Enveloppe d'holomorphie locale des variétés CR et élimination des singularités pour les fonctions CR intégrables

Projet de note, par **Joël MERKER*** et **Egmont PORTEN****.

(*) LATP, CMI, 39 rue Joliot Curie, F-13453 Marseille Cedex 13
Courriel : merker@gyptis.univ-mrs.fr

(**) Max-Planck-Gesellschaft, Humboldt-Universität zu Berlin
Jägerstrasse, 10-11, D-10117 Berlin, Germany
Courriel : egmont@mathematik.hu-berlin.de

Résumé. Soient M une variété CR localement plongeable et $\Phi \subset M$ un fermé. On donne des conditions suffisantes pour que les fonctions L^1_{loc} qui sont CR sur $M \backslash \Phi$ le soient aussi sur M tout entier.

Local envelope of holomorphy of CR manifolds and removable singularities for integrable CR functions.

Abstract. Let M be a locally embeddable CR manifold and $\Phi \subset M$ be a closed set. We give sufficient conditions in order that L^1_{loc} functions on M which are CR on $M \backslash \Phi$ are CR on M.

Abridged English Version. Let M be a locally embeddable CR manifold, $\dim_{CR} M = m$, codim $M = n$, dim $M = d = 2m + n$ and $\Phi \subset M$ a closed set. We give various conditions in order that Φ is L^1-removable, *i.e.*

$$L^1_{loc}(M) \cap L^1_{loc,CR}(M \backslash \Phi) = L^1_{loc,CR}(M) \qquad (1)$$

Let H^κ denote κ-dimensional Hausdorff measure.

THEOREM 1. – *If M is $\mathcal{C}^3$, a function $f \in L^1_{loc}(M)$ is CR if and only if $f|_{\mathcal{O}}$ belongs to $L^1_{loc,CR}(\mathcal{O})$ for almost every CR orbit $\mathcal{O}$.*

COROLLARY 1. – *If $\Phi = \cup_{a \in A} \mathcal{O}_a$ is of zero d-dimensional measure, then (1) is satisfied.*

Theorem 1 reduces the problem to the case where M is a single CR orbit, *i.e.* M is *globally minimal* [5].

THEOREM 2. – *Let M be $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$, $\dim_{CR} M = m \geq 1$. Every closed subset E of M such that M and $M \backslash E$ are globally minimal and such that $H^{d-3}_{loc}(E) < \infty$ is L^1-removable.*

The notion of wedge ($\mathcal{W}$-)-removability is defined here in higher codimension.

THEOREM 3. – *Let M be $\mathcal{C}^\omega$, $\dim_{CR} M = m \geq 1$. Every closed set $E \subset M$ such that M and $M \backslash E$ are globally minimal and such that $H^{d-2}(E) = 0$ is $\mathcal{W}$- and L^1-removable.*

THEOREM 4. – *Let M be $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $m \geq 1$, and let N be a $\mathcal{C}^2$ connected submanifold of M such that M and $M\backslash N$ are globally minimal.*

(i) *If* $\mathrm{codim}_M N \geq 3$, *then N is $\mathcal{W}$- and L^1-removable*;

(ii) *Every closed set $\Phi \subset N$ is $\mathcal{W}$- and L^1-removable if $\Phi \neq N$,* $\mathrm{codim}_M N = 2$ *and $m \geq 1$;*

(iii) *N is $\mathcal{W}$- and L^1-removable if N is generic at one point,* $\mathrm{codim}_M N = 2$ *and $m \geq 2$.*

A set $S \subset M$ is called a $\mathcal{C}^\lambda$ peak set, $0 < \lambda < 1$, if there exists a *nonconstant* function $\varpi \in \mathcal{C}^\lambda_{CR}(M)$ such that $S = \{\varpi = 1\}$ and $|\varpi| \leq 1$.

