

L'OBSCUR MATHÉMATIQUE OU L'OUVERT MATHÉMATIQUE

JOËL MERKER

ABSTRACT. **Dédicace.** Aujourd'hui¹, j'ai une pensée et un souvenir émus pour Gilles Châtelet. Notre amitié et nos échanges philosophiques étaient nés lors du colloque "Mathématique et Inconscient" (ENS Ulm, 13-15 Juin 1997), préfigurant il y a deux ans ce colloque à Cerisy, où son absence se fait, je crois, sensiblement sentir dans les débats enthousiastes qui ont lieu.

Un philosophe contemporain a prématurément disparu.

Car dans son silence, au début de ce mois de juin 1999, Gilles Châtelet arrêta secrètement la mort "non triviale" qui sommeillait dans ses abnégations corporelles ; après avoir vainement cherché à qui confier sa solitude, sans avoir eu le temps de dire adieu, sans ultimes rendez-vous, sans même avoir pu s'assurer de la pérennité de sa pensée, dans une hypothétique descendance. J'y vis tout de suite le stratagème nomadique du corps indisponible, sans secret pour ses pairs. C'était dans des circonstances graves. Et Gilles Châtelet était très sentimental.

Mais je vécus surtout, comme tant d'amis, la révolte égoïste de voir disparaître son âme incandescente. Car deux années seulement d'amitié pourraient rapidement conduire à diluer en moi ce trop peu de dons et de souvenirs, à les défalquer du temps essentiel, puis à les dérober à ma mémoire, par l'insouciance du devenir. Je n'ai pas eu le temps de mieux *connaître* Gilles Châtelet !

Alors, il ne me reste plus qu'un vœu à formuler : que sa mort n'anéantisse *jamais* cette proie offerte au *flair instinctif* que nous avons en commun : la certitude dans la valeur des volcans qui sommeillent et l'assurance en la hardiesse et en les crispations qui détonnent.

Et que la pensée de René Char, exprimée dans un contexte tragique de résistance², incite encore à la persévérance : "La symphonie qui nous portait s'est tue. Il faut croire à l'alternance. Tant de mystères n'ont pas été pénétrés ni détruits." À *une philosophie de combat de continuer à faire sienne l'âpre méditation de tout cet inconnu.*

*Une philosophie offensive doit se situer résolument aux
avant-postes de l'obscur, en ne considérant pas l'irra-
tionnel comme "diabolique" et réfractaire à l'ar-
ticularion, mais comme ce par quoi des
dimensions neuves peuvent advenir.
Gilles CHÂTELET³.*

¹Cerisy-la-Salle, Centre Culturel International, le 8 Septembre 1999.

²René Char, *Feuillets d'Hypnos*, 93, *Fureur et Mystère*, Gallimard, Paris, 1962.

À ma Renarde,
très fidèle épistolière

§1. INTRODUCTION GÉNÉRALE ET PRÉSENTATION

L'Obscur mathématique est le thème – allégorique, mystérieux et presque provocateur – de cette conférence⁴. Règne de la certitude et de la rationalité, comment les mathématiques pourraient-elles subir le siège de l'Obscur ? Comment pourraient-elles entretenir de l'irrationnel, poison de leur rigueur ? Où donc s'y établiraient des zones vagues et troubles, impropres à la réflexion ? Car hélas, l'Obscur, partout, est très insaisissable.

1.1. Penser l'irrationnel en acte. Mais ces interrogations, qui semblent trop aller de soi, ne sont que pure hypocrisie, parce que *toute la question est en fait de comprendre comment débusquer le non-rationnel qui se blottit dans les franges de la connaissance*. Et il est clair que seule une *méditation philosophique en situation* (sur l'Obscur, sur l'Ouvert et sur l'Inconnu mathématique) est habilitée à maintenir en haleine l'esprit de contemplation, l'esprit de quête et l'esprit de conquête. La situation, c'est l'*acte* mathématique.

1.2. L'héritage français de philosophie des mathématiques. Cette méditation sur les mathématiques s'inscrit dans une tradition de pensée "continentale", qui s'est illustrée dans les travaux de Alain Badiou, Jean Cavailles, Gilles Châtelet, Gilles Deleuze, Jean-Toussaint Desanti, Gilles Gaston Granger, Albert Lautman, Jean Petitot, Jean-Michel Salanskis, et d'autres. Le but est toujours de penser les germes de déploiement du sens, la surrection du vrai dans les mathématiques et l'intemporelle *présence obscure du problématique*. Ici, plus précisément, le but sera de penser l'Ouvert dans l'acte mathématique, c'est-à-dire de manière concrète et effective⁵. Au demeurant, par souci de neutraliser sa connotation dépréciative, L'Obscur sera compris constamment comme synonyme de l'Ouvert, entendu au sens allégorique. Nous exploiterons cette gémellité sémantique décidée.

1.3. Circulation objective de l'Ouvert. À un premier niveau (abstrait), des mystères rayonnent dans une histoire préliminaire, des problèmes apparaissent, se précisent, se reproduisent, s'amplifient, se résolvent, ou explosent. Tel est le génie spectral du théâtre de l'Obscur mathématique : kaléidoscope de questions offertes à l'impulsion conceptuelle. Il s'agit de la circulation, du flux et du reflux du mystère dans la matière objective des mathématiques, incarnés par la *production effective de questionnements techniques*, toujours en passe de provoquer l'éclatement métaphysique des paradigmes, à cause, par exemple, de l'analyse obsessionnelle

³ *Les enjeux du mobile*, Des Travaux, Seuil, Paris, 1993, p.22. Voir aussi "*La philosophie aux avant-postes de l'obscur*", Conférence au *Forum Européen de la Science et de la Technologie, Science, Philosophie et Histoire des Sciences en Europe*, Grand Amphithéâtre de la Sorbonne, 10 décembre 1994.

⁴ Communication au Colloque : **Le réel en mathématiques, Mathématiques et Psychanalyse**, organisé par Pierre Cartier et Nathalie Charraud au *Centre Culturel International de Cerisy-la-Salle*, Manche (50) du 3 au 10 Septembre 1999.

⁵ Mais les réflexions qui vont suivre ne seront pas re-situées, discutées et comparées ici à cette tradition, ce qui représenterait un long travail d'exégèse.

d'une question épineuse ; exemples : cinquième postulat de la géométrie plane, nombres imaginaires, groupe d'une équation algébrique, transcendance de π , cohérence de l'arithmétique.

