail inconscient, il semble clair que *l'évolution des idées subconscientes soit redevable d'une surexcitation préalable de la conscience, bien plus que d'une passivité acquise et offerte aux cir-*

constances d'une apparition. À savoir, donc, si l'on s'en remet à l'existence d'un processus mental antérieur inconnu de l'inventeur, en d'autres termes, à l'existence d'un processus inconscient, il ne faut pas se méprendre sur ce qu'on est en droit d'attendre et d'espérer de lui. Son externalité et la relation de domination qu'il exerce sont toutes relatives et partielles et il n'est pas question de croire à une avancée considérable sur le plan de la pensée en s'intéressant à la psychologie de l'invention.

4.6. Abondance de dominations. Comme je souhaite le démontrer, tous les principes dominateurs de l'expérience mathématique sont emboîtés les uns dans les autres, s'interpénètrent et sont décalés les uns par rapport aux autres, ils constituent comme un polyptyque recouvert d'une surface aveugle que nul regard ne parvient à traverser. Ainsi, *Si la domination est externe, elle doit être vraiment externe, et par conséquent, multiplement externe. Elle doit se dire de multiple manière, comme l'Être au sens aristotélicien* (*cf.* Thèse 4 *infra*). Il y a hétéronomie, donc, des constitutions.

4.7. Illuminations subliminales. Par exemple, on ne pourra se contenter d'approcher les sentiments de certitude immédiate décrits par Poincaré, les apparences d'illumination subite, les intuitions, les signes manifestes d'un long travail inconscient, sans les rapporter aussi aux *forces non moins manifestes* d'oblitération du sujet et aux exigences d'objectivité. L'hypothèse de l'inconscient, l'hypothèse du hasard, l'hypothèse du choix, l'hypothèse de l'évidence automatique, l'hypothèse du moi subliminal, l'hypothèse de la conscience marginale, toutes ces hypothèses doivent être soupesées comme autant d'hypothèses dont on ne saurait se satisfaire. C'est pourquoi, on peut ne pas accorder complètement son crédit aux orientations générales de Jacques Hadamard, dans son *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* (encore la belle naïveté des scientifiques, disent les philosophes !), Hadamard pour qui “la question est de savoir si l'inconscient représente un mystère – ou plus exactement un mystère spécial”, l'entendant par là comme une force productrice intéressante venant adjuver le travail conscient sur ses terres, et non comme une entité d'analyse stratifiée à la manière clinicienne de Freud. Bien sûr, notre esprit ressemble à un mystère en pleine lumière, quand rien ne garantit *a priori* ses limites spirituelles et ses instances d'examination. Mais le philosophe, qui se méfie toujours de la passivité inexplicable, et néanmoins réelle, qui alourdit l'entendement, *le philosophe exige la réactivation du problématique*, cause primordiale du travail conscient et du travail inconscient. Ce n'est donc pas par peur de l'inconscient que l'on doit se retrancher sur une position acceptant l'hétéronomie des constitutions et l'agrémentant d'un “scepticisme de principe”, mais en vertu d'une exigence de lucidité : l'inconscient mathématique relève de mystères encore plus mystérieux que lui.

§5. Formulation abrégée de ces attentes

Nos attentes sont d'ordre spéculatif. Il s'agirait, à terme, de disposer d'une dialectique catégoriale de l'invention conceptuelle, qui soit aussi mise à l'épreuve des émergences et des résurgences effectives. On voudrait savoir *comment* se déplacent les idées et *comment* elles se placent dans l'espace de l'impulsion corporelle et spirituelle. L'inconscient producteur s'expliquerait alors peut-être comme l'une des *forces inertielles secondaires de la mobilisation de la conscience sur son objet.*

§6. Un exemple : analyse de l'"inconscient" de Gauss et triomphe structuraliste de l'a posteriori du concept

Pour introduire aux thèses qui se dégageront à la fin de cette intervention, pour les propulser d'un tremplin dynamique et critique, nous allons emprunter à Jules Vuillemin la dialectique structuraliste qu'il dégage d'un exemple historiquement célèbre d'invention algébrique : la construction à l'aide de la règle et du compas par Gauss de certains polygones réguliers, notamment celui à 17 côtés. Pourquoi Vuillemin fait-il une telle analyse[3] ? Pour faire apparaître la différence entre *mathématique génétique* et *mathématique structurale*, pour faire abstraction de l'aspect subjectif des méthodes, pour porter son attention sur la signification objective et le style des méthodes nouvelles, le philosophe va raisonner de la manière suivante. On verra combien est réduite la part qu'il accorde, *a posteriori*, à l'imagination, aux processus inconscients, au génie et au travail, qui fondent l'accès à des réalités nouvelles.

Avertissement. C'est donc un point de vue structuraliste et restrictif, ménageant une trop faible part à l'inconscient dynamique, qui s'exprimera longuement et dans les paragraphes 6, 7, 8 ci-dessous. Mon objectif est de démontrer que ce point de vue est insatisfaisant parce qu'il fonde ses analyses sur une vision entièrement *a posteriori* des découvertes scientifiques. Dans les paragraphes 9 et 10, je redresserai l'argumentation dans le sens qui m'intéresse.

6.1. La construction du polygone régulier à dix-sept côtés à l'aide d'une règle et d'un compas. Inspirée par la mathématique grecque[4], une classe importante de problèmes algébriques a pour origine des constructions géométriques à l'aide de la règle et du compas : duplication du cube, trisection d'un angle, équivalence avec la construction à l'aide de la règle seule, division du cercle unité en parts égales, quadrature du cercle. Parmi ces problèmes, celui de la construction des polygones réguliers reçut une solution complète grâce aux célèbres travaux de Gauss, bien avant que la théorie abstraite, qui expliquait structurellement et rendait possible cette solution (la théorie d'Abel et de Galois) n'ait été dégagée. La solution de Gauss fournit un bel exemple de théorème individuel et spécialisé, qui est l'illustration souveraine de la "*méthode génétique*" propre à l'esprit du 18^{ième} siècle et de la *virtuosité* du *Princeps Mathematicorum.*

Le 30 Mars 1796, à 19 ans[5], Gauss, qui hésitait encore entre la philologie et les mathématique, obtint à partir d'une étude systématique des équations cyclotomiques la construction du polygone régulier à dix-sept côtés avec la règle et le compas. Il étendit ainsi la connaissance (ancienne, car datant de l'antiquité !) des divisions possibles du cercle en 2^n, 5.2^n, 3.2^n, 15.2^n côtés au cas du polygone

[3]Le lecteur souhaitant des informations complémentaires pourra se reporter au Chapitre II de *La philosophie de l'Algèbre*, PUF, Paris, 1962, dont je reprends librement de nombreux passages dans ce paragraphe et consulter aussi J.-P. Colette, Histoire des mathématiques, tome II, pp. 171–183, Vuibert, 1979.

régulier de 17 côtés. En 1802, il démontrait d'une manière générale que la division du cercle en p parties égales, avec p premier, est possible si et seulement si $p = 2^{2^\mu} + 1$, autrement dit, si et seulement si l'entier p est un *nombre de Fermat*. Quel est l'intérêt de cette découverte ?

6.2. Un exemple d'ingéniosité arithmétique. En résumé, la démonstration de Gauss a consisté à regrouper ingénieusement par paires certains sous-groupes des racines $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{15}, \zeta_{16}$, $\zeta_k = e^{k\frac{2i\pi}{17}}$, $1 \le k \le 16$, de l'équation cyclotomique $(x^{17} - 1)/(x - 1) = x^{16} + x^{15} + \cdots + x + 1 = 0$ de manière à faire apparaître trois équations quadratiques satisfaites par les sommes partielles de ces trois paires de racines en cascade, *ces regroupements étant inspirés par la réordination de ces racines via la suite des puissances* $\omega_n := (\zeta_1)^{3^n} = e^{3^n \frac{2i\pi}{17}}$, $1 \le n \le 16$. En voici pour rappel une description précise.

I. Tout d'abord, on constate aisément que les 16 premières puissances de 3 ($3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 9$, $3^3 \equiv 10$, $3^4 \equiv 13$, *etc.*) sont incongrues deux à deux modulo 17 :

$$
\begin{array}{llll}
\omega_1 \equiv \zeta_3, & \omega_2 \equiv \zeta_9, & \omega_3 \equiv \zeta_{10}, & \omega_4 \equiv \zeta_{13}, \\
\omega_5 \equiv \zeta_5, & \omega_6 \equiv \zeta_{15}, & \omega_7 \equiv \zeta_{11}, & \omega_8 \equiv \zeta_{16} \\
\omega_9 \equiv \zeta_{14}, & \omega_{10} \equiv \zeta_8, & \omega_{11} \equiv \zeta_7, & \omega_{12} \equiv \zeta_4, \\
\omega_{13} \equiv \zeta_{12}, & \omega_{14} \equiv \zeta_2, & \omega_{15} \equiv \zeta_6, & \omega_{16} \equiv \zeta_1.
\end{array}
\tag{6.2.1}
$$

II. Ensuite, en formant la somme des ω_j pour j pair, et celle des ω_j pour j impair, on définit deux valeurs x_1 et x_2 :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \zeta_9 + \zeta_{13} + \zeta_{15} + \zeta_{16} + \zeta_8 + \zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_1 \\
x_2 &= \zeta_3 + \zeta_{10} + \zeta_5 + \zeta_{11} + \zeta_{14} + \zeta_7 + \zeta_{12} + \zeta_6,
\end{aligned}
\tag{6.2.2}
$$

Ces deux valeurs sont réelles, puisque $\zeta_j = \overline{\zeta_{17-j}}$. De plus, elles satisfont l'équation quadratique $x^2 + x - 4 = 0$ (ce que l'on vérifie en calculant directement les carrés x_1^2, x_2^2 à partir de l'éq. (6.2.2), en utilisant les relations $\zeta_a \cdot \zeta_b = \zeta_c$, où $c = a + b (\mathrm{mod}\, 17)$ et $\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_{16} = -1$).