THEOREM 5. – *Let M be $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ globally minimal. Then every $\mathcal{C}^\lambda$ peak set S satisfies $H^d(S) = 0$ and is L^1-removable.*

COROLLARY 2. – *Let M be $\mathcal{C}^3$. Then a $\mathcal{C}^\lambda$ peak set S is L^1-removable if $H^d(\cup_{\mathcal{O}\subset S}\mathcal{O}) = 0$.*

1. Énoncés

Soient M une variété CR localement plongeable, de dimension CR $\dim_{CR} M = m$, de codimension codim $M = n$, de dimension dim $M = d = 2m + n$ et soit $\Phi \subset M$ un fermé de M. Dans ce travail, on cherche des conditions, portant sur M et Φ, pour que l'on ait

$$L^1_{loc}(M) \cap L^1_{loc,CR}(M\backslash\Phi) = L^1_{loc}(M). \tag{1}$$

Si (1) est vérifiée, on dira que Φ est L^1-éliminable. D'après Trépreau [10], toute variété CR M est réunion disjointe (en général transfinie) de sous-variétés CR immergées connexes $M = \cup_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{O}_i$, $\mathcal{O}_i \subset M$, appelées *orbites CR de M*, qui sont *caractéristiques*, *i.e.* $\dim_{CR}\mathcal{O}_i = \dim_{CR} M$ et minimales pour l'inclusion et cette propriété. Un premier résultat concerne ces variétés. Il a été démontré par B. Jöricke dans la classe $\mathcal{C}^0(M)$ [2] et dans $L^1_{loc}(M)$ si M est une hypersurface de classe $\mathcal{C}^2$ [3]. Enfin, le second auteur l'a étendu à $L^1_{loc}(M)$ en codimension quelconque dans sa thèse [9].

THÉORÈME 1. – *Si M est de classe $\mathcal{C}^3$, une fonction $f \in L^1_{loc}(M)$ est CR si et seulement si $f|_{\mathcal{O}_i}$ appartient à $L^1_{loc,CR}(\mathcal{O}_i)$ pour presque toute orbite CR $\mathcal{O}_i$, au sens de la mesure sur M.*

La restriction $f|_{\mathcal{O}_i}$ est bien définie et appartient à $L^1_{loc}(\mathcal{O}_i)$ pour presque toute orbite $\mathcal{O}_i$. Nous renvoyons le lecteur à [9] ou [7] pour une preuve complète.

COROLLAIRE 1. – *Si $\Phi = \cup_{a\in A}\mathcal{O}_a$ est de mesure d-dimensionnelle nulle, alors (1) est vérifiée.*

Le théorème 1 réduit l'étude de (1) au cas où $M = \mathcal{O}_i$ est une seule orbite. L'aspect central de notre travail consiste justement à replacer l'étude de (1) dans le contexte de la théorie des orbites CR et de l'extension des fonctions CR, bénéficiant en cela des travaux de Trépreau, Tumanov et Jöricke. Lorsque M est une hypersurface, le problème (1) est traité par Jöricke et Chirka-Stout [1].

Bien entendu, les orbites sont aussi localement plongeables. Soit M générique dans $\mathbb{C}^{m+n}$. Dans ce cas, un ouvert connexe $\mathcal{W}_0$ sera appelé *wedge attaché* à $M\backslash\Phi$ s'il existe une section continue $\eta : M\backslash\Phi \to T_M\mathbb{C}^{m+n}\backslash\{0\}$ du fibré normal à M telle que $\mathcal{W}_0$ contient un wedge $\mathcal{W}_p$ d'edge M en $(p, \eta(p))$ (*cf.* [11], p.3), pour tout point $p \in M\backslash\Phi$. Cette notion a un sens local lorsque M est localement plongeable. Le problème (1) fait intervenir la géométrie des wedges attachés.

DÉFINITION 1. Φ est dit $\mathcal{W}$-éliminable si, pour tout wedge $\mathcal{W}_0$ attaché à $M\backslash\Phi$, il existe un wedge $\mathcal{W}$ attaché à M tel que les fonctions holomorphes dans $\mathcal{W}_0$ se prolongent holomorphiquement à $\mathcal{W}$.

On note $H^\kappa(E)$ la mesure de Hausdorff κ-dimensionnelle de E, pour une métrique fixée sur M. H^d s'identifie à la mesure de Lebesgue. Enfin, on dira qu'une variété CR est *globalement minimale* si elle consiste en une seule orbite CR. Le fermé Φ sera noté E, N ou S, suivant le contexte.