1.4. L'Ouvert posé dans des univers axiomatiques. À un deuxième niveau (langagier), l'Ouvert, ce sont aussi les structures mathématiques et les systèmes d'axiomes qui sont à la base des théories, non seulement comme réservoir de formes symboliques et de contenus formels, mais surtout comme seuils d'ouverture à de vastes univers mathématiques. Ces univers préexistent, parce que l'acte de poser un système est toujours motivé par une réalité supérieure. Exemples : introduction abstraite des nombres complexes comme clôture algébrique du corps des nombres réels, métamorphose de la notion d'espace jugulée à l'inspiration physique, constitution d'une géométrie non commutative appliquée à la physique quantique, ou encore théorie grothendickienne des *topos*, comme synthèse de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique. En outre, plus la réalité est riche et complexe, plus il est important que se multiplient les yeux pour la regarder, ce qui revient à *disposer de plusieurs langages pour la cerner*.

1.5. Potentialité et expression. Ainsi, toute axiomatisation *pose* des existences, par un acte décidé visant à inscrire le potentiel dans un monde structuré par des virtualités d'expression, *mais ce potentiel n'est en rien inscriptible a priori dans un système langagier contextuel* : ce n'est qu'*a posteriori* que le potentiel actualisé peut être ressaisi dans un système formel. Certaines potentialités sont, il est vrai, purement syntaxiques, mais elles sont rares et souvent redevables elles aussi d'une métaphysique qui les dépasse. Mis à part en logique et en théorie de la démonstration, les virtualités sont combinatoires⁶, plutôt que purement syntaxiques. La rumination des hypothèses est nécessaire, et nul langage ne parviendra à circonscrire l'Obscur.

1.6. L'Ouvert intersubjectif. À un troisième niveau (intersubjectif, et corrélatif du premier niveau), des esprits mathématiciens vivent l'Ouvert, l'évolution historique de l'Ouvert, ainsi que ses cloturations locales. Exemple : il y a un *avant* et un *après* la démonstration finale de la conjecture de Fermat, lesquels sont très spécifiques pour les spécialistes du champ. Fréquentant les questions ouvertes qui circulent ou qui se déploient d'elles-mêmes, l'esprit chercheur, voire visionnaire, qui est parfois "cinglés d'énigmes", est aussi grevé d'obscur questions dont la réponse semble inaccessible pour des raisons techniques, ou pour des raisons plus profondes.

1.7. Thèse du réel de l'Ouvert. Nous sommes ici au coeur de la thèse principale de cet article : afin de dépasser le fade constat conventionnel de la présence immédiate de l'Ouvert, *il est nécessaire de conférer un statut de réalité indéniable et solide à ce qui demeure toujours disponible pour le questionnement*. Preuve en est que les mathématiciens *vivent* dans leurs questions ouvertes. Elles ont donc une réalité véritable. Le réel, en mathématiques, est primordialement un réel d'ouverture, qui dynamise l'esprit de recherche. *Plus encore, ce réel d'ouverture*

⁶Sur l'aspect combinatoire de l'invention mathématique, voir H. Poincaré, *L'avenir des mathématiques*, Atti del IV^e Congresso Internazionale dei matematici, Roma, Accademia dei Lincei, I. Publ. G. Castelnuovo, Roma 1909.

est la condition de possibilité de la recherche elle-même, comme pratique, comme échange, et aussi comme institution. L'esprit de certains mathématiciens est d'ailleurs souvent connoté d'une innocence immédiate et de quelque chose d'infantile, à cause de leur réceptivité et de leur concentration sur cette ouverture. Il faut entreprendre des lectures *in situ* de cette ouverture, des lectures dans les esprits et dans les textes de tous les germes d'ouverture. Car au-delà de cette analyse générale, le jaillissement des déterminations singulières possède des caractéristiques métaphysiques et pédagogiques inépuisables.

1.8. Les obscurités du travail inachevé. L'Obscur, ce sont aussi toutes les stratégies perdantes devant un grand problème, qui s'évanouissent et disparaissent lorsqu'une solution est apportée, mais aussi les travaux obscurs, incomplets, abandonnés, c'est Andrew Wiles, déçu par une lacune dans sa preuve de la conjecture de Fermat, se retirant ensuite plus d'un an dans son grenier (*sic*⁷) pour achever sa démonstration célèbre, ce sont les virtualités recevables, mais inachevées qui moisissent dans des tiroirs, c'est le non-publié ; exemples : innombrables manuscrits de Bourbaki, ou autres travaux abandonnés, thèmes sans lendemain.

1.9. Le Voir de l'Ouvert. Mais l'Ouvert partageable et conventionnel semble n'être rien, à cause d'un aveuglement sur l'objet, d'un aveuglement sur le donné, et d'un aveuglement sur la fermeture de l'acquis et du conquis. Ceci conduit à n'avoir qu'une vision restreinte de l'Ouvert, à cause d'un nombre de problèmes fréquentés trop faible, à cause d'une réceptivité insuffisante ou d'un refus de reconnaître et de formuler comme telle la réalité de l'Ouvert. Au contraire, j'affirme résolument qu'il existe un Voir de l'Ouvert, c'est-à-dire des *visions effectives de l'ouverture dans un champ technique donné, des appréhensions effectives, des compréhensions effectives de l'Ouvert*, dont l'expression dans le texte – et pas exclusivement dans les grands textes (Riemann, Poincaré, Hilbert, Gromov) – peut être exceptionnellement explicite. Il n'y a pas seulement une question de style, ou de présentation. *Il n'y a pas seulement d'herméneutique scientifique implicite ou passive.* Tout le problème est alors de savoir *comment* déchiffrer authentiquement cette ouverture, à la fois sur le plan informel (échanges oraux et pratiques scientifiques) et sur le plan formel (texte), ainsi que la circulation et la communication de l'Ouvert entre ces deux niveaux.