III. À nouveau, formons la somme des termes de cran pair et des termes de cran impair dans l'éq. (6.2.2). On obtient deux paires de nombres

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = \zeta_{13} + \zeta_{16} + \zeta_4 + \zeta_1 & y_2 = \zeta_9 + \zeta_{15} + \zeta_8 + \zeta_2, \\
y_3 = \zeta_{10} + \zeta_{11} + \zeta_7 + \zeta_6 & y_4 = \zeta_3 + \zeta_5 + \zeta_{14} + \zeta_{12},
\end{array}
\tag{6.2.3}
$$

[5] "Il y a certainement bien lieu de s'étonner que la divisibilité du cercle en 3 et 5 parties égales ayant été connue dès le temps d'Euclide, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de deux mille ans, et que tous les géomètres aient annoncé comme certain, qu'excepté ces divisions et celle qui s'en déduisent (les divisions en 2^μ, 15, 3.2^μ, 5.2^μ, 15.2^μ parties), on ne pouvait en effectuer aucune par des constructions géométriques", *Recherches arithmétiques*, trad. Poullet-Delisle, Blanchard, Paris, 1953. Le grand mérite de Gauss est d'avoir dissipé cette apparence, due peut-être au fait parce qu'il était connu que le 7-gone, le 11-gone et le 13-gone ne sont pas constructibles à la règle et au compas ; 17 était tout simplement le prochain nombre premier...

[5] 19 est aussi le nombre de pages du célèbre journal de mathématiques (retrouvé en 1898 seulement et publié par Felix Klein en 1901) que Gauss commença à remplir à cette époque où il obtint la résolution par radicaux carrés du problème cyclotomique d'ordre 17. Dans ce cahier mythique, le prince des mathématiciens aura consigné pendant dix-huit année 146 énoncés extrêmement brefs des résultats de ses travaux qui ont permis aux historiens d'élucider nombre de questions relatives à la priorité de certaines découvertes.

dont on vérifie, par le même calcul direct, qu'elles satisfont les équations quadratiques $y^2 - x_1 y - 1 = 0$ (pour y_1 et y_2) et $y^2 - x_2 y - 1 = 0$ (pour y_3 et y_4).

IV. À nouveau, formons la somme des termes de cran pair et des termes de cran impair dans l'éq. (6.2.3). On obtient quatre paires de nombres

$$\begin{aligned} z_1 &= \zeta_{16} + \zeta_1 & z_2 &= \zeta_{13} + \zeta_4 \\ z_3 &= \zeta_{15} + \zeta_2 & z_4 &= \zeta_9 + \zeta_8 \\ z_5 &= \zeta_{11} + \zeta_6 & z_6 &= \zeta_{10} + \zeta_7 \\ z_7 &= \zeta_5 + \zeta_{12} & z_8 &= \zeta_{13} + \zeta_{14}. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

On observe pour finir que z_1 et z_2 satisfont l'équation quadratique $z^2 - y_1 z + y_4 = 0$, et d'autres similaires pour les couples (z_3, z_4), (z_5, z_6) et (z_7, z_8).

V. En résolvant par radicaux quadratiques ces trois équations de degré deux en cascade, on trouve la valeur de la grandeur

$$\begin{aligned} z_1 = 2\cos(2\pi/17) = & \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} + \\ & + \frac{\sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}}{8} \end{aligned}$$

qui, parce qu'elle s'exprime bien par des radicaux carrés superposés, est constructible à la régle et au compas en partant d'un segment de longueur 1 donné.

6.3. Les structures : raisons cachées de la réussite de la méthode ?. Les périodes dont Gauss a eu l'idée de se servir dans cette preuve, données par ζ_1^3, $(\zeta_1^3)^3$, $((\zeta_1^3)^3)^3$, *etc.*, n'apparaissent pas en plein jour comme la raison d'être du succès de la méthode : pourquoi donc les équations cyclotomiques de degré premier égal à un nombre de Fermat $p = 2^{2^\mu} + 1$ sont-elles résolubles par radicaux carrés[6] ? Gauss observe que les deux périodes x_1 et x_2 de $8 = (17-1)/2$ termes, sont les puissances de ζ_1 qui sont respectivement les résidus quadratiques modulo 17 et les résidus non quadratiques. Est-ce une explication ou une coïncidence fortuite ? Au moins, une interprétation causale adéquate – mais anachronique – pourrait facilement être trouvée dans la théorie de Galois des groupes d'équations algébriques, la méthode de Gauss cachant l'idée galoisienne de suite de composition du groupe de l'équation $x^{16} + \cdots + x + 1 = 0$, qui est abélien, *cyclique*, transitif, d'ordre 16 et contient trois sous-groupes distingués d'ordre 8, 4 et 2, la réordination des puissances de ζ_1 via les $(\zeta_1)^{3^n}$ correspondant à l'automorphisme de corps $T\colon \omega \mapsto \omega^3$ de son corps des racines. L'inventeur, doté d'un cerveau de calculateur exceptionnel, aurait donc suivi sans le vouloir la trame structurelle aveugle de l'équation : la cyclicité de son groupe de Galois (Galois démontra par ailleurs en 1821 qu'une équation est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe G contient une suite de sous-groupes $S_0 = G \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k = I$ dans laquelle chaque groupe est cylique par rapport au précédent (S_{j-1}/S_j est cyclique)). Sans se subordonner au vérificatoire, la postérité aurait résorbé l'arbitraire de la méthode en exhumant les structures qui étaient dissimulées sous le calcul virtuose. Commentaire bien connu sur la mathématique en perpétuel auto-approfondissement et rature ! Dans son analyse de Gauss, Jules Vuillemin le reprend à son compte pour défendre sa thèse d'une mathématique universelle (et comme par hasard en 1962, *structurale*) habilitée à infléchir la théorie philosophique de la raison, laquelle exigerait quatre préceptes de saveur cartésienne inspirés plus précisément par les travaux de Lagrange, de Gauss d'Abel et de Galois : 1. L'élimination de tout arbitraire dans les solutions. 2. La division des difficultés de tout problème *conformément aux structures élémentaires dont dépend la solution.* 3. La purification de tout élément extrinsèque et la mise en relation de tout énoncé aux hypothèses minimales dont il dépend réellement. 4. Le dénombrement complet des éléments d'un problème et la mise en relation de chacun d'entre eux avec des structures adéquates.

6.4. Conclusion dogmatique provisoire. "Si, conformément aux idées romantiques, le génie est une invention inconsciente qui produit des intuitions sans pouvoir les penser dans des concepts correspondants, les mathématiques de Gauss sont le meilleur exemple de mathématiques géniales." Si puissante que soit en Gauss la faculté de réflexion, elle ne canaliserait pas les débordements de la création. "Les structures abondent dans l'oeuvre de Gauss, mais elles affleurent plus qu'elles n'apparaissent, elles demeurent implicites."

En poussant à bout les analyses du dogmatisme structuraliste, on en viendrait à dire que Gauss serait l'auteur de mathématiques seulement géniales (!), marquées par le caractère enveloppé et comme "timide" de l'invention, enfouies dans l'implicite de leurs pratiques intuitives et destinées à être résorbées par des explications causales supérieures, puis réécrites dans un autre style, le style axiomatique, lequel seul serait habilité à entraîner le lecteur dans un mouvement de contemplation des articulations du causal et du définitionnel.

6.5. Vers une thèse négative sur le génie ?. C'est donc le caractère *enveloppé* de l'invention qui fera l'objet d'une réflexion voire d'une critique philosophique, en liaison avec une *théorie négative sur le génie.* Et pourquoi négative ? Car dès que transparaît la raison d'être structurale des processus qui sont la *cause cachée* d'une découverte mathématique, on ne voit guère comment maintenir une idée positive du génie. *Domination de l'a posteriori.*

6.6. Premières objections. Ici-même, on pourrait objecter qu'il existait probablement dans l'esprit de Gauss calculateur un *contrôle intuitif conscient* des potentialités qui articulent le champ théorique des équations cyclotomiques, même si l'hypostase structurelle et la thématisation symbolique n'ont pas encore fait l'objet d'une expression axiomatique. Lors de *l'actuation du calcul*, il est à croire qu'existaient en Gauss, certaines visions aptes à articuler un champ du possible dans la découverte des *périodes* (éqs. (6.2.2-3-4) *supra*) qui sont la clé combinatoire du processus – théorie de Galois ou pas !

Mais au fait, qu'est-ce que le génie[7] ?

---

[6]Les nombres $F_\mu = 2^{2^\mu} + 1$ $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, que Fermat (encore un cas paradoxal d'intuition !) croyait tous premiers, sont premiers au moins pour $\mu = 1, 2, 3, 4$: $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$. Euler en 1732 établit que F_5 est divisible par 641. Legendre en 1780 établit que F_6 est divisible par 274 177. Mais ironie de l'histoire : on ne connaît explicitement *aucun* F_μ premier pour $n > 4$. On a établi depuis que F_μ est non premier pour $7 \leq \mu \leq 16$ et $\mu = 18, 23, 36, 38, 39, 55, 63, 73$.

