GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS ANALYTIQUES RÉELLES DE $\mathbb{C}^n$ ET SYMÉTRIES DE LIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

HERVÉ GAUSSIER ET JOËL MERKER

RÉSUMÉ. Le but de cet article de synthèse est de présenter les résultats obtenus récemment par les auteurs dans l'étude des variétés CR. Grâce à un calcul complet produisant une formule explicite pour le prolongement de Lie d'un champ de vecteur à l'espace des jets d'ordre k, on obtient une borne optimale pour la dimension du groupe de symétrie d'un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles d'ordre k à n variables indépendantes et une variable dépendante. Dans le même état d'esprit, en généralisant une idée de B. Segre récemment remise au goût du jour par A. Sukhov, on démontre que le groupe d'automorphismes d'une sous-variété générique minimale et finiment non dégénérée M de $\mathbb{C}^n$ peut être vu comme un sous-groupe totalement réel maximal du groupe de symétries de Lie d'un système d'équations aux dérivées partielles complexes canoniquement associé à M. On illustre cette correspondance en exhibant un nouvel exemple d'hypersurface uniformément Levi-dégénérée de rang un dans $\mathbb{C}^3$, homogène et à groupe d'isotropie de dimension maximale égale à deux, qui n'est pourtant pas localement biholomorphe au tube complexe construit sur le cône de lumière dans $\mathbb{R}^3$. Enfin, dans une dernière section, on démontre que génériquement au sens de Baire, un tube rigide analytique réel générique minimal et finiment non dégénéré de $\mathbb{C}^n$ ne peut être représenté par des équations algébriques dans aucun système de coordonnées holomorphes locales.

Table des matières

1. INTRODUCTION

À la fin du dix-neuvième siècle, S. Lie établissait dans [14], [4] les fondements de la théorie des groupes de transformations. Si ces travaux ont trouvé des ramifications importantes dès le début du vingtième siècle, dans la mise en place d'une théorie des groupes de Lie abstraits et des espaces fibrés à connexion, la contribution capitale de S. Lie dans le domaine des équations différentielles n'a été remise au goût du jour que récemment, grâce notamment aux contributions fondamentales de P.J. Olver [15], [16]. L'apport le plus frappant de S. Lie fut de découvrir que la majorité des méthodes d'intégration, jusqu'alors artificielles et isolées, étaient intrinsèquement liées. L'étude structurale du *groupe de symétrie* d'une équation différentielle arbitraire lui permit notamment d'aborder la classification des équations différentielles ordinaires d'ordre quelconque. Une équation différentielle d'ordre k, analytique sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, se compose

Date: 2004-7-7.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary : 32V40. Secondary 32V25, 32H02, 32H40, 32V10.

de la donnée d'une hypersurface dans $\mathbb{K}^{k+1}$, appelée *squelette* de l'équation, et de la famille de ses *solutions*, c'est-à-dire des fonctions φ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que la courbe $y = \varphi(x), y' = (\partial\varphi/\partial x), \ldots, y^{(k)} = (\partial^k\varphi/\partial x^k)$ soit contenue dans le squelette. L'idée essentielle de la théorie de Lie est de simplifier le squelette par un changement de variables adéquat, obtenu en déterminant le groupe de symétries de l'équation, c'est-à-dire le groupe des transformations ponctuelles de l'espace des variables (x, y) dont l'extension à l'espace des k-jets $y', \ldots, y^{(k)}$ laisse l'équation du squelette invariante. En 1896, A. Tresse soutint une thèse [22] sous la direction de S. Lie à Leipzig dans laquelle il détermina complètement les invariants différentiels des équations différentielles ordinaires du second ordre à variable complexe, permettant de reconnaître si deux équations différentielles sont réductibles l'une à l'autre par une transformation analytique ponctuelle. Ce résultat contenait en particulier une liste de formes normales pour les équations d'ordre deux, selon la dimension de leur groupe de symétrie 0, 1, 2, 3 ou 8.