§2. DISCUSSION

2.1. Avertissement. L'Ouvert ne se définit pas en termes dogmatiques ou fixistes. En vérité, l'Ouvert est une *multiplicité d'ouverture* et le terme "L'Ouvert" au singulier et allégorisé, n'est qu'un pis-aller dénommatif. *Ce n'est ni un concept ni une réalité stable : ce n'est qu'une désignation de l'ouverture plurielle.* Toute connotation religieuse, exégétique, ou herméneutique est donc à écarter. Seul compte le rapport à la mobilité et à la disponibilité, impliqué par le choix de ce terme. De plus, l'Ouvert mathématique fait référence implicitement à une réalité pratique tangible qui est inscrite dans les champs de recherche mathématique et qui se décline suivant leur variété. Bref, l'arrière-plan spectral de ce discours, ce sont les pratiques

⁷D. Aczel, *L'énigme du théorème de Fermat*, Desclée de Brouwer, Paris, 1998.

mathématiques effectives. Il serait donc erroné de mettre en doute ce que désigne le syntagme nominal “L’Ouvert mathématique” en y décelant une connotation mystique.

2.2. Fausse interprétation de mysticisme. En effet, c’est d’abord la raison qui est à l’oeuvre dans tous les procédés de recherche mathématique. La pensée mystique quant à elle s’arrête souvent au sentiment, ou à des explications en termes d’énergie, elle exprime une séduction pour des voyages vers des sources d’origine ineffable. L’expérience mystique procure à l’âme un sentiment de jouissance, un sentiment de complétude et d’achèvement, elle est “saisie d’une réalité totale et comblante qui transcende la limite, la particularité, la clôture de l’individuation, et fait accéder, au moins pour un temps, à l’universalité et à la réconciliation de soi et du tout” (Louis Gardet). Rien de tout cela dans la méditation *philosophique* sur l’Ouvert mathématique, car le but est de questionner et de penser, l’objectif est argumentatif, l’objectif est spéculatif. Ceux qui objecteraient la tentation d’irrationalité du propos n’ignorent pourtant pas l’importance de l’action, de la tension, et de la motricité des concepts scientifiques dans les problématiques contextuelles, ainsi que leurs origines métaphysiques obscures.

2.3. Appréhension dynamique. Si c’est seulement dans l’appréhension *humaine* que peut résider l’illumination inventive, et non dans la matière objective, il n’en reste pas moins qu’on ne peut refuser d’analyser *dans leur apparition motrice* les idées ou les perspectives géniales qui débloquent des problèmes difficiles. Car s’il est possible de conceptualiser ce qui est de la pensée en acte, on doit forcément pouvoir conceptualiser aussi ce qui n’est que de la *pensée en gestation, en mettant en lumière les aspects dynamiques provisoires du réel dans le jeu spéculaire entre le sujet qui l’invente et l’objet qui le structure*. Ainsi, la représentation conventionnelle de l’acte rationnel néglige une réalité essentielle : la circulation à double sens qui va de l’objet au sujet, le sujet étant le seul des deux termes qui soit *apte à insuffler de l’inconscient et du conscient dynamique dans l’objet*.

2.4. Conserver la trace du mouvement. La métaphore informatique aidera à mieux saisir cette perspective, par analogie. Dans le monde du virtuel cybernétique, qui va du multimédia à la pratique de l’écriture sur ordinateur, en passant par l’Internet, c’est la puissance combinatoire du calcul et de la mémoire informatique qui permet l’enregistrement constant des données, par exemple : sauvegarde sur traitement de texte, pages Web conservées en mémoire dans des répertoires “cache”, “cookies”, *etc.* Cet enregistrement s’assimile ainsi à une *conservation immédiate de la trace du mouvement du langage et de la pensée*. Et pour cette conservation, une mémoire colossale est nécessaire. Le philosophe peut donc maintenant focaliser son regard sur l’importance de la trace du virtuel et lui conférer une réalité plus visible et plus solide pour l’appréhender comme un réel. L’informatique offre ainsi les prémisses séduisantes d’une synopsis langagière et visuelle du mouvement. Par analogie, l’appréhension des réels d’ouverture naît d’une inspiration homologue, qui est rendue possible par ce contexte technologique historique.

2.5. Un texte de colloque. Ce texte à caractère philosophique se situe délibérément dans la perspective du colloque : étude du réel et du sujet mathématique.

On trouvera des éléments complémentaires, plus proches du souci psychanalytique, dans un texte antérieur : *La satisfaction mathématique*⁸.

§3. CHOISIR UN STYLE DE DISCOURS SUR L'OUVERT

3.1. Métaphores lumineuses. Alors que la lumière et l'obscurité naturelles pénètrent les espaces terrestres avec l'aisance du rayonnement physique et de son absorption, lumières et obscurité de l'esprit tirent leur impulsion d'énergies laborieuses et ingrates. Pour caractériser la luminescence, voir l'incandescence des idées, c'est-à-dire leur capacité de rayonnement, de réflexion et de diffraction, l'allégorie lumineuse est peu représentée dans la langue. Tout au plus parle-t-on des "lumières", d'une présentation ou d'un exposé lumineux, à travers quelques expressions typiques. C'est la clarté qui supplante la lumière dans les acceptions abstraites appartenant au lexique de l'intellect. Ainsi, la lumière, toute puissante dans les champs sémantiques concrets, est en retrait dans le champ lexical de la pensée, et elle exigerait, pour s'imposer, une nouvelle perspective sur les efforts de l'énergie d'invention. Au contraire, même s'il est globalement péjoratif, le registre métaphorique de l'Obscur doit sa richesse à une présence abstraite, et indélébile, de l'Inconnu dans le connu. Persistance de zones d'ombres. . .

3.2. Limites du discours didactique. Pour en discourir, il faut envisager d'abord la congédiation de toute approche qui ne désigne pas comme intrinsèquement problématique le type de discours qu'il est possible de tenir sur l'Inconnu, en mathématiques. *Domination universelle de la problématicité* ! Ensuite, il faut être comme "les philosophes d'origine, dont l'existence, l'inspiration, la vue, l'arête et l'expression ne supportent que peu de temps l'intérieur cloisonné de la pensée didactique"⁹. Il faut être – au moins en partie et à certaines heures, c'est sûr ! – mu par un *rejet instinctif du plat discours didactique*, car les arguments contre foisonnent, dans la zone obscure des inversions et des réversions topologiques du réel, que seul un discernement audacieux sait capter. Et ce rejet est motivé par une *croissance en la valeur du style spéculatif*, qui, malheureusement, disparaît peu à peu étouffé par le style didactique et par l'uniformité du discours véhiculé dans les articles contemporains. Le style spéculatif, c'est la philosophie, c'est Descartes, c'est Kant, c'est Hegel, c'est Heidegger. Enfin, la langue qu'il faut inventer pour parler de l'Obscur est peut-être avant tout homologue à celle du poème.