[7]Réponse d'un travailleur de la preuve ou d'un observateur dans les sciences de la nature (?) :

§7. Kant, les facultés et la théorie du génie dans la critique de la faculté de juger

7.1. Deux facultés. On peut, avec Kant, assigner aux Beaux-Arts deux facultés principales.1) L'une nous rend capables de juger, c'est le goût, par lequel un accord est établi, via l'imagination, entre nos concepts et nos intuitions, sans que nous puissions toutefois fournir la règle de cet accord. 2) La seconde de ces facultés rend certains hommes capables de créer des oeuvres belles ou sublimes. C'est le *génie* ou "talent" (don naturel) qui dicte la règle de l'art.

7.2. Le génie selon Kant. On pourrait donc s'exprimer ainsi : le génie est la disposition innée de l'esprit (*ingenium*) par laquelle la nature donne ses règles à l'art (*Critique du Jugement*, §46). C'est donc, d'après Kant, le *débordement des représentations de l'imagination par rapport aux concepts* qui donne leur âme, c'est-à-dire leur apparence vivante, aux production du génie. Dans ce cas, ou par l'écart entre la règle et l'image, ou par l'absence d'une telle règle, l'entendement et l'intuition ou bien ne s'accordent que dans les arcanes cachées de l'imagination, ou bien refusent tout accord, mais *manifestent toujours l'excès*, ici de l'idée rationnelle, là du concept objectif par rapport à toute représentation individuelle. Dans le cas des créations du génie, cette différence se renverse. *L'intuition fournit un excès par rapport au concept* ou même par rapport à l'idée, en sorte que cette détermination donne l'impression d'une pluralité de sens et d'interprétations possibles pour une même image. Par conséquent, le génie est l'*harmonie inconsciente* entre l'imagination et l'entendement.

7.3. Félix Klein. Félix Klein définit quant à lui l'originalité de Gauss comme "L'équilibre parfait entre l'imagination mathématique, la rigueur de la mise en oeuvre et le sens pratique pour l'application poussés jusqu'à l'observation et la mesure les plus soigneuses, et comme la présentation des immenses richesses de la création dans une forme absolument parfaite." Ce langage semble tout-à-fait approprié, si l'on pense au caractère enveloppé de l'invention chez Gauss, et à l'affleurement parfois *inconscient* des structures algébriques enfouies dans la gangue des cas particuliers. Malgré cette déclaration, Félix Klein, à la lumière de sa connaissance des travaux de Riemann, et de ses propres travaux mathématiques, est peut-être à l'origine d'une appréciation structuraliste critique des travaux de Gauss.

7.4. Remarque. En vérité, le problème crucial ici serait d'articuler théoriquement la dualité motrice du conscient et de l'inconscient et d'approfondir l'enracinement de l'inconscient dans la mobilité incontrôlée de l'esprit de génie.

Mais continuons auparavant à suivre le raisonnement du philosophe prototypique.

"*Le génie n'est qu'une plus grande aptitude à la patience*", mot attribué à Buffon et aphorisme séduisant, mais très restrictif. Laissons plutôt la parole à un phare, pour exprimer un "écho redit par mille labyrinthes" : "Tout ce qu'impliquent les mots : *volonté, désir, concentration, intensité nerveuse, explosion*, se sent et se fait deviner dans ses oeuvres (*Wagner*). Je ne crois pas me faire illusion ni tromper personne en affirmant que je vois là les principes caractéristiques du phénomène que nous appelons *génie* ; ou du moins, que dans tout ce que nous avons jusqu'ici légitimement appelé *génie*, on retrouve lesdites caractéristiques." Baudelaire, l'Art romantique, XXI, IV. Cette perspective d'un poète "philosophe" serait-elle plus adéquate que la perspective kantienne du §7 ?

§8. Thèses négatives sur le génie, refoulement de l'inconscient et privilège des méthodes structurales

En définitive, si l'on fait abstraction des traits psychologiques singuliers d'une découverte pour ne retenir que le rapport de notre conscience à la possibilité de l'objet :

Thèse de philosophe. *"Nous constatons que l'on doit refuser le génie au savant."*

Démonstration : "Une oeuvre scientifique fait toujours apercevoir les règles, parfois cachées à l'inventeur, qui l'ont rendue possible. Tandis qu'une telle illumination rétrospective fait *a priori* défaut aux oeuvres d'art."

"Aussi, les plus belles découvertes scientifiques sont-elles destinées à grossir les connaissances anonymes que l'on rassemble dans les manuels. Elles cessent alors d'appartenir à leur auteur, qui ne peut être dit génial que psychologiquement ou provisoirement, *par suite d'un simple défaut dans la réflexion, auquel remédie toujours la postérité.*"

"Ainsi, ce qui paraît illusoirement dû au génie de Gauss dans les *Disquisitiones Arithmeticae* est transformé en une simple méthode uniforme."

Alors toutes les données romantiques s'évaporent. "Illusoirement, provisoirement et psychologiquement", tels sont les seuls adverbes que retiendra la pensée consciente quand il lui reviendra de caractériser le moment de l'invention par rapport au travail logique de vérification. L'imagination scientifique n'est-elle pas le théâtre d'un jeu d'espoirs, d'artifices, d'ombres et de simulacres déçus !

Explicitation de la thèse précédente :

Thèse de philosophe. *"Le mouvement rétrograde de la réflexion destructrice du génie est lié à l'essence même de la connaissance scientifique."*

Argumentation : "Tant que notre entendement ne construit pas organiquement l'objet, en vertu des structures qui le commandent explicitement, tant qu'il ne révèle que du dehors son rapport au contenu de l'intuition sensible", il m'est impossible de connaître et de *savoir* si la relation impliquée dans la construction possède autre chose qu'une apparence de vérité, valable seulement pour moi et pour ce cas singulier dans lequel la construction est effectuée. Rien ne garantit la vérité de l'abstraction. "*Des structures expliquent les propriétés des figures qui demeurent cachées. Ces sont les véritables causes de ces propriétés.*"

8.1. L'étalon des mathématiques structurales. Ainsi s'explique et se déploie cette *philosophie intrinsèque aux mathématiques structurales*, ancrée dans un dualisme profond, une différence inconditionnée entre matière et forme, entre genèse et structure. On n'insistera jamais assez sur cette aporie qui se joue au point précis où l'*a posteriori* refuse de céder la prééminence à la pensée prospective. Alors nécessairement l'inconscient devra disparaître des méthodes mathématiques, qui pourront être dites intégralement et en toute pureté rationnelles. La mathématique de Gauss, la mathématique du génie, n'est rationnelle qu'en puissance : l'essence même de la connaissance mathématique, c'est de restructurer et de rhabiller les "mathématiques géniales" dans l'*a posteriori* d'une synthèse. *L'histoire entière des mathématiques prouve que leur mouvement de réécriture perpétuelle* *contraint toujours à dépasser l'évènement singulier, à retravailler la matière brute et à privilégier les structures essentielles.*

8.2. Obstructions à une psychanalyse mathématique. On peut donc prédire maintenant que les modalités d'une explication pschanalytique de l'inconscient mathématique seront extrêmement difficiles à articuler d'une manière probante. Comment résister alors à la captation du mouvement par l'*a posteriori* dogmatique du structuralisme et par *la spiritualité administrative du formalisme* ?

Mais les obstructions ne proviennent pas seulement de la philosophie. On peut noter en effet chez la plupart des mathématiciens une sorte de rejet de l'inconscient, imprimé par une pratique constante des *déformations structurales conscientes* que subit leur pensée au contact des objet mathématiques. Notamment, Grothendieck parle d'un travail d'*action* et de *structuration systématiques*. D'après Grothendieck, *résoudre* un problème consiste en effet à élaborer un *énorme édifice théorique pour montrer que la pensée de l'objet se déduit d'une interrelation démultipliée entre des concepts*, d'où à nouveau l'exigence structurale, qui semble en conclusion dominer le champ des mathématiques, même de l'avis d'un esprit par ailleurs hors cadre. Dans l'*Esquisse d'un programme*, Grothendieck annonce que son projet incarne la volonté d'être *galoisien* sur des mathématiques structurales. Grothendieck était tellement convaincu de la primauté absolue de l'édification théorique que sa géométrie-topologie-algèbre a transcendé l'urgence des conjectures particulières. Même Gauss aurait reconnu le primat des unifications théoriques (qui devaient métamorphoser ses découvertes entre les mains de ses successeurs), lorsque, parlant du calcul barycentrique de Möbius, il déclare que : "Grâce à de telles conceptions, des problèmes en nombre illimité qui, autrement, demeurent isolés, et *exigent à chaque fois de nouveaux efforts* (plus ou moins grands) *de l'esprit d'invention*, s'intègrent dans un royaume organique."

8.3. Résumé et conclusion : la raison philosophique contre les mathématiques génétiques. En résumé, "pour qu'une genèse soit possible, *il faut que le Moi réfléchi accède à son principe*, *dissipe son obscurité et l'éclaircisse de sa propre lumière* (résonance fichtéenne)".

"Il faut par conséquent que le *dogmatisme larvé* lié au préjugé d'un facteur opaque à la réflexion disparaisse dans le *mouvement* même par lequel la réflexion s'en empare."

Le passage de l'observation du phénomène brut à la compréhension de sa cause a lieu pour les mathématiques elles-mêmes "lorsque le point de vue de la raison se substitue au point de vue de l'entendement, qui n'est autre que la *raison cachée* dans ses applications individuelles, ou la structure enveloppée dans la figure".