Au début du vingtième siècle, H. Poincaré [17] écrivit un mémoire considéré comme fondateur de la géométrie dite de Cauchy-Riemann (CR). Il y montra que les hypersurfaces analytiques réelles non hyperplanes de l'espace complexe de dimension deux admettent une infinité d'invariants différentiels sous l'action des transformations pseudo-conformes qui stabilisent l'hypersurface (appelés automorphismes de l'hypersurface), abordant ainsi le problème de la classification des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$. En 1931-32, B. Segre [18], [19] montra qu'il existe un lien profond entre la théorie de Lie des équations différentielles et la géométrie CR. À toute hypersurface analytique réelle de $\mathbb{C}^2$ non hyperplane, B. Segre associa une famille à deux paramètres complexes de courbes complexes de $\mathbb{C}^2$, stables par tout automorphisme de l'hypersurface. Ces surfaces complexes sont de plus solutions d'une équation différentielle ordinaire du second ordre, et B. Segre montra que pour que deux hypersurfaces soient équivalentes au point de vue pseudo-conforme, il est nécessaire que leurs équations différentielles associées soient réductibles l'une à l'autre par une transformation analytique ponctuelle, ramenant ainsi le problème d'équivalence des hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$ à l'étude des équations différentielles menée par A. Tresse. Cependant, comme le remarqua É. Cartan dans l'article fondateur [1] : *ce résultat, pour important qu'il soit, n'épuise pas la question* (de la classification des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$)*, car deux hypersurfaces peuvent être associées à deux équations différentielles équivalentes sans être elles-mêmes équivalentes ; d'autre part, même si elles le sont, les transformations pseudo-conformes qui font passer de la première équation différentielle à la seconde ne font pas toutes passer de la première hypersurface à la seconde."* Dans [1], É. Cartan résolut le problème d'équivalence des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$. En déterminant les invariants différentiels des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$, il établit la liste complète explicite, à transformation pseudo-conforme globale près, des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^2$, non localement équivalentes à l'hypersphère, admettant un groupe transitif de transformations globales. La géométrie CR a connu un essor considérable à partir des années 1970-80, notamment grâce au mémoire de S.S Chern et J.K. Moser [2] classifiant les hypersurfaces strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ au moyen d'invariants différentiels, et grâce aux travaux de C. Fefferman, de S. Pinchuk, de N. Tanaka et de S. Webster. Néanmoins, les liens entre la géométrie CR et la théorie de Lie ont été plus ou moins négligés durant cette période. En 2001, A. Sukhov [20], [21] a montré à nouveau l'importance de la théorie de Lie en géométrie CR, en exploitant l'observation fondamentale d'après laquelle les *variétés de Segre* (définies dans la Section 2.1) associées à une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$ sont, sous des hypothèses de non dégénérescence, solutions d'un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles. Cette approche permet alors de considérer les automorphismes d'une variété CR comme des symétries d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Nous présentons dans la Section 2 le critère de Lie, qui permet de calculer explicitement l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales d'un système d'équations aux dérivées partielles. Nous en déduisons dans la Section 3 certains résultats de géométrie CR. Dans la Section 4, nous présentons un résultat sur l'algébrisabilité locale de certaines sous-variétés analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$. On termine dans la Section 5 par des problèmes ouverts directement liés aux résultats présentés dans les sections précédentes.

2. CRITÈRE DE LIE

2.1. **Présentation du critère.** Commençons par rappeler la méthode de Lie pour étudier les symétries d'un système d'équations aux dérivées partielles. Une présentation plus complète de la théorie se trouve dans le chapitre 2 de [15] ou dans le chapitre 6 de [16]. Toutes nos considérations seront locales et par souci de clarté, nous ne préciserons pas explicitement les domaines de définition des applications et des champs de vecteurs.