THÉORÈME 2. – *Soit M de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\dim_{CR} M = m \geq 1$. Tout fermé E de M tel que M et $M \backslash E$ sont globalement minimales et tel que $H^{d-3}_{loc}(E) < \infty$ est L^1-éliminable.*

Par exemple, sous ces hypothèses, toute sous-variété N de codimension au moins trois, est L^1-éliminable. Le résultat suivant ([8]) s'applique à l'extension des fonctions CR méromorphes.

THÉORÈME 3. – *Soit M de classe $\mathcal{C}^{\omega}$, $\dim_{CR} M = m \geq 1$. Tout fermé $E \subset M$ tel que M et $M \backslash E$ sont globalement minimales et tel que $H^{d-2}(E) = 0$ est $\mathcal{W}$- et L^1-éliminable.*

Le cas de singularités plus massives est traité dans [7]:

THÉORÈME 4. – *Soient M $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $m \geq 1$. Soit N une sous-variété connexe de M, de classe $\mathcal{C}^2$ telle que M et $M \backslash N$ sont globalement minimales. Alors*

(i) *N est $\mathcal{W}$- et L^1-éliminable si* $\operatorname{codim}_M N \geq 3$.;

(ii) *Tout fermé Φ de N est $\mathcal{W}$- et L^1-éliminable, si $\Phi \neq N$,* $\operatorname{codim}_M N = 2$ *et $m \geq 1$;*

(iii) *N est $\mathcal{W}$- et L^1-éliminable si N est générique en au moins un point,* $\operatorname{codim}_M N = 2$ *et $m \geq 2$.*

Remarque. L'élimination L^1 de compacts $K \subset\subset N$ de variétés $N \subset M$ génériques de codimension un apparaît dans les travaux de B. Jöricke [3] pour $n = 1$ et dans [9] pour $n \geq 2$.

Une version plus faible du théorème 4 est contenue dans [6] dans le cas de l'élimination $\mathcal{W}$. L'hypothèse d'orbite sur M et $M \backslash N$ est essentiellement nécessaire : si elle n'est pas satisfaite, il existe des exemples simples de M, N et de distributions CR de support une sous-variété caractéristique fermée S de $M \backslash N$ qui ne se prolongent pas holomorphiquement à un wedge au-dessus de N. Enfin, les hypothèses géométriques sur N et Φ sont calquées sur celles qui rendent les théorèmes 2,3 et 4 connus lorsque M est un ouvert de $\mathbb{C}^m$, *i.e.* $n = 0$.

Maintenant, un sous-ensemble S de M est dit *ensemble pic höldérien* s'il a la forme $\{\varpi = 1\}$, avec $\varpi \in \mathcal{C}^{\gamma}_{CR}(M)$ *non constante* pour un γ, $0 < \gamma < 1$ et $|\varpi| \leq 1$. Grâce au théorème 1 et aux techniques de déformation de disques, on généralise les résultats de [4].

THÉORÈME 5. – *Soient M $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ globalement minimale. Tout ensemble pic höldérien S de M vérifie $H^d(S) = 0$ et est L^1-éliminable.*

COROLLAIRE 2.– *Soit M $\mathcal{C}^3$. Un ensemble pic höldérien S est L^1-éliminable si $H^d(\bigcup_{\mathcal{O}_\imath \subset S} \mathcal{O}_\imath) = 0$.*

Enfin, puisque L^{p}_{loc} se plonge dans L^1_{loc} pour $\mathrm{p} \geq 1$, tous ces résultats sont valables dans L^{p}_{loc}.

2. Preuves.

Nous allons donner ici un résumé des preuves des théorèmes 2,3,4 et 5. Les preuves rigoureuses sont contenues dans [7], [8], [9]. Le théorème 1 pour $f \in \mathcal{C}^0_{CR}(M)$ est démontré dans [2] et dans [9] pour $f \in L^{\mathrm{p}}_{loc,CR}$.