"Ainsi, lorsqu'on fait abstraction de l'aspect subjectif des méthodes pour porter son attention sur la signification objective et le style de la nouvelle méthode, voici comment les choses se présentent."

"Quelles que soient leurs préférences, Galois, Cantor, Grassmann, Hilbert, Grothendieck, appartiennent à un *mouvement commun de pensée*. Ce qui les rejoint, c'est l'idée révolutionnaire de développer pour eux-mêmes et abstraction faite des objets auxquels ils peuvent s'appliquer, des *formalismes* et des *structures* qu'ils mettent au jour : ensembles, groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, variétés, faisceaux, schémas, topoï."

§9. Critique forte du structuralisme triomphant autour du paradoxe de l'a posteriori

Une telle vision ultrastructuraliste des mathématiques bénéficie pour elle du privilège de nécessités rationnelles captées après-coup et prétendument universelles. Telle est en fin de compte la conclusion que nous souhaitons faire valoir ici : s'il y a submersion par l'*a posteriori*, elle est universelle, et comme sous le déluge, aucune cime n'en émerge : l'*a posteriori* noie tout grâce au privilège temporel, mais il n'a en définitive aucun mérite à un tel surpassement. Tel est le *paradoxe de l'a posteriori.*

9.1. Retour sur le premier écueil. Ainsi, plus qu'un *écueil*, qu'un deuxième écueil, la présentation structurale du travail mathématique constitue une *obstruction* importante à l'intrusion de concepts psychanalytiques ou psychologiques pour rendre compte de la dynamique et de la fécondité des sciences. Jusqu'à présent, les philosophes, les épistémologues, les historiens, se sont contentés de ranger les remarques mathématiciennes dans le compartiment très connoté de la *psychologie de l'invention.* Parce que "*Les choses elles-mêmes sont indifférentes aux modalités de l'invention.*"

Du point de vue de la philosophie structuraliste des sciences (inspirée par le désir d'être aussi purement structuraliste que les sciences dures), cette conviction a été renforcée par le fait que pendant une longue période (qui ne s'est achevée que très récemment, dans les années 1970), vérité et objectivité semblaient renvoyer seulement à une grammaire correcte des énoncés censée établir une communication transparente et immuable des idées. Vérité et objectivité ne seraient traversées d'imprégnations anthropologiques qu'épiphénoménalement. "Tout ce qui était évocation de l'intuition, pire encore, de l'inconscient, paraissait éminemment suspect. Tout au plus était-il admis de parler de "beauté" pour expliquer un sentiment, inexplicable par le calcul, de la supériorité de certaines constructions sur d'autres" (Teissier, *Le mur du langage*, ce volume). Privée ainsi de toute humanisation, la science était certainement pure : les structures structuralistes elles-mêmes étaient indifférentes mêmes aux modalités de leur *intentions structurelles.*

9.2. Nécessité d'un renversement partiel et d'un relèvement. Soyons plus clairs. La puissance de pensée déployée par la philosophie a tendance a étouffer par la loi du prince toutes les tentatives naïves qui se laissent séduire par l'idée du génie et par les sirènes de l'invention, tentatives qui s'incarneraient dans une philosophie de l'induction, de la constructivité ou de l'heuristique (*cf.* les discussions autour de la résolution de problèmes mathématiques par Polyà, Lakatos, Polyani). Très vite, Spinoza, Kant ou Hegel nous rappellent à l'ordre dans un silence qui s'élève aussi haut que nous pourrions nous abaisser dans le non conceptuel et dans la séduction. Alors il ne nous reste peut-être qu'une seule chance : *anéantir, au moins partiellement, la philosophie de la nécessité rationnelle* (entreprise vraisemblablement désespérée !), laquelle fonctionne dans le cercle trop vertueux, trop policé, trop cohérent, des corrélations de l'*a posteriori*, avant de pouvoir balbutier quelques catégories spéciales de la potentialité et de la virtualité de l'inconscient mathématique. En philosophe, je te détruis, toi philosophe, afin de me construire. Même si l'entreprise est il faudrait critiquer à fond le spinozisme cavaillésien qui a inspiré l'oeuvre de Jules Vuillemin. Il faudrait donc une "*Aufhebung*" très singulière qui absorbe, digère et pulvérise systématiquement toutes les intentions fades du catéchisme de la vérifiabilité, pour saisir l'absence d'une réponse percutante aux questions les plus brûlantes.

9.3. Les profondeurs de ce qui se cherche à se dire. Par conséquent, notre tentative sur les mathématiques et l'inconscient demeurera imprégnée de ce slogan aveugle que le philosophe du mobile érige comme principe méditationnel :

L'a posteriori n'explique rien !

Et nous ignorons les profondeurs de ce que nous cherchons à dire car ce qui se joue en deçà du dire dépasse toujours le cadre trop étroit d'une expérience de pensée particulière. Devant l'abîme, l'écriture et le discours font souvent semblant. Parce qu'il n'existe pas de formule magique, si notre parole ne tient pas compte des insuffisances qui grèvent la philosophie du concept, elle risque de demeurer entièrement vaine et frustrante.

"*La philosophie doit affronter résolument le réel aux avant-postes de l'obscur*" (Gilles Châtelet).

§10. Redressement de l'argumentation

10.1. Objection galoisienne. Et comment ! Mais Pourtant ! Le mathématicien Galois, que l'on a vu érigé en champion précurseur du structuralisme par tous, n'écrit-il pas dans ses manuscrits : "La science progresse par une série de combinaisons, où le hasard ne joue pas le moindre rôle ; *sa vie est brute* et ressemble à celle des minéraux qui croissent par juxtaposition. Cela s'applique non seulement à la science telle qu'elle résulte des travaux d'une série de savants, mais aussi aux recherches particulières à l'un d'eux. En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler, ils ne déduisent pas, ils combinent, ils comparent. *Quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de côté et d'autre qu'ils y sont tombés.*" Cette remarque n'a vraisemblablement pas seulement rapport à la psychologie de l'invention ou encore aux impondérables anthropologiques de la recherche scientifique. Elle n'a pas non plus rapport à l'eugénisme larvé que le structuralisme scientifique souhaiterait imposer à la méthode : il y a bien de la *vérité mathématique*, entend dire Galois, mais *les circonstances dans lesquelles on la rencontre sont bien souvent obscures.*

10.2. Hasard et force. Nous voilà inopinément (?) au coeur du point fort de la problématique galoisienne[8]. Une virtuosité brute, primaire, rocailleuse et incorporant douleurs et extases a dû être profondément expérienciée par ce jeune homme prodige pour qu'il en rapporte de cette manière : l'acte, la force, la pulsion et l'intensité d'un geste sans cesse renouvelé en direction de la vérité, qui se dérobe derrière une combinatoire non dominable, telles sont les catégories qui faisaient défaut à l'approche passive de Hadamard. Commencerions-nous par là à *désensevelir* l'une des pièces du puzzle de l'*action* mathématique ?

10.3. Questions. Avançons prudemment. En définitive, si l'on adopte le point de vue du tout structural, on aboutit aux interrogations suivantes, dont pas une ne semble réellement envisageable dans le cadre des épistémologies classiques des mathématiques, mis à part peut-être celle d'Albert Lautman.

[8]– Bien qu'aucun texte suffisamment explicite ou systématique sur ce sujet n'ait été écrit par la main de Galois.

Quelles sont les modalités motrices des structures mères ? Quelles sont les modalités d'appréciation des notions axiomatiques mêmes ? Par exemple, quels sont les degrés de satisfaction abstraite qui conduisent à considérer que la définition d'*espace topologique* est "satisfaisante" et remplit bien son rôle ? Comment échapper à l'aporie de la nécessité des corrélations dans l'*a posteriori* ? Où gît le principe des rectifications incessantes ? *Quelles sont les caractéristiques de la volonté rationnelle* ? Dans quels principes sont déposées les intentions centrales des théories régionales ? Comment la recherche en acte, comment l'opération effective s'articulent-t-elles au sujet de conscience et y puisent-t-elles leurs *impulsions* primordiales ?

10.4. Permanence de l'infralinguistique. Cette "nouvelle" dynastie de questions ne cessera de se démultiplier si, parallèlement, on demande : cela a-t-il un sens de chercher un chemin reliant les mathématiques à un en-deçà du langage, dans un être mythique *comme si cet être manifestait ainsi sa force et sa protension créatrices* ? Tentation d'intuitionnisme, de mysticisme, voire d'obscurantisme douteux ? Toujours est-il que l'infralinguistique rayonne dans le langage.

Il nous serait bien sûr aisé d'entreprendre une démarche rigoureuse au parfum philosophique convenable, de mettre en perspective les bifurcations de la raison face à ses interrogations kantiennes et de conclure brillamment une belle analyse, en façonnant des concepts sur mesure, pour répondre à ces belles apories. Malheureusement, elles sont à la fois aussi essentielles et inessentielles que celles de la métaphysique classique et nous savons bien, hélas, que la dialectique hégelienne, décourageante de profondeur, pulvérise d'emblée toutes nos tentatives éventuelles de dialectiser ces idées !