On considère un système complet d'équations aux dérivées partielles d'ordre κ à une variable dépendante $u \in \mathbb{C}$ et n variables indépendantes $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, de la forme

$$(\mathcal{E}) \qquad u_{x^\alpha}(x) = F_\alpha(x, u(x), (u_{x^\beta}(x))_{1 \leq |\beta| \leq \kappa - 1}), \qquad |\alpha| = \kappa,$$

où les fonctions F_α sont des fonctions holomorphes. Plus précisément, on peut sans perte de généralité supposer que le germe $u = 0$ est une solution du système $(\mathcal{E})$ et que les F_α sont holomorphes au voisinage de 0. On suppose le système $(\mathcal{E})$ *localement résoluble*, c'est-à-dire que par chaque point $(x^*, u^*, u^*_\beta, u^*_\alpha)$ de l'espace des jets J^κ_n vérifiant $u^*_\alpha = F_\alpha(x^*, u^*, u^*_\beta)$ passe une unique solution holomorphe locale du système $(\mathcal{E})$. En particulier, cette hypothèse est automatiquement satisfaite lorsque le système est *complètement intégrable*, c'est à-dire que le système de Pfaff qui lui est naturellement associé dans l'espace des jets est involutif au sens de Frobenius. La théorie de Lie consiste à étudier les champs de vecteurs $X := \sum_{k=1}^n Q^k(x,u)\partial/\partial x_k + R(x,u)\partial/\partial u$ de l'espace $\mathbb{C}^{n+1}$ des variables (x, u), à coefficients holomorphes, tels que le groupe local complexe à un paramètre $(x, u, t) \mapsto \exp(tX)(x, u)$ engendré par X transforme le graphe de toute solution locale de $(\mathcal{E})$ en le graphe d'une autre solution locale de $(\mathcal{E})$. On dit alors que X est une *symétrie infinitésimale* du système $(\mathcal{E})$. On note J^κ_n l'espace des jets d'ordre κ de fonctions holomorphes définies dans $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soient

$$(x, u, (U^1_{j_1})_{1 \leq j_1 \leq n}, \dots, (U^\kappa_{j_1,\dots,j_\kappa})_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_\kappa \leq n})$$

les coordonnées naturelles sur J^κ_n. Considérons le *squelette* de $(\mathcal{E})$, c'est-à-dire la sous-variété complexe $\Delta_\mathcal{E}$ de codimension $C^\kappa_{n+\kappa-1}$ dans J^κ_n définie par :

$$\Delta_\mathcal{E} : \quad U^{|\alpha|}_\alpha = F_\alpha(x, u, (U^{|\beta|}_\beta)_{1 \leq |\beta| \leq \kappa - 1}), \qquad |\alpha| = \kappa.$$

La variété $\Delta_\mathcal{E}$ étant lisse, le système $(\mathcal{E})$ est dit *de rang maximal* (voir la définition 2.30 dans [15]). D'après le corollaire 2.40 de [15], la famille des symétries infinitésimales de $(\mathcal{E})$ forme une sous-algèbre de Lie complexe, notée $\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})$, de l'algèbre de Lie des champs holomorphes locaux de $\mathbb{C}^{n+1}$. Le *critère de Lie* qui va suivre fournit un algorithme pour le calcul de cette algèbre $\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})$.

Soit D_j le j-ième opérateur de dérivée totale, caractérisé par la propriété que pour tout entier $l \geq 1$, pour toute fonction holomorphe $u = u(x)$ et pour toute fonction holomorphe $P = P(x, u, (U_\beta)^\beta_{1\leq|\beta|\leq l})$ définie dans l'espace des jets J^l_n, D_j est l'unique opérateur différentiel formel infini tel que

$$[D_j P](x, u(x), (u_{x^\beta}(x))_{1\leq|\beta|\leq l-1}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\left[P(x, u(x), (u_{x^\beta}(x)_{1\leq|\beta|\leq l})\right].$$

L'identité précédente ne fait intervenir que la troncature de D_j à l'ordre l, notée D^l_j, et définie par :

$$D^l_j := \frac{\partial}{\partial x_j} + U^1_j \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{1\leq j_1\leq n} U^2_{j,j_1} \frac{\partial}{\partial U^1_{j_1}} + \cdots + \sum_{1\leq j_1,\ldots,j_{l-1}\leq n} U^l_{j,j_1,\ldots,j_{l-1}} \frac{\partial}{\partial U^{l-1}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}}.$$