C'est B. Jöricke qui a eu l'idée d'utiliser l'inégalité de Carleson sur des familles régulières de disques analytiques attachés à M pour déduire l'élimination L^1 de l'élimination $\mathcal{W}$, dans le cas hypersurface. Dans ce travail et dans [7], [8], nous raffinons les résultats de [6] pour la $\mathcal{W}$-élimination et les étendons à L^1 comme dans [3]. Mentionnons enfin que la technique dite de ¡¡balayage par des wedges¿¿ utilisée dans [3], [1], [9] ne s'appliquerait qu'en dimension CR $m \geq 2$; c'est pourquoi nous utilisons ici les déformations de disques analytiques et le principe de continuité.

On traite le cas L^1, le cas $\mathcal{W}$ sera démontré en cours. La technique consiste en un grand nombre de déformations de M dans des ouverts obtenus en attachant des disques analytiques à M et à ses déformations. En particulier, nous décrivons une partie de l'enveloppe d'holomorphie d'ouverts de type wedge attachés à $M \backslash \Phi$, assez étendue pour procéder ensuite à l'élimination L^1.

Étape 1. Grâce au théorème d'extension de Trépreau-Tumanov généralisé ([5], [6]) et au théorème de l'¡¡edge of the wedge¿¿, on peut prolonger holomorphiquement $f \in L^1_{loc,CR}(M\backslash\Phi)$ à un wedge $\mathcal{W}_0$ attaché à $M\backslash\Phi$. Pour le contrôle en norme L^1 de l'extension, on utilise de ¡¡bonnes¿¿ familles de disques analytiques attachés à M. Soit Δ le disque unité dans $\mathbb{C}$, $b\Delta$ son bord.

DÉFINITION 2. – On appelle *famille régulière en p de disques analytiques attachés à M* une application $\mathcal{C}^{2,\beta}$, $\beta < \alpha$, $A : \mathcal{S} \times \mathcal{V} \times \overline{\Delta} \to \mathbb{C}^{m+n}$, $(s,v,\zeta) \mapsto A_{s,v}(\zeta)$, holomorphe en ζ, où $(0 \in)\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{2m+n-1}$, $(0 \in)\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ sont des ouverts, telle que $A_{0,v}(1) = p$ et que

1) L'application $\mathcal{S} \times b\Delta \to M$, $(s,\zeta) \mapsto A_{s,v}(\zeta)$ est un plongement, $\forall\ v \in \mathcal{V}$;

2) Le vecteur $\eta := -\partial A_{0,0}/\partial\zeta(1) \notin T_pM$ et $\mathrm{rang}(v \mapsto \mathrm{pr}_{T_p\mathbb{C}^{m+n}/(T_pM\oplus\mathbb{R}\eta)}(-\partial A_{0,v}/\partial\zeta(1))) = n-1$.

Toute famille régulière définit un wedge $\mathcal{W}_{A,p}$ en (p,η) par $\mathcal{W}_{A,p} := \{A_{s,v}(\zeta) \in \mathbb{C}^{m+n} : (s,v,\zeta) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{V}_1 \times \mathring{\Delta}_1\}$, où $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$, $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap \Delta(1,\rho_1)$, $\rho_1 > 0$. Soit $\mathcal{W} = \mathcal{W}(U,C) = \{z + \eta :\ z \in U, \eta \in C\}$ un wedge de base $U \subset M$ et de cône $C \subset \mathbb{C}^{m+n}$, *e.g.* $\mathcal{W} \approx \mathcal{W}_{A,p}$.

DÉFINITION 3. – Une fonction $f \in L^1_{loc,CR}(M)$ est dite *prolongeable dans* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{a}}(\mathcal{W})$ s'il existe $F \in \mathcal{H}(\mathcal{W})$ telle que $F|_{U_\eta} \to f$ au sens L^1, où $U_\eta = U + \eta$, $\eta \in C$, uniformément lorsque $\eta \to 0$.