10.5. Le primate du philosophe. *Mais alors, comment satisfaire notre primate*[9] *?* Car en fait, le mathématicien, le physicien, le bilogiste, le philosophe, le journaliste le négociateur, l'industriel, le technocrate (nous sommes tous des technocrates, mais si !) *et les auditeurs de cette conférence*, tous ne comprennent vraiment un discours que lorsqu'ils ont *réussi à expliquer la situation à leur primate.* Autrement, comment le primate qui est en nous pourrait-il s'approprier l'extérieur ? Évidemment, primate ne s'entendra pas ici ni au sens d'animal, lémurien, tarsien, simien, hominien ou anthropoïde, ou au sens d'homme brutal, grossier et inintelligent, mais je souhaite l'entendre comme une sorte d'*homunculus métaphorique de la compréhension s'agitant en nous et catalysant une chimie d'appréhension de la connaissance.*

Les philosophes ont donc aussi en eux un primate philosophe.

Alors le primate qui est en nous, le primate qui est en vous, le *primate philosophe* qui est en moi et qui est avide d'argumentations liminaires, *tous ces primates vont commencer à devenir très impatients !, si je continue sans cesse à reculer les limites de ce propos.*

10.6. Conclusion. Ainsi, toute la positivité que l'on peut mettre en avant dans les mathématiques ne peut cacher cependant qu'existent aussi des satisfactions d'un ordre autre que purement rationnel. Il s'agit justement d'analyser, à l'oeuvre dans le travail mathématique, ces attentes qui nous dominent, cette pulsion que l'on exprime et qui s'exprime – par exemple dans notre primate.

[9]J'entends, le primate à la Teissier qui est en chacun de nous.

§11. Pour une philosophie de la volonté mathématique

La suite de mon intervention va être organisée de la manière suivante. Je vais essayer de réhabiliter en filigrane une des composantes négligées de la philosophie mathématique de Descartes, à savoir qu'elle est une *philosophie de la volonté.*

Thèse principale 1. *Le possible – l'efficience des potentialités – ne se révèle à nous que par l'action et sous l'aspect des lois de la volonté. Cette volonté oriente des désirs rationnels et des exigences de satisfaction abstraite, qui sont classiquement soumis à une mise entre parenthèse fondamentale dans l'intersubjectivté civilisée, mais qui n'en demeurent pas moins réels et agissants.*

L'orientation générale de mes thèses s'articulera donc autour d'une philosophie de la volonté encore embryonnaire, implicite et imparfaite. Mais l'engagement métaphysique qu'impliquerait la mise au point de tout un système catégoriel structuré venant charpenter cette *philosophie de la volonté rationnelle et impersonnelle* bien distincte du *cogito* cartésien et d'un immanentisme abstrait, est tel que je ne suis pas encore en mesure pour l'instant d'en exposer une théorie satisfaisante. La suite de l'argumentation est consacrée à donner quelques indications dans cette direction.

§12. Introduction aux thèses principales

Cette thèse principale sera illustrée et suivie par une série d'une dizaine de thèses spéculatives secondaires, formulées ici d'une manière assez approximative et encore provisoire. Je renvoie donc à des réflexions ultérieures pour l'approfondissement de ces points de vue.

12.1. Avertissement. Ces thèses s'articulent en se focalisant sur un point précis que je juge *obsessionnel* et *primordial* à travers les mathématiques tout entières, à savoir l'exigence *abélienne, galoisienne, riemannienne* et *hilbertienne* de traiter *dans leur pur pour soi* les *questions innocentes* qui naissent sur le parcours des mathématiques *et de les résoudre complètement.* On se rapportera aux Thèses 4, 5, 7, 8 et 10 ci-dessous. Il est bien connu que c'est souvent une simple candeur interrogative quasiment informulée car implicite, qui peut être mise à l'origine des théories mathématiques les plus spécialisées, *en tant que germe de déploiement d'intentions centrales.* C'est pourquoi il me semble pertinent de l'analyser en liaison avec une *théorie positive* sur l'inconscient et sur le génie ("*Nous sommes tous des génies*", écrivait Bernard Teissier en marge d'une version préliminaire de ce texte) réévalués comme *orientation*, comme *action* et comme *réalisation.* Je tenterai de développer alors l'idée personnelle d'une *nécessité d'obscurcissement* et d'une *discipline de non-savoir*, comme exigence inconsciente, à un niveau subjectif et intersubjectif, en vue d'atteindre *un vrai qui ne se révèle qu'à travers les difformités du travail* (*cf.* les Thèses 2, 3, 6 et 9 ci-dessous). Malgré les connotations péjoratives qui sont attachées à l'idée de confusion, de désordre et d'ombre, je crois déceler que ce champ de forces exerce une action positive et confère à l'inconscient un statut en acte plutôt qu'en puissance : ici, l'acte produit la *dé-conscientialisation volontaire de la "matière à pensée" grâce à laquelle la conscience peut rejaillir et rebondir au-delà d'elle-même.* Enfin, pour parer à l'objection d'hétéronomie du vrai qu'induit une telle thèse sur l'inconscient comme moteur obscur décidé, c'est un *besoin de* *satisfaction* par le vrai qui légitimera en dernier recours cette motricité interne à la bipolarité conscience – inconscience mathématique.

12.2. La sublimation. Je ferai remarquer aussi que j'éviterai soigneusement d'introduire le champ thématique de la *sublimation*, ou du moins de laisser croire qu'on s'affranchira simplement desdites questions (§10.3) en se ramenant avec élégance au champ de la sublimation, ou à l'esthétique mathématique. Afin d'éviter la canalisation, la récupération voire le détournement naïf d'un champ de forces envisagé ici comme primitif et primordial. Ce champ de force primitif ne se révèlera vraiment que dans les lieux adéquats à son essence motrice.

§13. Présence de zones motrices infralinguistiques obscures

D'autant que les forces obscures et confuses ne sont pas moins importantes dans l'émergence des notions mathématiques révolutionnaires. Bien mieux, il me faudra démontrer l'*interdépendance* des exigences de la satisfaction, relier les acquis mathématiques d'une théorie au *besoin d'expression* et à l'*urgence d'un problème*, sans envisager les cristallisations mathématiques comme des involutions de formes incurvées sur elles-mêmes ou des structures enveloppées dans la guangue des cas particuliers.

13.1. Existence. La *première* de ces thèses secondaires est une constatation :

Thèse 2. *Il existe, y compris dans la mathématique la plus technique, un niveau antéprédicatif, originaire, infralinguinstique, bref, une zone obscure où s'exprime et se déploie une pensée sans mots.*

13.2. Scholie : rayonnement de l'infralinguitique. Bien entendu, les lignes de forces qui le sillonnent, l'entière disponibilité dans laquelle se tient par nature ce niveau, ne doivent pas nous faire croire qu'il s'agit seulement d'un jeu d'ombres (Platon, mythe de la caverne). D'une certaine manière, le souvenir des *murs métaphysiques* qu'ont franchi Abel, Galois, Grothendieck, subsiste dans le sein même des théories acquises, à la manière du rayonnement fondamental de l'univers. *L'infralinguistique ne saurait disparaître.* Et pas seulement en vertu d'une exigence de réactivation, ou d'un devoir philosophique (ou épistémologique) de remonter jusqu'aux choses mêmes dans la création de l'objet singulier. Bien mieux, parce que *la raison évolue dans le souvenir de ses réalisations*, et par là même doit s'apprêter sans cesse à effectuer un pas de côté, devant la nécessité d'effectuer une liaison inconnue. *Essentiel à la transduction, le clinamen des hypothèses*[10] *rayonne dans une zone infralinguistique.*

13.3. Pédagogie et métaphysique. Par exemple, on connaît bien certaines apories fondamentales de l'enseignement des mathématiques : rien n'efface la singularité métaphysique de la géométrie différentielle, de la notion de continuité,

[10]Dans la théorie physique d'Épicure, le *clinamen*, mouvement de déviation des atomes sans cause externe, est un principe physique de *liberté* analogue au mouvement volontaire et placée à l'origine des choses. Inscrit au coeur du procès d'auto-approfondissement, et essentiel aux déplacements conceptuels et spéculatifs, le clinamen des hypothèses mathématiques rayonne dans le travail mathématique à tous les niveaux : c'est seulement en changeant volontairement et stratégiquement la direction des hypothèses que la réalité mathématique peut se métamorphoser sous le regard de la pensée.

de la notion d'espace vectoriel ou encore de la théorie des groupes, de la théorie de Galois, de la théorie des schémas, *etc.* La raison a beau s'aider des béquilles d'un formalisme peaufiné par des générations de mathématiciens et de manuels, *rien n'efface l'obstacle que représente l'apprentissage personnel et subjectif d'une théorie.* Le geste tarde à venir, l'évidence renchérit sur des non-évidences et peut-être chaque mathématicien cultive-t-il en lui-même et malgré lui sa *part de non-évidence, d'ignorance et de doute personnels* que seul un apprentissage forcené peut corriger et effacer. Le texte ne peut jamais faire apparaître *toute* la métaphysique qu'il met en oeuvre. La formalisation n'enclôt jamais *toute* la pensée qu'elle exprime.

13.4. Nécessité. D'où :

Thèse 3. *La nécessité d'inventer s'accompagne en quelque sorte du devoir de cloîtrer une partie de son esprit (fût-elle infime) hors du langage, au-delà des mots, en deçà des lettres, et plus particulièrement dans les mathématiques. Conséquence : il faut exercer son intuition (y compris l'intuition langagière) à passer de l'autre côté du mur du langage, en élaborant des schèmes géométriques et des diagrammes intuitifs inventés sur mesure. Il faut cultiver ses capacités de deviner le vrai hors langage.*

13.5. Scholie : l'isolement. Cette thèse corrèle le célèbre *principe de solitude et d'isolement* que nombre de mathématiciens connus ont proné pour préserver leur activité, et notamment Gauss, qui s'était convaincu à partir d'expériences vécues qu'il lui était préférable de s'isoler presque complètement du champ des influences de l'activité mathématique de l'époque. Autre exemple : à la fin du *Prélude en quatre mouvements* des *Récoltes et Semailles*, Alexandre Grothendieck parle en des termes autobiographiques émouvants et presque poétiques de ce qu'il appelle le *don de solitude* pour expliquer sa "marginalité' dans le monde mathématique officiel[11].