Le *prolongement d'ordre* κ de X, noté X^κ (voir le théorème 2.36 dans [15]), est l'unique champ de vecteurs holomorphe défini dans l'espace J^κ_n par :

$$X^\kappa := X + \sum_{1\leq j_1\leq n} R^1_{j_1} \frac{\partial}{\partial U^1_{j_1}} + \cdots + \sum_{1\leq j_1,\ldots,j_{\kappa-1}\leq n} R^\kappa_{j_1,\ldots,j_{\kappa-1}} \frac{\partial}{\partial U^\kappa_{j_1,\ldots,j_\kappa}},$$

et dont les coefficients sont calculés récursivement par les formules :

$$\begin{cases} R^1_{j_1} & := & D^1_{j_1}(R) - \sum_{k=1}^n D^1_{j_1}(Q^k)\, U^1_k, \\ R^2_{j_1,j_2} & := & D^2_{j_2}(R^1_{j_1}) - \sum_{k=1}^n D^1_{j_2}(Q^k)\, U^2_{j_1,k}, \\ & \cdots & \\ R^\kappa_{j_1,\ldots,j_{\kappa-1}} & := & D^\kappa_{j_\kappa}(R^{\kappa-1}_{j_1,\ldots,j_{\kappa-1}}) - \sum_{k=1}^n D^1_{j_\kappa}(Q^k)\, U^\kappa_{j_1,\ldots,j_{\kappa-1},k}. \end{cases}$$

Le *critère de Lie* s'énonce de la façon suivante (voir le Théorème 2.71 de [15]) :

Théorème 1. *Un champ de vecteurs X est une symétrie infinitésimale du système $(\mathcal{E})$ si et seulement si son prolongement X^κ d'ordre κ est tangent au squelette $\Delta_{\mathcal{E}}$ dans l'espace des jets J^κ_n.*

La force de ce critère réside dans le fait qu'en appliquant X^κ aux équations définissantes $U^{|\alpha|}_\alpha = F_\alpha(x, u, U^{|\beta|}_\beta)$ et en remplaçant partout $U^{|\alpha|}_\alpha$ par F_α, on obtient une collection de $C^n_{n+\kappa-1}$ séries convergentes des variables $(x, u, (U^{|\beta|}_\beta)_{1\leq|\beta|\leq\kappa-1})$ qui doivent être identiquement nulles. En développant ces séries en puissances de $U^{|\beta|}_\beta$, on obtient un système linéaire d'ordre κ d'équations aux dérivées partielles satisfaites par les coefficients Q^k et R de X, appelées *équations définissantes de* $\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})$, et dont la résolution est bien comprise grâce aux travaux algorithmiques en algèbre différentielle.

2.2. **Estimées de la dimension de $\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})$.** Le critère de Lie permet de calculer la dimension complexe de l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales de l'équation $(\mathcal{E})$. S. Lie a ainsi montré que l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 est de dimension complexe inférieure ou égale à 8, et que pour l'ordre $\kappa \geq 3$, la dimension maximale est égale à $\kappa + 4$. De même, F. Gonzàles-Gascòn et A. Gonzàles-Lòpez ont montré dans [10] que l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales d'un système de m équations ordinaires de la forme $(\mathcal{E})$ d'ordre deux et à

m inconnues $(u_1, \ldots, u_m)$ est de dimension inférieure ou égale à $(m+3)(m+1)$. Enfin A. Sukhov a généralisé ces résultats dans [20] au cas d'un système d'ordre deux à n variables indépendantes $(x_1, \ldots, x_n)$ et m variables dépendantes $(u_1, \ldots, u_m)$, en donnant l'estimation $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{Lie}(\mathcal{E}) \leq (n+m+2)(n+m)$. Le théorème suivant généralise le résultat de S. Lie au cas d'une équation $(\mathcal{E})$ d'ordre $\kappa \geq 2$, dépendant de n variables :

Théorème 2. [5] *Soit $(\mathcal{E})$ le système holomorphe d'ordre $\kappa \geq 2$, localement résoluble, d'équations aux dérivées partielles avec une variable dépendante et n variables indépendantes, défini ci-dessus. L'algèbre de Lie des symétries infinitésimales de $(\mathcal{E})$ vérifie les estimations suivantes :*