3.3. Proximité de la parole poétique. Par proximité, présence en filigrane, inspiration sporadique et étonnement fulgurant, le grand verbe poétique est en fait immanent à ce discours, qui en est une variation, un avatar. De Héraclite, à René Char, en passant par Charles Baudelaire, c'est un même discours âpre et tacite qui roule par le monde et qui se bat avec le mystère. Car seule la parole poétique peut transmettre authentiquement l'attrait irrésistible de l'Obscur et de

⁸Communication au Colloque : **Mathématiques et Inconscient**, organisé par Nathalie Charraud, Marie-Françoise Coste-Roy et Bernard Teissier. Paris, *École Normale Supérieure*, 13-15 Juin 1997. Version pdf sur la toile : protis.univ-mrs/~merker/index.html

⁹René Char, *Recherche de la base et du sommet, III Grands astreignants ou la conversation souveraine*, La barque à la proue altérée, *Oeuvres complètes*, Gallimard, La Pléiade, Paris, 1983, p.719.

l'Incertain, et le désir de trouver du nouveau¹⁰, les autres paroles ne s'y risquant pas, par peur du défi, peut-être. Ce n'est donc pas un hasard si Grothendieck, dans *Récoltes et Semailles*, lorsqu'il analyse ses propres travaux, excelle en métaphores et en lyrisme spontané. Dans les écrits de Gilles Châtelet – même dans ses écrits philosophiques – le travail de composition d'expressions percutantes témoigne aussi de l'importance de la lettre. En vérité, la méditation que j'entreprends et toute ma pensée portent le sceau d'une prédilection pour les textes poétiques. Comme le dit une expression d'Alain Badiou, il faut *suturer* la langue épistémologique à la langue du poème. Geste qui s'illustre nettement dans ses livres et dans ceux de Bachelard. D'où la nécessité de s'inspirer du verbe poétique, d'inviter la poésie, comme démarche stylistique, dans l'expression de la pensée spéculative, lorsqu'il s'agit de l'Ouvert. Tous ceux qui parlent des mathématiques avec une inspiration de "philosophes de l'origine", mais sans égard pour la parole poétique, ignorent et perdent un aspect essentiel de la quête. C'est un peu comme si on ignorait dans une recherche mathématique que tout ce que l'on cherche a déjà été médité et publié dans l'ex-union soviétique vingt ans plus tôt, et qu'après l'avoir découvert, on se refuse encore à admettre cette existence de travaux antérieurs.

§4. THÈSES SUR L'OUVERT ET SUR LE PRINCIPE DE NON-SAVOIR

4.1. Existence. La première de ces thèses est un axiome d'existence : *L'Ouvert dans la pensée existe au même titre que le mouvement dans les réalités matérielles.* Autrement dit, l'Ouvert, qui existe, est un "impensable" de type réflexif, et il continue à être aussi mystérieux *pour la pensée* que le mouvement. De plus, l'Ouvert s'articule fondamentalement à un *principe de non-savoir décidé dans la pensée.*

4.2. Principe de non-savoir. En résumé, ce principe de non-savoir énonce qu'il y a du non-savoir pur. Il énonce aussi que l'on sait qu'il y a du non-savoir. De plus, il se trouve que ce principe est "le" principe même de "suspension du savoir", que la méditation philosophique rigoureuse prend pour guide dans sa progression, en tant qu'elle ressasse indéfiniment le message socratique, d'après lequel : "je sais [surtout] que je ne sais pas". Ce sera donc ce philosophème dû à Socrate que l'on prendra pour formulation du principe de non-savoir, à condition bien sûr de l'entendre aussi au sens impersonnel : "le savoir sait [surtout] qu'il ne sait pas", ou, de manière équivalente, "le savoir sait ne pas savoir". Ainsi s'éclaire la conscience abstraite que possède le savoir mathématique, de l'incessant et de l'irréversible décalage entre des hypothèses provisoires et des résultats idéalement définitifs.

4.3. Maintien de la mobilité. Thèse générale : *Le principe de non-savoir concerne la pensée dans son intégralité ; il s'exerce donc évidemment dans la philosophie et aussi dans les sciences, où il est actif, structurant et producteur à terme de connaissance concrète.* Le principe de non-savoir est une condition *sine qua non* de la mobilité de l'interrogation mathématique. C'est bien parce qu'elles pensent que tout a une raison, conformément au *principe de raison* leibnizien, que

¹⁰Charles **Baudelaire** : "Plonger au fond du gouffre, Enfer ou Ciel, qu'importe ?// Au fond de l'Inconnu pour trouver du nouveau !", *Horreur sympathique* LXXXII, p.77. Et encore : "Insa-tiablement avide // de l'obscur et de l'incertain", *Le Voyage*, CXXVI, p.134. *Les Fleurs du mal*, Gallimard, La Pléiade, Paris, 1975.

les mathématiques puisent de l'énergie conceptuelle effective dans le non-savoir. Pour défendre cette thèse, tout l'enjeu est alors de décrire *comment* le non-savoir mathématique exerce une action sur le savoir mathématique, et d'estimer aussi l'intensité de cette action.

4.4. Suspension et volonté. L'Ouvert vit en suspens, demeure toujours *a priori*, c'est-à-dire en attente perpétuelle. Il est retenu aussi par des mises en abyme dans sa propre histoire. Il est posé virtuellement. Et l'esprit est toujours à l'affût d'une intuition disruptive qu'il ne traduira pas d'abord dans le langage. En outre, l'Ouvert, en attente, s'articule à une *volonté réalisante*, mouvement de l'esprit qui contribue à l'actualisation du potentiel. Si l'entreprise ne s'était pas révélée *a posteriori* absurde, on aurait dû songer à dresser un "plan cadastral" des psychologies de chercheurs pour localiser les endroits et déterminer les moments où germent *les idées qui ne sont que des questions provisoires*.