13.6. Discussion. Maintenant, la question de l'interprétation anthropologique, culturelle et sociale d'une telle zone obscure non langagière est peut-être une fausse question, puisqu'elle conduirait à écarter purement et simplement cette zone, sans lui reconnaître aucune espèce d'influence. D'ailleurs, les structures du langage peuvent être interprétées réciproquement comme le refoulement de la zone infralinguistique, la mise en place d'un espace moins tendu et plus supportable que le monde du silence. Mais toutefois, force nous est de constater que, si le "moi subliminal" peut réussir là où le moi conscient échoue, il doit pouvoir laisser croître et grandir ses cristaux à l'ombre d'un ailleurs inaccessible au langage et à la communication courante entre hommes honnêtes.

13.7. L'intuition de vérité. Comment analyser la zone infralinguistique ? Et comment interpréter ce mythe que les mathématiciens aiment à se raconter : tout grand mathématicien serait en possession d'un réservoir de *lemmes secrets*, mais non démontrés, guides de leurs recherches au plus près de *l'intuition de vérité*, qui ne

[11]Le célèbre *don de solitude* de *Récoltes et Semailles* apparaît dans le dernier paragraphe du *Prélude* : "Cette "propension", ou cette aptitude intérieure, n'est pas le privilège d'une maturité, mais bien celui de l'enfance. C'est un don reçu en naissant, en même temps que la vie – un don humble et redoutable. Un don souvent enfoui profond, que certains ont su conserver tant soit peu, ou retrouver, peut-être... On peut l'appeler aussi le *don de solitude.*"

s'incarneraient que sous une forme partielle et dégradée, dans leurs écrits et dans le langage ? La philosophie des sciences s'intéresse à l'émergence contextualisée des formes et des structures. La psychanalyse souhaiterait aborder l'invention, le plaisir et la satisfaction. Dans les mathématiques, pendant ce temps-là, les arcanes de l'imagination et la recherche de la profondeur semblent persévérer dans la reproduction de l'obscur et du clair. Il reste encore à analyser comment fonctionne l'intuition de vérité, ce qui la provoque et comment elle *déclenche des germes de mouvements dans la conceptualité résistante.*

§14. Multiplicité et hétérogénéité des influences sur la pensée

La troisième suggestion que nous proposons est la suivante. On assiste dans les mathématiques au prolongement d'une *force* créatrice sans limites, dont personne ne tient les clés, une véritable mixtion entre création consciente, création inconsciente, geste volontaire, flèche involontaire, actualisation indécise, et *potentialités provisoires*. Quel est alors le principe moteur véritable de la science ?

Thése 4. *La question de la possibilité d'une domination des mathématiques par un principe moteur universel, physique, spéculatif, logique, psychologique, restera sans réponse. En vérité, des dominations partielles et abondantes structurent cet espace problématique d'influences.*

14.1. Discussion. Et pourtant : la nécessité n'est rien sans l'approfondissement du *champ intensif* immanent à une théorie. Seuls les fantômes traversent le mur du langage sans effort. La réalité mathématique ne réside pas seulement dans les différences qui sépareraient les êtres achevés des êtres inachevés. Cette réalité n'est pas non plus celle d'êtres statiques, objets de pure contemplation. S'il existe, dans les mathématiques, une réalité distinctive, elle caractérise la *réalisation* comme *mouvement*, comme *protension* et comme *effort* : *tel est le principe dominateur, négligé par les épistémologies classiques, que je propose ici à l'analyse.* Le souci de resituer cette réalité dans son champ originaire doit donc s'accompagner d'une révocation préalable de toute orientation fixiste, structurale, formaliste, et d'une suspension du jugement. Aussi, l'éventuelle et prévisible inanité d'un projet de réévaluation du dynamique et du moteur dans l'*action* mathématique, ne devrait en rien nous décourager de l'entreprise. *Car l'excès de lucidité que procure la méditation sur les réalisations de la pensée nous prépare d'emblée à l'éventualité d'un échec, comme tant de philosophies des sciences dont circulent les insuffisances, on le sait.* Kierkegaard mesurait la *profondeur* d'une personnalité aux autocorrections que s'inflige le penseur, l'écrivain, le philosophe, dans ses manuscrits. Il s'agirait par métaphore et à un niveau abstrait d'auto-corrections indéfinies que la pensée réflexive infligerait à la pensée réflexive. Tandis que les mathématiques se réécrivent et se purifient sans cesse de l'extrinsèque, la philosophie des sciences se crisperait sur des principes dominateurs et explicateurs qu'elle rejetterait indéfiniment.

§15. Intentionnalité rationnelle

En vérité, une chose est sûre. L'effectuation consciente ne réactive qu'approximativement – et peut-être aussi ne réactive qu'arbitrairement – *l'espace inouï qui* *sépare la pensée de ses réalisations*, le lieu indécis où se joue le théâtre des espoirs, des illusions et des conquêtes, ce lieu imprécis qui est à la fois *la vérité de la recherche* et l'*erreur du concept.* Car, pour que l'entreprise mathématique réussisse, pour qu'elle parvienne à désigner des objets, à constituer des *champs apocritiques* (*apocrisis*, la réponse) entiers, à redoubler des espaces de gestes qui se sont révélés convaincants dans un autre domaine, il faut qu'elle soit orientée, poussée, interrogeante, attentive et forcée. *Sans l'existence d'une volonté purement rationnelle*, les mathématiques comme sommet seraient inexistantes. L'épistémologie ne peut pas ignorer l'existence de cette tension, de cette attente, *liée au possible comme à l'impossible*, et qui rayonnent dans un silence préliminaire.

Notre quatrième thèse s'énoncera donc de la manière suivante :

Thèse 5. *Les marques de la profondeur, les marques de la synthèse, sont reconnaissables à l'aune d'une intentionnalité purement rationnelle qui définit et perdéfinit les projets de réalisation mathématique.*

15.1. Dynamique de la réalisation. La distinction entre *réalité* mathématique et *réalisation* mathématique, provient de ceci : il n'y a pas de réalité sans acte et il n'y a pas d'acte sans volonté d'acte. L'absolue volonté ne trouve pas en elle d'absolue vérité. Elle crée, sans s'y subordonner, les lois logiques en posant des synthèses qui soutiennent l'analyse, et ces dernières donnent à la logique et à la vérité leur contenu réel.

15.2. Intentionnalité rationnelle. En mathématiques, cette *intentionnalité purement rationnelle* parvient à esquisser des orientations, à dessiner des structures, à *constituer de l'objectivité*, selon un schéma particulièrement auto-correctif et particulièrement rigoureux, voire (mais *a posteriori* seulement) "irréprochable". Ici, l'adjectif "irréprochable" possède une connotation morale dont je voudrais bien le défalquer, s'il existait un terme analogue dans la langue française pour désigner ce sur quoi la raison correctrice ne peut pas revenir, parce que rien de *répondu* ne s'y trouve qui ne respecte entièrement un abstrait interrogatif pur : c'est un cas où la raison n'invente aucune hypothèse extrinsèque (*Hypotheses non fingo*).

§16. La satisfaction mathématique

Ce qui fonde le caractère de stabilité et l'intérêt des acquis de la pensée mathématique, c'est sa capacité à évoluer dans la cohérence, en dernier recours, *avec des objectifs et des stratégies précises.* Ce n'est donc pas une science seulement engagée dans l'élaboration d'une philosophie de la nature, dans le calcul, dans l'engendrement des formes. C'est aussi une pensée qui cherche à éclore dans des lieux d'éclosion vierges, avec le souvenir de ses réalisations authentiques.

Thèse 6. *Il ne serait donc pas difficile d'imaginer un concept de* satisfaction *en mathématiques qui soit lié à des processus extraordinairement conscients, pourvu que ces processus soient assimilables à un projet.*

Car, de même que la raison est accablée par des questions en surnombre auxquelles elle ne sait pas répondre (Préface à la *Critique de la raison pure* de Kant), de même que, selon Auguste Comte, nos moyens de concevoir des problèmes sont beaucoup plus puissants que nos ressources pour les résoudre (notre esprit étant plus apte à imaginer qu'à raisonner, les questions naïves étant plus faciles à dégager par reproduction, qu'à résoudre), la raison est de surcroît accablée de la nécessité de *faire voir a priori qu'elle pourrait répondre à ces problèmes en intensifiant toujours plus le désir d'accéder.* Sans volonté, Cartan, Oka, Hironaka n'auraient démontré aucun résultat profond. Mais quel statut accorder à cette satisfaction qui se transmet dans la pratique, dans l'expérience et dans le travail mathématiques ?