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})) \leq (n+1)(n+3), & \text{si } \kappa = 2, \\ \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})) \leq \binom{n+\kappa-1}{\kappa-1} + (n+1)^2, & \text{si } \kappa \geq 3. \end{cases}$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise un calcul indiciel complexe mais explicite des coefficients $R^{\kappa}_{j_1,\ldots,j_{\kappa-1}}$ du prolongement X^{κ}. On analyse et on simplifie ensuite le système des équations définissantes satisfaites par les coefficients Q^k et R de X et un argument de comptage des conditions initiales nous permet d'obtenir ces inégalités. Notons qu'elles sont optimales, comme le montre le complément suivant qui généralise des originaux résultats de S. Lie dans le cas $n = 1$:

Théorème 3. [5],[7] *Soit $(\mathcal{E}_0)$ le système homogène $u_{x^\alpha}(x) = 0, \ \alpha \in \mathbb{N}^n, \ |\alpha| = \kappa \geq 2$. On a alors :*

$$\begin{cases} \dim(\mathfrak{Lie}(\mathcal{E}_0)) = (n+1)(n+3), & \text{si } \kappa = 2, \\ \dim(\mathfrak{Lie}(\mathcal{E}_0)) = \binom{n+\kappa-1}{\kappa-1} + (n+1)^2, & \text{si } \kappa \geq 3. \end{cases}$$

De plus, étant donné un système $(\mathcal{E})$ quelconque, les dimensions maximales sont atteintes, i.e.

$$\begin{cases} \dim(\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})) = (n+1)(n+3), & \text{si } \kappa = 2, \\ \dim(\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})) = \binom{n+\kappa-1}{\kappa-1} + (n+1)^2, & \text{si } \kappa \geq 3. \end{cases}$$

si et seulement si *il existe une transformation ponctuelle $(x', u') = \varphi(x, u)$ qui transforme le système $(\mathcal{E})$ sur le système $u'_{x'^\alpha}(x') = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \kappa$.*

Pour démontrer la seconde partie de ce théorème, on travaille avec des redressements d'algèbres de Lie de champs de vecteurs en s'inspirant de la dernière partie du mémoire de S. Lie [14].

Nous allons maintenant nous intéresser à la géométrie CR. La théorie de Lie va permettre principalement d'estimer la dimension du (pseudo)groupe des automorphismes d'une variété, objet fondamental dans l'étude géométrique d'une variété CR.

3. Symétries de Lie et géométrie CR

Commençons par présenter de façon générale l'utilisation que l'on peut faire de la théorie de Lie en géométrie CR (Sections 2.1 et 2.2). Ces sections comportent des résultats tirés de [7], que nous donnons ici sans démonstration. Dans la Section 2.3, nous développons un exemple tiré de [6].

3.1. **Hypothèses de non dégénérescence.** Nous allons restreindre notre étude aux sous-variétés analytiques réelles locales de $\mathbb{C}^n$. Considérons une sous-variété analytique réelle, de codimension d dans $\mathbb{C}^n$, passant par l'origine, définie par les équations $r_k(t,\bar{t}) = 0$ pour $k = 1, \dots, d$, où $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ et où les $r_k(t,\bar{t}) \in \mathbb{C}\{t,\bar{t}\}$ satisfont $r_k(0,0) = 0$, $r_k(t,\bar{t}) \equiv \overline{r_k(t,\bar{t})}$ et $dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_d(0) \neq 0$. On suppose M *générique*, c'est-à-dire que $T_0M + iT_0M = T_0\mathbb{C}^n$. Dans ce cas, $T^{(0,1)}M := T_0M \cap T^{(0,1)}\mathbb{C}^n$ est un fibré complexe de rang $(n-d)$. Soit $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_{n-d}$ une base de $T^{(0,1)}M$. On dit que M est *minimale en* 0 si l'orbite (au sens de Sussmann) de l'origine sous l'action des champs $\mathrm{Re}\,\overline{L}_1, \mathrm{Im}\,\overline{L}_1, \dots, \mathrm{Re}\,\overline{L}_{n-d}, \mathrm{Im}\,\overline{L}_{n-d}$ contient un voisinage de l'origine dans M. De manière équivalente, l'algèbre de Lie engendrée par les sections locales de $T^{1,0}M$ et de $T^{0,1}M$ et tous leurs crochets de Lie itérés de longueur quelconque engendre $\mathbb{C} \otimes TM$ en 0. Soit $p \in M$. On note $\nabla_t(r_k)(t,\bar{t})$ le gradient holomorphe de r_k et $\overline{L}^\beta := (\overline{L}_1)^{\beta_1} \dots (\overline{L}_{n-d})^{\beta_{n-d}}$ pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-d}) \in \mathbb{N}^{n-d}$. On dit que M est *ℓ_p-finiment non dégénérée en* p s'il existe un entier $\ell_p \geq 1$ tel que