Pour démontrer l'extension de f dans la classe de Hardy $\mathrm{H}^1_{\mathrm{a}}(\mathcal{W}_{A,p})$, on utilise des familles régulières attachées à des déformations de M:

PROPOSITION 1 ([9]). – *Soit M globalement minimale, $\mathcal{C}^{2,\alpha}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une déformation $\mathcal{C}^{2,\beta}$ (d, M^d) de M à support compact avec $M^d \equiv M$ près de p et $||M^d - M||_{\mathcal{C}^{2,\beta}} < \varepsilon$, telle que*

1) Il existe une famille régulière de disques $A_{s,v}$ attachés à M^d;

2) Il existe un opérateur linéaire borné de prolongement $L^1_{loc,CR}(M) \to L^1_{loc,CR}(M^d)$, $f \mapsto f^d$, tel que $f^d \equiv f$ sur l'ensemble où M^d coïncide avec M;

3) Pour $f \in L^1_{loc,CR}(M)$ fixée, il existe une déformation d telle que $||f^d - f||_{L^1} < \varepsilon$.

Cette construction demande l'emploi en détail des techniques de déformation de disques de Bishop élaborées par Tumanov ([11]) et l'existence de M^d satisfaisant 1) et 2) équivaut à la globalité minimale ([9], [7]).

PROPOSITION 2. – *$L^1_{loc,CR}(M)$ est prolongeable dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{a}}(\mathcal{W}_{A,p})$.*

En effet, sur chaque disque remplissant $\mathcal{W}_{A,p}$, on se ramène à l'estimée de Carleson sur Δ: si $r(\theta) \in \mathcal{C}^1([-\pi,\pi],[0,1])$ telle que $r \equiv r_1$ sur $(-\theta_1,\theta_1)$, $0 < r_1 < 1$ et supp $(1-r) \subset (-\theta_0,\theta_0)$, $0 < \theta_1 < \theta_0 < \pi$, alors il existe $C > 0$ telle que $\forall\ u \in H^1_{\mathrm{a}}(\Delta)$, $\int_{-\theta_0}^{\theta_0} |u(re^{i\theta})| d\theta \leq C||u||_{L^1(b\Delta)}$. □

Étape 2. On note $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ l'anneau des fonctions holomorphes dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}(E)$ un voisinage ouvert arbitrairement petit d'un ensemble E dans $\mathbb{C}^{m+n}$. La déformation suivante réduit la démarche au cas où $L^1_{loc,CR}(M\backslash\Phi) \cap L^1_{loc}(M)$ a été remplacé par $\mathcal{H}(\mathcal{V}(M^d\backslash\Phi)) \cap L^1_{loc}(M^d)$.

PROPOSITION 3. – *Soient M $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, générique dans $\mathbb{C}^{m+n}$, $f \in L^1_{loc,CR}(M)$ et U un ouvert de $M\backslash\Phi$ tel que $\overline{U}$ est compact, avec $M\backslash\Phi$ globalement minimale. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une déformation M^d $\mathcal{C}^{2,\beta}$, $\beta < \alpha$, avec supp $d = \overline{U}$, $M^d \supset \Phi$, $||M^d - M||_{\mathcal{C}^{2,\beta}} < \varepsilon$, telle qu'il existe une fonction $f^d \in L^1_{loc}(M^d) \cap L^1_{loc,CR}(M^d\backslash\Phi) \cap \mathcal{H}(\mathcal{V}(U^d))$ coïncidant avec f sur $M\backslash U$ et telle que $||f^d - f||_{L^1} < \varepsilon$.*

La preuve utilise la Proposition 1 et l'inégalité de Carleson sur des déformations successives de M à support la base $U_j \subset M$ de petits wedges $\mathcal{W}_{A_j,p_j}$ tels que $\bigcup_{j\in J} U_j = M$. Il suffira alors de démontrer que $L^1_{loc}(M^d) \cap \mathcal{H}(\mathcal{V}(M^d\backslash\Phi)) = L^1_{loc,CR}(M^d)$. En effet, par $|\int_M (f^d - f)\overline{\partial}\varphi| \leq C_\varphi\varepsilon$ (les mesures sur M et sur M^d étant voisines, puisque $||M^d - M||_{\mathcal{C}^{2,\beta}} < \varepsilon$, une telle écriture à un sens), pour toute $(m+n, m-1)$-forme à support compact, l'égalité $\int_{M^d} f\overline{\partial}\varphi = 0$ impliquera $\int_M f\overline{\partial}\varphi = 0$, puisque ε est arbitraire. $\square$