4.5. Indices d'ouverture. Tout le problème est alors d'attester et d'analyser "ce qui fait signe", comme l'écrit Alain Badiou¹¹ : ce qui fait signe pour l'Obscur dans le Clair, ce qui fait signe pour l'impersonnel dans le personnel, ce qui fait signe pour le virtuel dans l'actuel, pour le départ dans le retour, pour le nomadisme des concepts dans le dogmatisme des concepts, ce qui fait signe, ce qui le peut et ce qui le doit, *tout le problème est d'attester ce qui fait signe pour l'Ouvert dans le Clos*.

4.6. Comment l'Ouvert est ouvert. Mais comment ? Étant en acte, comment le Clos peut-il instaurer une communauté hétérogène de singularités *qui font signe* ? Ainsi, *par la seule question du comment*, toute l'évidence de la méditation de l'Ouvert semble s'annuler d'un seul coup. Car il faudrait que l'être de l'Ouvert se trouvât distribué en catégories susceptibles de rendre compte au moins partiellement de ce qui fait que l'Ouvert s'ouvre, est ouverture, est protension créatrice, est constructivité, il faudrait des catégories qui thématisent et qui expliquent l'accrétion du vrai en gestation au vrai en acte dans les mathématiques, qui éclairent de conceptualisations adéquates ce qui fait que la pensée s'oriente dans la non-orientation et se contemple avec confiance comme productrice de rationalité. La question cruciale n'est donc pas de savoir pourquoi il y a de l'Ouvert, voire de savoir comment l'Ouvert est possible, ou s'il est pérenne. C'est un postulat. Non, l'enjeu brûlant, le vrai travail, c'est de décrire *comment* l'Ouvert est ouvert. Et ceci constitue un vaste programme de recherche.

4.7. Insuffisance des épistémologies classiques du concept. Les mathématiques ne sont donc pas seulement une histoire imprévisible, qui ne serait interprétable que dans l'*a posteriori* événementiel de son déroulement. La position de Jean Cavailles, pour qui "Ce qui est après est plus que ce qui était avant, non pas parce qu'il le contient ou même qu'il le prolonge mais parce qu'il en sort nécessairement et porte dans son contenu la marque de sa supériorité ; il y a en lui plus de conscience – et ce n'est pas la même conscience¹²" ; cette position est insuffisante : elle conduit à éclipser à terme l'existence de la *conscience prospective*, plus, à la comparer directement à une *conscience cristallisée*, et elle conduit aussi à regarder l'achevé comme l'inachevé seulement à travers le prisme de la conscience rétrospective. C'est une

¹¹ *De la Vie comme Nom de l'Être*, manuscrit, 1996.

position d'historien, non d'acteur. Cavaillès passe à côté d'un réel essentiel. En privilégiant trop l'interprétation *a posteriori* des contenus, le philosophe passe en effet à côté de réalités profondes : l'existence *et la permanence* d'intentions liminaires et de virtualités attendues, toute la structure en attente des mathématiques conçues comme projet d'étude d'objets qui résistent. *Et cet aspect s'exprime aussi explicitement dans les textes.* Albert Lautman, à travers sa théorie des Idées dialectiques productrices de réalité mathématique, semble avoir mieux défendu cette idée. Ce n'est d'ailleurs pas un hasard si le mathématicien Élie Cartan, en 1939, a saisi plus profondément l'intervention de Lautman que celle de Cavaillès¹³.

4.8. Formulation de la thèse principale. Thèse sur le réel mathématique :

Thèse principale. *L'Ouvert mathématique forge une réalité d'un type supérieur, simultanément objective et subjective, évidente, partageable et réellement présente. Ainsi, ce réel d'ouverture est attestable intersubjectivement comme partage de problèmes ouverts entre spécialistes d'un champ. Ce réel multiplie les occasions de se manifester à la manière d'une algèbre spontanée de questions et d'un clinamen¹⁴ des hypothèses.*

4.9. Commentaire. Cette thèse *décalque immédiatement sur les concepts une nouvelle saisie universelle de leur problématique.* La thèse dit que nous sommes noyés d'ouverture. La thèse dit que les questions mathématiques sont aussi présentes que les théories mathématiques ; et seule la mauvaise foi réaliste nous persuade que l'Ouvert ne tient au Clos que par un "fil ténu"¹⁵. Non, l'Ouvert s'ouvre du Clos vers l'Ouvert par une fenêtre d'une dimension hyperbolique. Mais cette fenêtre s'offre difficilement au regard, car un exercice soutenu du regard et une attention obsessionnelle de l'esprit sont requises. La thèse dit que les concepts mathématiques sont inséparables des questions ouvertes, même dans les théories les plus achevées. Bien conduite, cette thèse pourra contribuer aussi à déstabiliser définitivement l'empire du langage, ses jeux, ses rituels, et à mettre en joue l'effarouchement absurde du positivisme logique devant l'Ouvert (contre Carnap, contre Wittgenstein). Cette thèse montre enfin comment les concepts se forment parfois à partir d'expériences immatérielles, ou "métaphysiques", où la question pure domine sans l'aide de certitudes matérielles préparatoires (philosophie de Hilbert). En conclusion, l'Ouvert par sa présence ubiquitaire instaure la seule pratique non discursive, non matérielle et non gestuelle qui soit et *suscite des expériences de pensée ar-*

¹²*Sur la logique et la théorie de la science*, Oeuvres philosophiques complètes de philosophie des sciences, Hermann, Paris, 1994, p.560.

¹³*La pensée mathématique*, Communications de Jean Cavaillès et d'Albert Lautman à la Société française de Philosophie, 4 Février 1939.

¹⁴Dans la théorie physique d'Épicure, le *clinamen*, mouvement de déviation des atomes sans cause externe, est un principe physique de *liberté* analogue au mouvement volontaire et placée à l'origine des choses *pour expliquer la liberté humaine*. Inscrit au coeur du procès d'auto-approfondissement, et essentiel aux déplacements conceptuels et spéculatifs, le clinamen des hypothèses mathématiques rayonne dans le travail mathématique à tous les niveaux : c'est seulement en changeant volontairement et stratégiquement la direction des hypothèses que la réalité mathématique peut se métamorphoser dans le travail de la pensée. Exemple : l'inversion des intégrales elliptiques dans la théorie d'Abel, ou la force des *problèmes inverses* en mathématiques.