$$\mathrm{Vect}\,\{\overline{L}^\beta\, \nabla_t(r_k)(p,\bar{p}) :\ |\beta| \leq \ell_p,\ \beta \in \mathbb{N}^{n-d},\ k = 1, \dots, d\}$$

et si ℓ_p est le plus petit entier possible. Par exemple, toute hypersurface Levi non dégénérée dans $\mathbb{C}^n$ est 1-finiment non dégénérée. Cette condition est invariante par biholomorphisme local et ne dépend pas du choix des équations définissantes. On dit que M est *holomorphiquement non dégénérée* s'il n'existe pas de champ de vecteurs non nul de type $(1,0)$, à coefficients holomorphes, tangent à M. Dans ce cas, il existe alors un sous-ensemble analytique réel strict V de M et un invariant biholomorphe ℓ_M appelé le *type de Levi de* M, vérifiant $1 \leq \ell_M \leq n-1$, tels que M est ℓ_M-finiment non dégénérée en tout point p de $M \backslash V$.

3.2. **Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de M.** On appelle *automorphisme de* M tout biholomorphisme f de $\mathbb{C}^n$, défini au voisinage de l'origine, et vérifiant $f(M) \subset M$. La compréhension de la géométrie de M repose fortement sur l'étude de la structure de ses automorphismes :

Théorème 4. [8] *Soit M une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$, finiment non dégénérée et minimale à l'origine. Le (pseudo)groupe des automorphismes de M forme un groupe de Lie local réel, noté* $\mathrm{Hol}(M)$, *et de dimension réelle* $c \leq 2(d+1)\ell_0$.

Nous utiliserons le Théorème 4 en le précisant dans la Section 4 ci-dessous. Voir [8] pour la définition précise de groupe de Lie local et [8] pour la démonstration de ce résultat.

Soit donc $c \in \mathbb{N}$ la dimension de $\mathrm{Hol}(M)$. L'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{Hol}(M)$ associée à $\mathrm{Hol}(M)$ est engendrée par c champs de vecteurs $X_1, \dots, X_c$ de type $(1,0)$ à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine et $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Bien qu'il s'agisse de champs de vecteurs complexes, $\mathfrak{Hol}(M)$ est une algèbre de Lie réelle et en particulier, ses constantes de structure sont des nombres réels. De plus, pour tout $X \in \mathfrak{Hol}(M)$, le fait que le flot réel $\exp(sX)(t)$, $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{C}^n$, stabilise M entraîne que le champ de vecteurs $X + \overline{X} = 2\,\mathrm{Re}\,X$ est tangent à M. Enfin, l'holomorphie des coefficients entraîne que $[X, \overline{Y}] = 0$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{Hol}(M)$. Il en découle que l'ensemble des champs de vecteurs réels de la forme $X + \overline{X}$, où X parcourt $\mathfrak{Hol}(M)$, constitue aussi une algèbre de Lie réelle de dimension réelle c, notée $\mathfrak{Aut}_{CR}(M)$ et que l'on appelle l'algèbre de Lie des *automorphismes infinitésimaux de* M. Comme nous allons le voir, on peut estimer la dimension de cette algèbre de Lie en associant à M un système d'équations aux dérivées partielles, grâce à un principe qui a été mis en lumière par A. Sukhov dans [20], [21] et qui remonte aux travaux de B. Segre [18] et de É. Cartan [1].