Étape 3: $\mathcal{W}$-élimination de la singularité. En utilisant l'hypothèse ¡¡M et $M\backslash\Phi$ globalement minimales¿¿, on élimine progressivement les points de $\Phi = N$, E ou K qui se trouvent à l'extrémité d'une courbe intégrale par morceaux de T^cM issue d'un point de $M\backslash\Phi$ et on déforme ensuite M dans le wedge obtenu au-dessus de chaque point qui a été éliminé. À chaque pas, sur une déformation de M encore notée M, la situation se réduit à l'élimination d'un seul point p de Φ disposé comme suit. Il existe un voisinage U de p dans M et M_1 une hypersurface $\mathcal{C}^2$ dans U qui partage U en deux composantes fermées M_1^- et M_1^+, $U = M_1^- \cup M_1^+$, $M_1^- \cap M_1^+ = M_1$, telle que $\Phi \cap U \subset M_1^-$, et il existe un disque A $\mathcal{C}^{2,\beta}$ attaché à M_1^+ avec $A(1) = p$, $dA/d\theta(1) \in T_pM_1$. Soient ω un voisinage de $U\backslash\Phi$ dans $\mathbb{C}^{m+n}$ et $f \in \mathcal{H}(\omega)$. Les déformations normales de Tumanov nous permettent de développer A en une famille régulière en p de disques analytiques $A_{s,v}$, $A_{0,0} = A$, qui engendre un wedge $\mathcal{W}_{A,p}$:

LEMME 1 ([11].) – *Il existe une famille régulière $A_{s,v}$ attachée à $(M \cap U) \cup \omega$.* $\square$

Cependant, le bord de ces disques peut toucher la singularité Φ (en fait, $A_{s,v}(b\Delta) \cap \Phi \subset A_{s,v}(b\Delta \cap \Delta_1)$) et le théorème d'approximation de Baouendi-Treves n'est plus valable. Heureusement, le principe de continuité et une propriété d'isotopie des disques à un point nous permet de prolonger f à $\mathcal{W} := \mathcal{W}_{A,p}$ moins un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{W}$, *i.e.* $F \in \mathcal{H}(\omega \cup (\mathcal{W}\backslash\mathcal{E}))$, comme suit:

DÉFINITION 4. Un disque plongé $A : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}^{m+n}$ est dit *b-isotope à un point dans* ω s'il existe une application $\mathcal{C}^1$ $[0,1] \times \overline{\Delta} \ni (t,\zeta) \mapsto A_t(\zeta) \in \mathbb{C}^{m+n}$ telle que $A_t(b\Delta) \subset \omega$, $A_0 = A$, chaque A_t est un disque analytique plongé pour $0 \leq t < 1$ et A_1 est une application constante $\overline{\Delta} \to \{pt\} \in \omega$.

LEMME 2. – *Sous les conditions des théorèmes 2, 3 et 4, tout disque $A_{s,v}$ tel que $A_{s,v}(b\Delta\cap\Delta_1)\cap\Phi = \emptyset$ est b-isotope à un point dans ω.* $\square$

LEMME 3. – *Soit $A : b\Delta \to \omega$, $\overline{\Delta} \to \mathbb{C}^{m+n}$ b-isotope à un point dans ω. Alors, pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(\omega)$, il existe $F \in \mathcal{H}(\omega \cup \mathcal{V}(A(\overline{\Delta})))$ telle que $F \equiv f$ dans $\mathcal{V}(A(b\Delta))$.* $\square$