*ticulées bien avant tout saisie conceptualisante*¹⁶.

4.10. Le sujet idéalement réceptif à l'Ouvert. C'est avec sincérité que Grothendieck, dans son testament mathématique¹⁷, analyse ses propres créations et sa puissance d'invention en termes de "propension naturelle" à élaborer les "bonnes notions" et les concepts "visiblement cruciaux". "Écrire sous la dictée", suivre la pulsion qui pousse à "voir des *questions* visiblement cruciales que personne n'avait vues", tel est son réel. D'innombrables questions et points de vue féconds "*naissent* spontanément, avec la force de l'évidence ; à la même façon qu'une lumière (même diffuse) qui surgit dans la nuit noire, semble faire naître du néant ces contours plus ou moins flous ou nets qu'elle nous révèle soudain". Elles sont soumises à la *dynamique de l'Ouvert*, ces "notions tellement naturelles que personne n'avait songé à les dégager", parce que cela était impossible "*aussi longtemps que les questions qui les ont suscitées, et les notions qui permettent de les formuler n'étaient pas apparues encore*". L'Ouvert, c'est la suscitation et le jaillissement des questions, c'est la constructivité des questions, c'est leur réalisation. Ainsi, les auto-analyses de Grothendieck fournissent donc un exemple paradigmatique de sujet "idéalement réceptif à l'Ouvert", *mais cette réceptivité idéale a pour corrélat objectif et intersubjectif une réceptivité idéale de la matière spéculative à l'Ouvert*. Notre parcours spéculatif s'accomplit : *c'est la génialité, la solidité et la stratification de l'Ouvert objectif qui dispensent de le faire reposer sur une bien contestable théorie du génie*.

§5. FIGURES ALLÉGORIQUES DE L'OBSCUR, DU NON-VOILEMENT ET DE LA VÉRITÉ

5.1. Métaphores terrestres. Comment alors se représenter allégoriquement la progression de la connaissance, scientifique et encyclopédique ? *Il y a là un réel besoin de récit et d'images en réseau*. Obscurité dynamique et motrice, pénétration dans l'ombre, éclaircissement progressif de places obscures, *telle est l'arcane*, affirme Diderot : "Je me représente la vaste enceinte des sciences comme un grand terrain parsemé de places obscures et de places éclairées¹⁸." Cette comparaison spatiale est riche en intuitions quant à l'exploration scientifique : il y a là un air de

¹⁵"Le tout réel pourrait bien être une continuité indivisible. *Le tout n'est jamais un ensemble clos*, mais au contraire ce par quoi l'ensemble n'est jamais absolument clos, jamais complètement à l'abri, ce qui le maintient ouvert quelque part, comme un fil ténu qui le rattache au reste de l'univers." Gilles Deleuze, *L'image-mouvement*, Minuit, Paris, 1983, p.20. Cf. Alain Badiou, *ibidem*.

¹⁶En ceci, je vise une homologie de pensée avec la maxime de Gilles Châtelet : "Les stratagèmes allusifs induisent une discipline de gestes et suscitent des expériences de pensée articulées bien avant toute saisie formalisante". En vérité, j'ai pour objectif implicite d'effacer un peu la prééminence du geste et de l'opérativité au profit de la question pure : c'est une perspective hilbertienne. L'ouverture de la question n'est qu'accidentellement ressaisissable dans l'acte. L'acte est l'un des accidents de l'ouverture.

¹⁷*Récoltes et Semailles, Prélude en quatre mouvements, Promenade à travers une oeuvre – ou l'Enfant et la Mère*, 65 p. dactylographiées. Des éléments biographiques et historiques concernant la vie privée de Grothendieck (*Récoltes et Semailles* en contient peu), sont donnés par Pierre Cartier, *La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich, Évolution des notions d'Espace et de Symétrie*, Festschrift for the 40th anniversary of the IHÉS, Publications de l'IHÉS, Bures-sur-Yvettes, 1998.

famille avec les métaphores de Grothendieck bâtisseur de maisons. Diderot poursuit : “Nos travaux doivent avoir pour but, ou d’étendre les limites des places éclairées, ou de multiplier sur le terrain les centres de lumière. L’un appartient au génie qui crée ; l’autre à la sagacité qui perfectionne.” Au-delà de cette vision et pour la renforcer, c’est à un cortège de métaphores concrètes, topographiques, terrestres, astronomiques, géologiques, c’est à une allégorisation de la vision, c’est à l’hallucination du spéléologue¹⁹, c’est à une sonde glissée dans l’espace fractal de la géographie terrestre, de prolonger et d’enrichir ces intuitions dans l’imaginaire.

5.2. Nécessité des allégories de la connaissance. L’allégorie la plus courte possède un double sens absolu, elle est *transitive* : le sens figuré y est énoncé en dehors du sens propre, et *hétéro-télique* : le sens propre ne vaut pas pour lui-même, mais pour le sens figuré²⁰. Contrairement à la métaphore scientifique selon Gilles Châtelet, qui est habilitée à exhiber des agencements et des pratiques qui secrètent de la naturalité et de l’évidence (*stratagèmes allusifs, métaphores-orchestre*, figures sensibles vues comme des diagrammes, *dispositifs d’extraction de gestes*), l’allégorie n’a d’autre visée que la représentation poétique et la suggestion plastique d’un mystère ou d’une théorie philosophique. Ceci en fait la faiblesse, du point de vue de l’effectivité, lorsqu’on la compare à la métaphore scientifique, mais aussi la force : il y a un réel besoin de puiser des représentations visuelles dans le monde sensible, d’établir des analogies, et d’exciter les résonances et les homologues sourdes entre l’abstraction et le monde sensible. Deux allégories sont présentées : l’allégorie de la caverne de Platon, et l’allégorie du bâtiment mathématique, de Grothendieck.