3.3. **Systèmes d'équations aux dérivées partielles associé.** Soit M une sous-variété analytique réelle passant par l'origine, minimale et ℓ_0-finiment non dégénérée en 0. Il existe des fonctions analytiques complexes $\Theta_1, \dots, \Theta_d$ satisfaisant $\Theta_k(0, \bar{z}, \bar{w}) = \bar{w}_k$, $k = 1, \dots, d$, telles que M soit représentée localement par les équations complexes

$$w_1 = \Theta_1(z, \bar{z}, \bar{w}), \dots, w_d = \Theta_d(z, \bar{z}, \bar{w}).$$

Soit $\mathcal{M}$ la *complexification* de M. C'est la sous-variété complexe de codimension d de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ équipé des coordonnées (z, w, ζ, ξ) donnée par les équations

$$w_1 = \Theta_1(z, \zeta, \xi), \dots, w_d = \Theta_d(z, \zeta, \xi).$$

Dans ces équations, considérons w comme une fonction de z et $(\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ comme des constantes. Soit $\beta \in \mathbb{N}^{n-d}$. En appliquant l'opérateur $\partial^{|\beta|}/\partial z^\beta$, on obtient

$$w_{k,z^\beta}(z) = \Theta_{k,z^k}(z, \zeta, \xi).$$

L'hypothèse que M est ℓ_0-finiment non dégénérée en 0 dit exactement que l'on peut résoudre toutes ces équations par rapport aux constantes (ζ, ξ). Plus précisément, il existe des multindices $\beta^1, \dots, \beta^{n-d} \in \mathbb{N}^{n-d}$ avec $1 \leq |\beta^j| \leq \ell_0$ et $\max_{1 \leq j \leq n-d} |\beta^j| = \ell_0$ et des applications analytiques complexes Φ et Ψ telles que

$$\begin{cases} \zeta = \Phi\left(z, w, w_{z^{\beta^1}}, \dots, w_{z^{\beta^{n-d}}}\right), \\ \xi = \Psi\left(z, w, w_{z^{\beta^1}}, \dots, w_{z^{\beta^{n-d}}}\right). \end{cases}$$

En remplaçant ces valeurs obtenues pour les constantes (ζ, ξ) dans les expressions $w_{k,z^\beta}(z) = \Theta_{k,z^k}(z, \zeta, \xi)$, on obtient le *système d'équations aux dérivées partielles associé à $\mathcal{M}$* :

$(\mathcal{E})$
$$\begin{cases} w_{z^\gamma}(z) = F_\gamma\left(z, w(z), w_{z^{\beta^1}}(z), \dots, w_{z^{\beta^{n-d}}}(z)\right), & |\gamma| = \ell_0 + 1, \\ w_{z^\beta}(z) = F_\beta\left(z, w(z), w_{z^{\beta^1}}(z), \dots, w_{z^{\beta^{n-d}}}(z)\right), & |\beta| \leq \ell_0,\ \beta \neq \beta^1, \dots, \beta^{n-d}. \end{cases}$$

Par construction, c'est un système complet, complètement intégrable. Réciproquement, étant donné un système complet, complètement intégrable de cette forme, en appliquant le théorème de Frobenius, on déduit l'existence d'un unique d-uplet de fonctions holomorphes $\Theta_k(z, \zeta, \xi)$ dépendants de constantes $(\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ telles que la solution générale de $(\mathcal{E})$ est donnée par $w_k = \Theta_k(z, \zeta, \xi)$. On peut alors définir la *variété associée des solutions* de $(\mathcal{E})$, qui est la sous-variété complexe de codimension d de $\mathbb{C}^{2n}$ définie par les équations $w_k = \Theta_k(z, \zeta, \xi)$.