L'ensemble $\mathcal{E} := \{z_1 = A_{s,v}(\zeta_1) \in \mathbb{C}^{m+n} : \zeta_1 \in \overset{\circ}{\Delta}_1, A_{s,v}(b\Delta) \cap \Phi \neq \emptyset\}$ où l'on n'a pas prolongé est feuilleté par des courbes holomorphes. Grâce aux disques attachés à M, on se ramène donc à éliminer la singularité $\mathcal{E}\backslash\omega$ pour $F \in \mathcal{H}(\omega \cup (\mathcal{W}\backslash\mathcal{E})) = \mathcal{H}(\omega \cup (\mathcal{W}\backslash(\mathcal{E}\backslash\omega)))$. À moins que $\mathrm{codim}_{\mathcal{W}}\mathcal{E} = \mathrm{codim}_M\Phi$, le bord de presque tout disque $A_{s,v}$ ne touche en général Φ que sur un ensemble de mesure nulle de $b\Delta$. Le fait que de nombreux disques $A_{s,v}$ satisfont $A_{s,v}(b\Delta \cap \Delta_1) \not\subset \mathcal{E}$ près de $\zeta = 1$, *i.e.* que $\mathcal{E}\backslash\omega \neq \mathcal{E}$, est crucial pour la suite.

La structure de $\mathcal{E}$ dépend des cas:

• Si $\mathcal{H}^{d-3}_{loc}(E) < \infty$, alors $\mathcal{H}^{2m+2n-2}_{loc}(\mathcal{E}) < \infty$. Soit $f \in L^1(U)$. Dans ce cas, $F \in L^1(\mathcal{W})$ et on démontre que $\mathcal{E}\backslash\omega$ est une singularité éliminable pour F grâce à un principe de méromorphie séparée dû à Shiffman. En effet, on a:

LEMME 4. – *Soit $P \subset\subset \mathcal{W}$ un polydisque. Alors pour presque tout disque de coordonnés $D \subset P$, $D \cap \mathcal{E}$ consiste en un nombre fini de points et $F|_D$ est méromorphe sur D à pôles d'ordre au plus un.*

Le lemme s'applique à $F \in L^1(\mathcal{W}) \cap \mathcal{H}(\omega \cup (\mathcal{W}\backslash\mathcal{E}))$, d'où F est méromorphe dans $\mathcal{W}$. Si l'ensemble polaire P_F de F est non vide, il ne peut pas contenir une courbe $A_{s,v}(\Delta)$ telle que $A_{s,v}(\overset{\circ}{\Delta}_1) \cap \omega \neq \emptyset$. Donc P_F est constitué des disques dont le bord est entièrement contenu, pour ζ près de 1, dans E. L'ensemble $\mathcal{E}_1$ correspondant dans $\mathcal{W}$ satisfait maintenant $H^{2m+2n-3}(\mathcal{E}_1) = 0$, mais alors $\mathcal{H}(\mathcal{W}\backslash\mathcal{E}_1) = \mathcal{H}(\mathcal{W})$, donc $P_F = \emptyset$. $\square$

• Dans la situation du théorème 4, l'énoncé suivant s'applique à (i), (ii) et (iii) :

PROPOSITION 4. – *Soit Λ une hypersurface d'un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^{m+n}$ et Φ un fermé de Λ qui ne contient pas d'orbite CR de Λ. Alors $\forall\ f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}\backslash\Phi), \exists\ F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ telle que $F|_{\mathcal{U}\backslash\Phi} = f$.*

Lorsque $\mathrm{codim}_M\ N = 2$ (Théorème 4), $\mathcal{E}$ est une hypersurface de $\mathcal{W}$ feuilletée par les $A_{s,v}(\overset{\circ}{\Delta}_1)$, mais tout bord de disque $A_{s,v}(b\Delta \cap \Delta_1)$ ne rencontre N qu'en au plus un point. Donc $\mathcal{E}\backslash\omega$ ne contient pas d'orbite CR de $\mathcal{E}$: la proposition 4 s'applique. □

• Lorsque M est $\mathcal{C}^\omega$ et $H^{d-2}(\mathcal{E}) = 0$, $\mathcal{E}$ satisfait $H^{2m+2n-1}(E) = 0$. Dans ce cas, le feuilletage de $\mathcal{E}$ est analytique réel et on applique près d'un point de $b\omega \cap \mathcal{E}$ l'énoncé ([8]):