5.3. L’allégorie de la caverne. Il faut avant tout interpréter ici l’allégorie comme une décision philosophique volontaire, et non arbitraire, de faire droit à *l’exigence de vivification des idées*. L’allégorie philosophique est une invention, un récit, un stratagème didactique qui ne se réduit en rien à un “illustratif subsidiaire”. Et Platon, en écartant l’influence des mythes ancestraux, leur substitue des allégories à visée formatrice, pédagogique et éducatrice ; par exemple – la plus célèbre d’entre elles et qui nous intéresse – l’allégorie de la caverne. Celle-ci met en scène comme un mystère de la connaissance, une *réminiscence de l’ombre et du non-dévoilé* qui ne s’expliquent bien que par l’allégorie, parce que l’allégorie met en scène le *mouvement de décèlement de l’Idée* : le regard des prisonniers ne s’accoutume que progressivement à la lumière, après leur libération, car ils sont tout d’abord éblouis par l’éclat du soleil et incapables de voir le réel, puis ils découvrent, dans leur parcours vers la lumière, des simulacres qui projetaient des ombres sur la paroi de la caverne, et enfin, montent vers l’Idée du Bien, montent vers l’absolu ; bref, *l’accession se fait par étapes*, ce qui confirme l’existence fondamentale du *mouvement d’assomption de la connaissance vers le vrai*.

5.4. Théorie de la vérité et du non-voilement. En amont d’une théorie des Idées, l’allégorie de la caverne présente donc une dialectique de la présence éloignée

¹⁸ *Pensées sur l’interprétation de la nature* (Opuscule de 1754), §14.

¹⁹ C’est un témoignage connu : des phénomènes hallucinatoires marquants, consistant en visions prolongées de réalité terrestre, surgissent lors d’un séjour prolongé (au moins 72 heures) dans l’obscurité des gouffres, comme si le besoin visuel était mis en mémoire dans le cerveau.

²⁰ Cf. article “Allégorie”, *Encyclopédie philosophique universelle, Les notions philosophiques*, Paris, Presses Universitaires de France, 1990.

au regard, ou une dialectique de la visibilité de l'ombre, bien plus qu'une dialectique de la genèse des essences. Les analyses de Heidegger²¹ affirment que l'*essence originelle* de la vérité réside dans le *non-voilement* (*ἀλήθεια*, dont l'étymologie stricte est "non-latent", puisque *lateo* = *λανθάνω*), qui apparaît comme le trait fondamental de l'étant lui-même dans la pensée grecque. *Ce qui demeure essentiel pour le non-voilé, c'est que le non-voilé surmonte constamment un voilement du voilé.* Il y a une victoire de tous les instants sur l'absence de formation, une victoire de tous les instants de l'éclaircissement sur l'obscur. *Le non-voilé doit être arraché constamment à son occultation.* En vérité, c'est le *mouvement vers le vrai*, et non l'Idée, qui occupe la place essentielle. Les vérités mathématiques seraient comme des fruits mûrs concentrant tous les germes de mouvements qui les ont rendues possibles. Une telle image départagerait équitablement réalisme et constructivisme. Dans cette alternative, on serait presque tenté, pour montrer combien la synthèse du réel mathématique est empreinte d'une dynamique indélébile, de risquer, pour l'expliquer, l'oxymoron de "*constructivisme platonicien*".

§6. INDÉCISION DE LA POSITION D'HYPOTHÈSES ET CONSTRUCTION DU VRAI

6.1. Grothendieck bâtisseur de maisons. Autre registre allégorique, complètement différent : la maçonnerie et le bâtiment. Il ne s'agit plus de la mathématique comme organisme ou comme protention, mais de la mathématique comme architecture et comme construction. Il s'agit de la mathématique comme *action*, celle de l'ouvrier et celle du maçon, dont les mains travaillent au contact du béton. Comme pour se dédouaner de son inventivité abstraite, Grothendieck esquisse à grands traits deux portraits : celui du "mathématicien casanier" "qui se contente d'entretenir et d'embellir un héritage", et celui du "bâtisseur-pionnier", "qui ne peut s'empêcher de franchir sans cesse ces "cercles invisibles et impérieux" qui délimitent un Univers". Quand les premiers s'affairent, c'est pour "réparer un meuble bancal, crépir une façade, affûter un outil, voire même parfois, pour les plus entrepreneurs, fabriquer à l'atelier, de toutes pièces, un meuble nouveau." Faisons abstraction ici du ressentiment, du jugement et de l'amertume de Grothendieck, qui poursuit sur un plan très personnel son allégorie. Citons un passage de ce texte beaucoup moins célèbre que le texte de Platon *in extenso* : "Je me sens faire partie, quant à moi, de la lignée des mathématiciens dont la joie spontanée est de construire sans cesse des maisons nouvelles. Chemin faisant, ils ne peuvent s'empêcher d'inventer aussi et de façonner au fur et à mesure tous les outils, ustensiles, meubles et instruments requis, tant pour construire la maison depuis les fondations jusqu'à la faite, que pour pourvoir en abondance les futures cuisines et les futurs ateliers, et installer la maison pour y vivre et y être à l'aise. Pourtant, une fois tout posé jusqu'au dernier chèneau et au dernier tabouret, c'est rare que l'ouvrier s'attarde longuement dans ces lieux, où chaque pierre et chaque chevron porte la trace de la main qui l'a travaillé et posé. Sa place n'est pas dans la quiétude des univers tout faits, si accueillants et si harmonieux soient-ils – qu'ils aient été agencés par ses propres mains, ou par celles de ses devanciers. D'autres tâches déjà l'appellent sur de nouveaux chantiers, sous la poussée impérieuse de besoins qu'il est peut-être

²¹ Platon *Lehre von der Wahrheit*, A Francke A. G., Berne, 1947. Trad. André Préau, *Questions I et II*, Gallimard, *Collection Tel*, Paris, 1990.

le seul à sentir clairement, ou (plus souvent encore) en devançant des besoins qu'il est le seul à pressentir²²."