16.1. Dialectique lautmanienne des problèmes. Il est difficile d'interpréter Albert Lautman sans plaquer sur son oeuvre les catégories platoniciennes vulgaires qu'il a au contraire et avec soin évité d'employer pour ses propres analyses. À plusieurs reprises, il rappelle que les commentateurs de Platon ont insisté sur le fait que les Idées ne sont pas des essences immobiles et irréductibles, d'un monde intelligible, mais qu'elle sont *liées* entre elles selon les schèmes d'une dialectique supérieure qui préside à leur venue. Au fond, la référence lautmanienne au platonisme se justifie par l'existence de relations entre les théories mathématiques et les problèmes logiques qui les *dominent.* "La philosophie mathématique telle que nous la concevons, ne consiste pas tant à retrouver un problème de la métaphysique classique au sein d'une théorie mathématique, qu'à appréhender globalement la structure de cette théorie pour *dégager le problème logique qui se trouve à la fois défini et résolu par l'existence de cette théorie*".

16.2. Effort de l'esprit et nécessité de réalisation. Une *expérience spirituelle* est ainsi attachée à l'*effort de l'intelligence* pour créer ou comprendre un problème, mais cette expérience a un autre contenu que la mathématique qui se fait en même temps qu'elle. Cette expérience n'est pas non plus seulement la conscience du pouvoir infini de la pensée.

Je voudrais montrer comment cette conception d'une expérience qui gouverne la réalité des mathématiques s'inscrit dans ce qu'on pourrait désigner sous le nom de "*nécessité réalisationnelle*", ou "nécessité d'aboutir" à quoi est attaché un statut d'*intention*, de *visée* et de *satisfaction* rationnelles. Cette nécessité s'articulant à des problèmes concrets et effectifs.

La question de savoir qui décide, entre la métaphysique et la science, de la capacité qu'ont les mathématiques d'obtenir des *résultats entièrement satisfaisants*, qui arbitre la question "*comment une mathématique satisfaisante est-elle possible?*", je l'ignore. C'est bien la difficulté tout entière. Mais il faut une *force spirituelle*, sinon les processus conscients n'engendreraient que du formel superficiel. Les philosophes ont déjà souvent cédé à la tentation d'affirmer : "une fois le bon système d'axiomes, le bon langage, la bonne langue formulaire posés, tout se déroule par la double intervention de la forme et de l'opération sur l'objet." Au contraire, il doit être clair que les potentialités s'accumulent en vertu d'exigences de satisfaction beaucoup plus *profondes* et insondables que ne le suggère l'opérativité.

16.3. Contre l'opérativité logique constituante. En effet :

Thèse 7. *L'opérativité est la servante des focalisations potentialisatrices de la pensée. Toute opération effective est subordonnée à une intentionnalité collatérale. Le calcul est dirigé et les synthèses manifestent de l'orientation et de l'irréversibilité.*

§17. Conditions de possibilité

Pour expliquer cette dernière suggestion, venons-en à la huitième thèse. L'action de l'inconscient sur l'invention n'est possible que dans un horizon de réalisable qui est déposé comme un faisceau de connexions et de médiations effectuables. Pour la philosophie cartésienne des mathématiques, les attitudes d'ouverture se manifestent dans et par des médiations ineffectives, *mais réalisables*. Si la chose est laissée là comme *racine d'une discursivité possible* qui la concerne et demeure en suspens, sa fragilité se mesure justement à sa proximité médiane. De même, les analyses de Hadamard sur le merveilleux pouvoir qu'a l'inconscient de nous éclairer subitement là où la recherche consciente avait échoué par excès de proximité de l'objet, ne doivent pas nous faire oublier que :

Thèse 8. *Les conditions de possibilité d'une découverte ou d'une théorie doivent être réunies pour qu'elle soit réalisée. En créant des liaisons inopinées mais possibles et réalisables à l'intérieur même des théories sophistiquées, un inconscient abstrait et procédural est à l'oeuvre dans le développement du spéculatif.*

17.1. Exemple. Si une théorie géométrique de la stratification des ensembles analytiques singuliers est possible, à l'aide seulement d'outils conceptuels relativement limités (variétés, polynômes, fonctions analytiques, inégalités, récurrence sur la dimension) et d'une combinatoire restreinte de gestes, d'"orientations désingularisantes" et de "briques élémentaires", il faut peut-être en trouver la raison (du moins en partie) dans *le rapport fondamental du réalisable à l'irréalisable*, en tant que ce rapport trouve son lieu d'expression à l'intérieur même des horizons de possibilité que définit la raison elle-même dans la théorie. L'harmonie des simplicités intuitives est fidèle à la nature de la matière traitée.

17.2. Discipline de non-savoir. Les liens entre implicite et explicite, les médiations du négatif, du creux, ne doivent pas nous faire oublier que le privilège du possible sur le réel incorpore des degrés et agit dans la conscience d'une manière extraordinairement contrastée. Si la pensée doit saisir dans la chose même l'exigence d'une surrection qui donne le signal du déploiement discursif par quoi le contenu de la chose se manifeste, il n'en reste pas moins que :

Thèse 9. *Une discipline de non-savoir doit définir des sources "épochales" absolues par lesquelles se manifestent des impossibles exigibles.*

C'est à cette condition seulement : volonté de vaincre les concepts cachés, que la résolution de problèmes difficiles peut prendre tout son sens.
En résumé :

Thèse 10. *Le besoin de satisfaction est dominé par le besoin d'élévation, et la dialectique du réalisable par rapport à l'irréalisable est inscrite dans les structures fondamentales de l'idéalité.*

§18. Éclaircir chaque question. Contempler des généalogies de problèmes. Ne se satisfaire que de solutions complètes

Pour donner sens à l'idée d'une zone obscure et d'une pensée sans mot comme *en attente*, et *inscrite dans les structures fondamentales de l'idéalité réalisable*, pour rendre compte de la *plasticité intrinsèque* au travail mathématique et pour rendre compte des déformations morphogénétiques de l'idéalité conquise, il faut donc surélever l'exigence de satisfaction en mathématiques. Hilbert, pour l'avoir saisi, l'aura souvent écrit: "Éclaircir chaque question qui se présente en examinant en même temps, si on peut, par un procédé fixé d'avance, lui répondre en n'utilisant que des moyens auxiliaires limités. *Ce principe me paraît contenir un précepte universel et naturel.* En réalité, lorsque nous rencontrons un problème ou que nous avons le sentiment de la vérité d'une proposition, notre *désir de connaissance* n'est satisfait que lorsque, ou bien nous parvenons à la complète solution du problème et à la preuve rigoureuse de la proposition, ou bien quand nous reconnaissons clairement la raison pour laquelle un tel succès est impossible, et, par conséquent, la nécessité de l'échec." Ce *désir de connaissance*, le chef de file de l'école formaliste l'évoque fréquemment. Loin d'être une évidence de toute éternité, l'exigence de complète satisfaction rationnelle qui accompagne ce désir n'est pas due à Hilbert, mais elle aura été l'un des acquis majeurs des mathématiques du dix-neuvième siècle, grâce aux raisonnements précurseurs de Gauss, Abel, Galois, Dirichlet et Riemann.

"*L'après-Riemann (hiérarchies conceptuelles) est au moins aussi destinal pour les mathématiques que l'est l'après-Kant (limites de l'entendement) pour la philosophie*".

§19. Portée et limites de l'inconscient

Mais revenons sur l'intervention de l'inconscient dans l'invention mathématique. Si l'inconscient est à l'oeuvre, s'il y a des germes d'inconscient, si l'inconscient est multiple, s'il n'existe guère d'opérations dans notre esprit qui ne l'impliquent pas, s'il permet de n'examiner dans un éclair que les combinaisons qui sont utiles, s'il nous permet de sortir de l'ornière dans laquelle nous aurions insensiblement glissé, en fait, il est parfaitement clair qu'aucune découverte ou invention importante ne peut avoir lieu sans la volonté de découvrir. Il doit être parfaitement clair aussi que l'inconscient ne saisit qu'un possible, le possible qui est saisissable.

19.1. Effusions d'incohérence. C'est pourquoi il paraît tout à fait possible d'adopter une position philosophique entièrement en retrait sur la question de l'inconscient, non pas par crainte de l'irrationnel, mais en vertu des structures logiques de l'idéalité, envisagée en puissance ou en acte. Poussée à bout, cette option conduit néanmoins à reconnaître qu'il existe, à l'oeuvre dans les mathématiques les plus "émergentes", des processus difficiles et purement intuitifs de conquête de l'idéalité, qui impliquent des *expériences psychologiques singulières.* Plus on s'approche du vrai, plus il se dérobe derrière une *effusion d'incohérence*, propre au vrai potentiel non structuré. Il est vraisemblablement nécessaire d'aborder la science avec la plus grande candeur et la plus belle innocence pour traverser le mur de la confusion et s'installer de l'autre côté, dans cet espace où les gestes du génie ne font qu'obéir à une dialectique pure de la vérité. Grothendieck, et bien avant lui Newton, ont exprimé cette idée, *cf.* la belle introduction aux *Récoltes et semailles*[12]. Dans quelle mesure cette expérience d'un accès à la fois conscient et inconscient au vrai constitue-t-elle une illustration de ce que j'ai appelé ci-dessus l'*effusion d'incohérence* ? Comment se manifeste-t-elle ? Cela reste mystérieux.