PROPOSITION 5. – *Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^{m+n}$ un ouvert $\mathcal{C}^\omega$-feuilleté par des courbes holomorphes $A_\vartheta, \vartheta \in D$, $\mathcal{U} = \cup_\vartheta A_\vartheta$, $0 \in \mathcal{U}$, $D \subset \mathbb{R}^{2m+2n-2}$ un ouvert, $0 \in D$, $\mathcal{G} \subset D$ un fermé avec $\mathcal{H}^{2m+2n-3}(\mathcal{G}) = 0$ et M_1 une hypersurface $\mathcal{C}^1$ dans $\mathcal{U}$, $0 \in M_1$, $T_0M_1 + T_0A_0 = T_0\mathbb{C}^{m+n}$, et posons $\mathcal{E} := (\cup_{\vartheta\in\mathcal{G}} A_\vartheta) \cap M_1^-$. Alors $\mathcal{H}(\mathcal{U}\backslash\mathcal{E}) = \mathcal{H}(\mathcal{U})$.*

Ici, l'argument utilise une complexification de courbes réelles du feuilletage pour avoir la b-isotopie. □

Étape 4: valeurs au bord dans L^1. Pour conclure, Il reste à estimer l'extension F dans le wedge $\mathcal{W}$ en norme L^1. On applique à $\Phi \subset M_1^-$ l'énoncé:

PROPOSITION 6. – *Si $\mathcal{H}^{d-2}_{loc}(\Phi) < \infty$ et si $\mathcal{H}(\omega)$ se prolonge holomorphiquement à un wedge en $p \in M_1^-$, alors p est L^1-éliminable, i.e. ¡¡Φ $\mathcal{W}$-éliminable¿¿ entraîne ¡¡Φ L^1-éliminable¿¿.*

Preuve: Les disques $A_{s,v}$ et l'inégalité de Carleson donnent un contrôle en norme L^1 pour les disques ne touchant pas Φ (*i.e.* presque tout disque, parce que $\mathcal{H}^{d-2}_{loc}(\Phi) < \infty$), donc de l'extension dans le wedge. L'extension appartient enfin à $\mathrm{H}^1_{\mathrm{a}}(\mathcal{W})$, ce qui achève la preuve. □

Preuve du Théorème 5. Compte tenu de l'existence des familles régulières de disques analytiques et de la Proposition 2, en suivant la démonstration du Théorème 1 dans Kytmanov-Rea [4], on obtient le Théorème 5. □

References

[1] E. M. Chirka and E. L. Stout, *Removable singularities in the boundary,* Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry, Aspects of Mathematics **E 26**, Vieweg 1994, 43-104.

[2] B. Jöricke, *Deformation of CR manifolds, minimal points and CR-manifolds with the microlocal analytic extension property,* J. of Geom. Analysis, **6** (1996), 555-611.

[3] B. Jöricke, *Boundaries of singularity sets, removable singularities, and CR-invariant subsets of CR-manifolds,* Preprint 1996, à paraître J. Diff. Equ., 82pp.

[4] A.M. Kytmanov and C. Rea, *Elimination of L^1 singularities on Hölder peak sets for CR functions,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Classe di Scienze, **22** (1995), 211-226.

[5] J. Merker, *Global minimality of generic manifolds and holomorphic extendibility of CR functions*, Int. Math. Res. Not. **8** (1994), 329-342.

[6] J. Merker, *On removable singularities for CR functions in higher codimension*, Int. Math. Res. Not. **1** (1997), 21-56.

[7] J. Merker and E. Porten, *On removable singularities for integrable CR functions,* Preprint 1997, à paraître, 32pp., http://www.dmi.ens.fr/EDITION/preprints.

[8] J. Merker and E. Porten, *On the local meromorphic extension of CR meromorphic functions,* Ann. Polon. Math. **70** (1998), 163-193.

[9] E. Porten, *On removable singularities for L^{p} CR functions,* Preprint 1998, à paraître.

[10] J.-M. Trépreau, *Sur la propagation des singularités dans les variétés CR*, Bull. Soc. Math. Fr. **118** (1990), 403-450.

[11] A. E. Tumanov, *Connections and propagation of Analyticity for CR Functions*, Duke Math. J. **73** (1994), 1-24.