6.2. Schéma de l'indécision de la position d'hypothèses. Quittons ce registre, qui ne ménage guère de place à l'obscur²³, pour étudier rapidement le dispositif qui étaye conceptuellement la théorie du dévoilement mathématique, dispositif que je nommerai *schéma abstrait de l'indécision de la position d'hypothèses*. À un premier niveau, ce schéma présente les énoncés mathématiques en les articulant à un faisceau de problèmes dans lesquels ils s'insèrent. Tout théorème incorpore des hypothèses imbriquées les unes dans les autres, et une ou plusieurs conclusions. *Les hypothèses demeurent indécises, c'est-à-dire en question et en suspension pour un remplacement possible, tant qu'elles peuvent être déplacées pour obtenir le même résultat.* Existe ainsi une dynamique de déplacement d'hypothèses en vue de trouver des énoncés optimaux : c'est une manifestation *in situ* de l'Ouvert mathématique technique. À un deuxième niveau, réciproque du premier et qui lui est supérieur, ce sont les conclusions qui sont affectées de mobilité. L'indécision se manifeste alors en tant que les hypothèses doivent être choisies pour fournir une étude adéquate d'objets qui résistent par leur richesse et par leur profondeur. À ce niveau, les hypothèses se confondent avec le choix et l'invention des concepts, *et l'indécision du choix demeure omniprésente dans l'étude actuelle des objets constitués.* Enfin, à un troisième niveau, il s'agit de l'*indécision de la position d'axiomes*. Exemple historiquement célèbre et canonique : le problème du continu. Il s'agit de la question du choix (ou du non-choix) de l'*axiome de détermination complète* des cardinaux, après que Kurt Gödel (1947)²⁴ et Paul Cohen (1963) ont démontré qu'il ne découlait pas des axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Mais dans la perspective dite platonicienne de Gödel, *le problème crucial est celui de la vérité* (et non du statut d'Idées préexistantes) ; autrement dit, la question centrale est de savoir quel choix pourrait être *le vrai choix*. Il est bien connu que l'analyse de ce problème ne s'est pas révélée très féconde, et qu'aucune incidence potentielle sur le fonctionnement des mathématiques et de la logique ne s'est signalée depuis, de sorte que la question de ce choix demeure pour l'instant une question privée de motivation supérieure. Mais ce problème a eu au moins le mérite de mettre en lumière l'importance d'"appels répétés à l'intuition mathématique pour obtenir des réponses non ambiguës aux questions de la théorie des ensembles", c'est-à-dire l'importance des *décisions (choix d'axiomes) au regard de l'indécidable (questions pures)*²⁵.

6.3. Dynamique de l'éclaircissement. En définitive, *l'allégorie de l'Obscur ne*

²² *Récoltes et Semailles, Prélude en quatre mouvements, Promenade à travers une oeuvre – ou l'enfant et la mère*, pp.12–13.

²³ Tout est clair pour Grothendieck (!) : "Si j'ai excellé dans l'art du mathématicien, c'est moins par l'habileté et la persévérance à résoudre des problèmes légués par mes devanciers, que par cette propension naturelle en moi qui me pousse à voir des *questions* visiblement cruciales, que personne n'avait vues, ou à dégager les "*bonnes notions*" qui manquaient" (p.15).

²⁴ K. Gödel, *What is Cantor's continuum problem ?*, American Mathematical monthly, **54** (1947), 515–525.

²⁵ Cf. Alain Badiou, *Théorie des ensembles et théorie des Topos sous l'oeil du philosophe*, dans *L'objectivité mathématique, Platonisme et structures formelles*, sous la direction de M. Panza et J.-M. Salankis, Masson, Paris, 1995.

visé qu'à illustrer visuellement la présence de germes d'ouverture qui circulent dans les mathématiques à tous les niveaux et qui se reproduisent et essaient, ou se retirent dans l'opérativité, voire se tarissent, le tout sur le plan historique. De plus, cette allégorie ne se cantonne pas à l'illustration, elle est étayée par un dispositif de *fluidification des questions techniques* et elle vise à l'exigence de ressaisir les champs de problématiques, de diagrammatiques et d'incarnations linguistiques, qui sont au coeur des théories. Enfin, la dialectique de l'incertitude, qui est au coeur des pratiques heuristiques, possède de véritables *structures de provocation à la question*, lesquelles, même si rien ne peut jamais les fixer dogmatiquement, même si elles menacent de se renouveler et de s'enrichir sans cesse, possèdent néanmoins une force de reproduction et de réactivation, qui sont déjà suffisantes à la promulgation des lois d'une *mathématique indéfinie*. Ces éléments généraux doivent s'accompagner d'une étude des aspects spéculatifs particuliers de l'Ouvert mathématique, étude rivée au mystère du *mouvement* de la pensée mathématique, que l'on pourrait mener à bien en examinant des mémoires et articles mathématiques.

§7. CONCLUSION

Les thèses centrales ont été formulées au cours de la réflexion. Celle-ci ouvre des voies vers une nouvelle philosophie du mouvement et du questionnement, vers une nouvelle appréhension de la *pensée mathématique en tant que recherche*. Ce type d'approche exige comme approfondissement une étude située de la pensée en filigrane, mais omniprésente, et omni-puissante, qui ne peut s'empêcher d'émerger et de s'exprimer dans les textes et dans les pratiques mathématiques effectives²⁶. Une telle certitude dans la thématique de l'Ouvert mathématique technique s'accompagne ici d'une pensée qui vise à conférer un statut de réalité solide, à la fois objective et subjective, à l'ouverture mathématique, ce qui nécessite un recours constant à l'allégorie comme représentation forte de la pensée mathématique pour le monde philosophique. On a souligné aussi les aspects mobiles et duplicatifs de l'Ouvert. Enfin, de nombreux aspects strictement spéculatifs n'ont pas été abordés dans ce travail, par exemple : la position de l'Ouvert par rapport au platonisme ou les articulations de l'Ouvert aux mathématiques *spécifiques, etc.* Le champ de la réflexion est donc largement "ouvert"...

Remerciements. *Je tiens à remercier les organisateurs de ce colloque, Nathalie Charraud et Pierre Cartier, de m'avoir invité à exposer ces idées et à participer aux discussions informelles, qui furent d'une vivacité et d'une vigueur mémorables.*

LABORATOIRE D'ANALYSE, TOPOLOGIE ET PROBABILITÉS, CENTRE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE, UMR 6632, 39 RUE JOLIOT CURIE, F-13453 MARSEILLE CEDEX 13, FRANCE.
FAX: 00 33 (0)4 91 11 35 52

E-mail address: merker@cmi.univ-mrs.fr

²⁶Par manque de place, je n'ai pas abordé dans ce texte la lecture et le commentaire de la thèse inaugurale de Riemann et de sa thèse d'habilitation, la lecture de mémoires de Poincaré, notamment *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, la lecture de la conférence de Hilbert au Congrès International des mathématiciens de 1900, *Sur les 23 problèmes*, ou encore la lecture Gromov, *Partial differential relations, etc.*