[12] Voici le passage, p. 33 du *Prélude* : "Dans notre connaissance des choses de l'Univers (qu'elles

19.2. Béance des questions simples. Je soutiens aussi que les mathématiques "platoniciennes" instituent des *béances inaugurales* sous la forme de *questions pures et simples*, ultra-métaphysiques, qui peuvent être déposées dans la *conscience* du chercheur comme racines d'une discursivité potentielle, c'est à dire racines primitives pour une solution pure qui est en attente et "à venir". Bien entendu, ce niveau est inférieur au niveau d'action et de structuration systématiques, d'édification et de constitution formelle d'une "objectivité" mathématique pertinente, et de théories mathématiques adéquates – par exemple d'une ou de plusieurs "géométries algébriques". Ce premier niveau est si profond que très peu de mathématiciens l'ont expérimenté en acte. Par exemple, Alain Connes l'évoque dans *Matière à pensée*, et l'appelle le troisième niveau. Le second niveau que j'évoque intervient au moment où la raison s'interroge sur ses propres acquis (c'est un mouvement kantien) et sur les possibilités réelles de la synthèse par rapport à l'analyse, lorsque ces dernières portent sur des énigmes clairement formulées. Hilbert les appelle des *problèmes déterminés*. Au premier niveau, en l'absence de théorie, les questions flottent dans une indétermination originelle et je crois deviner que si l'on veut analyser l'exigence d'accéder à de nouveaux objets formels pertinents, cela nécessite l'introduction de catégories absolument nouvelles. Bernard Teissier parle de communication avec le côté préverbal du mur et introduit l'existence de "notre" *primate*, *i.e.* du *primate qui est en nous*.

19.3. Questions déterminées. Or, revenons au deuxième niveau, qui est *déterminé*. Il s'agit par exemple de la question "À quelle condition, nécessaire et suffisante, une équation algébrique est-elle résoluble par radicaux?" (Galois, 1831, *cf. supra*), ou encore de la question "Que doit-on entendre par $\int_a^b f(x)dx$?" (Riemann, 1854, *Mémoire d'habilitation*), ou d'une multitude d'exigences de conditions nécessaires, suffisantes, nécessaires et suffisantes qui *animent* les différents mémoires et articles mathématiquesclassiques ou contemporains.

19.4. La méthode générale d'Abel. Cette méthode préconise la règle de travail suivante. On doit toujours donner à un problème mathématique "une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème mathématique" : cette phrase visionnaire a été écrite par Abel en 1826 et constitue une étape décisive dans l'histoire de la pensée mathématique. Très couramment, le mathématicien au travail interprète cette suggestion méthodologique avec pragmatisme : on doit toujours donner au problème mathématique une forme concrète, en ajoutant des hypothèses suffisantes à la démontrabilité d'un certain nombres de théorèmes. Inutile de dire que c'est exactement le contraire qui est préconisé par Abel : on doit défalquer la matière mathématique des hypothèses superflues qui en encombrent la *compréhension* et la *genèse* pour trouver la vraie réponse au problème, ce qui nécessite d'abord de trouver la vraie formulation dudit problème. Telle est la *méthode générale* d'Abel : formulation, puis résolution de vrais problèmes.

---

soient mathématiques ou autres), le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'*innocence*. C'est l'innocence originelle que nous avons reçue en partage à notre naissance et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, et de nos peurs les plus secrètes. Elle seule *unit l'humilité à la hardiesse* qui nous font pénétrer au coeur des choses, et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous et de nous en imprégner."

19.5. Motifs de la méthode axiomatique. Ce précepte est devenu tellement évident pour les mathématiciens contemporains qu'on a peine à croire qu'il ait fallu attendre le dix-neuvième siècle pour qu'il naisse dans les esprits d'Abel, Galois et Riemann et qu'il a fallu attendre Bourbaki au vingtième siècle pour que sa systématicité (en fait, sa "systématisabilité") soit mise en oeuvre de manière universelle : l'axiomatisme pourrait en effet être interprété comme une méthode d'exposition et de clarification des *liens théoriques* qui peuvent exister entre diverses notions mathématiques nuancées et hiérarchisées, qui éclatent dans une telle différence nécessaire, que seule la présentation axiomatique est à même de tisser le réseau de questions et de réponses locales qui articulent un champ théorique éclaté. La *méthode axiomatique* intervient en effet comme *renfort de structuration du questionnement* devant la diversification "babélienne" des hypothèses qui répondent à une multitude de questions premières ou secondaires. Abel écrivait déjà, un siècle plus tôt : "Ce qui a fait que cette méthode (générale), qui est sans contredit la seule scientifique, parce qu'elle est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé, a été peu usitée dans les mathématiques, c'est l'extrême complication à laquelle elle paraît assujettie dans la plupart des problèmes, surtout quand ils ont une certaine généralité". Ainsi, la généralité et la pureté des questions implique leur éclatement. C'est dire combien la raison mathématicienne s'interroge sans cesse sur ses propres possibilités.

§20. Conclusion : parabole de l'obscurité et de la confusion

Or, c'est ici-même pour conclure que je souhaiterais formuler à nouveau la parabole de l'obscurité et de la confusion. À la suite des réflexions précédentes, nous pouvons dire qu'une *epoche* fondamentale (c'est-à-dire une suspension de l'opinion, de l'intuition et du jugement devant l'indétermination des questions qui ont une certaine généralité) anime la pensée mathématique : il y a une oblitération de la tentation d'effectuer des gestes superflus, simplificateurs et rassérénants. On sait la différence d'essence qui sépare les mathématiques dites appliquées, en tant que modélisatrices, des mathématiques dites pures : les premières autorisent l'introduction de faisceaux d'hypothèses simplificatrices pour répondre à la complexité congénitale des formes qu'elles étudient, tandis que les secondes *resserrent sans cesse l'étau métaphysique du vrai.* Aux dépens du confort intellectuel, aux dépens des paradigmes existants, aux dépens de la cohérence du savoir acquis. Toute question pure déterminée a vu jaillir à partir d'elle des formes qui auraient été ignorées sans cette abnégation spirituelle que commande l'impératif d'Abel.

20.1. Mouvement abyssal. Eh bien, il s'agit, pour la conscience du chercheur, d'un mouvement descendant en direction des profondeurs de l'ignorance mathématique. Pour employer une métaphore, un supplément aporétique nous rapproche toujours plus du "centre de la Terre". Afin de recueillir plus de corps, plus d'objet, plus de structure, il est nécessaire d'*oblitérer l'acquis*, de s'*installer dans la confusion* et d'engendrer d'abord cette effusion d'incohérence d'où jaillira ensuite par cristallisation et avec une force inouïe le vrai qui nous aurait été caché si nous nous étions contentés de céder au désir de savoir tout d'emblée. Je crois que les expériences singulières vécues par Tartaglia, Bolyai, Grassmann, Turing et Gödel illustrent ce propos. *Obscurité et confusion vivent dans la conscience du chercheur parce qu'il* *est cinglé d'énigmes.* On ne voit pas trop en définitive quelles sont les structures conscientes et inconscientes de l'esprit créateur qui expliquent la possibilité d'accès à une cohérence finale de la pensée, ou qui lui donnent une valeur pour la société et pour la civilisation. Vraisemblablement, ces expériences singulières sont *dominées* par des *liaisons* (des relations précises) entre les idéalités, mais je n'ignore pas combien il est difficile de voir clair dans la question du réalisme que soulève une telle explication. Le point important pour nous est de savoir que les thèses rationalistes qui ont été évoquées au début de l'exposé rendent compte de manière très satisfaisante de la domination *a posteriori* de la synthèse, de l'acte, et de l'effectuation, mais que les mathématiques en train de se faire, comme toute activité humaine en train de se faire, échappent à une analyse qui ne ferait pas intervenir l'inconscient comme emblème. Ce sont des processus non contrôlés par l'acquis qui animent l'inventivité polymorphique des mathématiques.

20.2. Prégnance des structures interrogatives. Ma tentation pour l'instant est de suggérer, en adéquation avec l'évocation de la pensée d'Abel, qu'il existe néanmoins une structure ou une "sémantique" interrogative universelle, laquelle institue des attentes insatisfaites, et que cette structure brise la frontière qui semble exister entre conscience et concept (contre l'épistémologie classique et l'option cavaillésienne). Je pense rejoindre aussi cette phrase très juste de Bernard Teissier : "Le mathématicien ne *comprend*" (conscience conceptuelle) "que lorsqu'il a réussi à expliquer la situation à son *primate*" (in-conscience primitive et infralinguistique, fonctionnement caché d'un cognitif singulier, idiosyncrasie du langage intérieur). Le besoin de compréhension secrète ses tensions, au niveau objectif comme au niveau subjectif. Enfin, j'espère que ces éléments contribueront à convaincre mon lecteur de l'existence d'une expérience très singulière de la conscience dans les mathématiques, dont l'exploration pourrait se révéler indéfiniment prometteuse, à travers peut-être les sciences cognitives, mais surtout à travers une analyse dynamique ou psychanalytique de la création et de l'action mathématique.

Remerciements. *Je remercie spécialement Bernard Teissier de m'avoir invité à exposer ces idées restées longtemps en friche, de m'avoir incité à les reprendre, à les réécrire, à les développer et à les exposer d'une manière plus rhétorique et plus vive. Je tiens à remercier aussi ici tous ceux qui m'ont permis de progresser, à l'occasion d'échanges directs, amicaux et pleins de connivence sur la philosophie des mathématiques – qui se sont déroulés plus ou moins régulièrement à l'ENS Ulm en 1996-97 et après – et tout particulièrement Charles Alunni, Bernard Besnier, Julien Bonhomme, Éric Brian, Pierre Caye, Olivier Druet et Jean-Jacques Szczeciniarz et surtout Gilles Châtelet, maître spirituel inestimable, regretté par tous, hélas prématurément disparu.*

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités, Mathématiques et d'Informatique, UMR 6632, 39 rue Joliot Curie, F-13453 Marseille Cedex 13, France. Fax: 00 33 (0)4 91 11 35 52

E-mail address: `merker@cmi.univ-mrs.fr`