Cependant, les fonctions Θ_k ne proviennent pas en général de la complexification $\mathcal{M}$ d'une hypersurface analytique réelle[1]. Par construction, l'application $\xi \mapsto \Theta(z, \zeta, \xi)$ est inversible. On peut donc représenter $\mathcal{M}$ par des équations équivalentes $\xi_k = \underline{\Theta}_k(\zeta, z, w)$, où l'application $\underline{\Theta}$ satisfait l'équation fonctionnelle $w \equiv \Theta(z, \zeta, \underline{\Theta}(\zeta, z, w))$[2]. Développons les fonctions Θ_k par rapport aux puissances de ζ, ce qui donne

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}^{n-d}} \zeta^\beta\, \Theta_{k,\beta}(z, w).$$

On dira alors que $\mathcal{M}$ est ℓ_0*-finiment non dégénérée en* 0 s'il existe des multiindices $\beta^1, \dots, \beta^{n-d} \in \mathbb{N}^{n-d}$ avec $1 \leq |\beta^j| \leq \ell_0$, $\max_{1 \leq j \leq n-d} |\beta^j| = \ell_0$ et des entiers $k^1, \dots, k^{n-d}$ avec $1 \leq k^j \leq d$ tels que l'application de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ définie par

$$(z, w) = t \mapsto \big(\Theta_{1,0}(t), \dots, \Theta_{d,0}(t), \Theta_{k^1,\beta^1}(t), \dots, \Theta_{k^{n-d},\beta^{n-d}}(t)\big)$$

est de rang n en 0. Il est facile de vérifer que cette définition coïncide avec la définition fournie dans le §3.1 dans le cas où $\mathcal{M}$ est la complexifiée d'une sous-variété analytique réelle.

Théorème 5. *Il existe une correspondance biunivoque entre les sou-variétés analytiques complexes ℓ_0-finiment nondégénérées $\mathcal{M}$ de codimension d dans $\mathbb{C}^{2n}$ données par $w_k = \Theta_k(z, \zeta, \xi)$, $k = 1, \dots, d$ et les systèmes d'équations aux dérivées partielles complètement intégrables de la forme $(\mathcal{E})$.*

3.4. **Groupe de symétrie de Lie de systèmes d'équations aux dérivées partielles.** En généralisant légèrement la définition de minimalité produite dans le §3.1, on dira que $\mathcal{M}$ est *minimale en* 0 si l'algèbre de Lie engendrée par les $2(n-d)$ champs de vecteurs tangents à $\mathcal{M}$

$$\mathcal{L}_j := \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^{n-d} \Theta_{k, z_j}(z, \zeta, \xi)\, \frac{\partial}{\partial w_k}, \qquad \underline{\mathcal{L}}_j := \frac{\partial}{\partial \zeta_j} + \sum_{k=1}^{n-d} \underline{\Theta}_{k, \zeta_j}(\zeta, z, w)\, \frac{\partial}{\partial \xi_k},$$

$j = 1, \dots, n-d$, et tous leurs crochets de Lie itérés de longueur quelconque, engendre $T_0\mathcal{M}$ en 0. On peut étudier maintenant l'ensemble des transformations ponctuelles locales qui stabilisent les graphes locaux de solutions du système $(\mathcal{E})$.

Théorème 6. *Soit $\mathcal{M}$ une sous-variété analytique complexe de codimension d de $\mathbb{C}^{2n}$ minimale et finiment non dégénérée en 0 (qui ne provient pas forcément de la complexification d'une sous-variété analytique réelle générique de $\mathbb{C}^n$) et soit $(\mathcal{E})$ le système d'équations aux dérivées partielles associé. L'algèbre de Lie $\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})$ est de dimension complexe finie $c \leq 2(d+1)\ell_0$.*

3.5. **Sous-algèbre de Lie totalement réelle maximale.** Revenons maintenant à l'étude du groupe des automorphismes holomorphes locaux $\mathrm{Hol}(M)$ d'une sous-variété générique analytique réelle de $\mathbb{C}^n$, minimale et ℓ_0-finiment non dégénérée en 0. Il est facile d'observer que le flot *complexe* de tout automorphisme infinitésimal $X \in \mathfrak{Hol}(M)$ stabilise tous les graphes de solutions du système d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{E})$ associé à la complexifiée $\mathcal{M}$ de M, c'est-à-dire tous les ensembles $\{(z, w) \in \mathbb{C}^n : w = \Theta(z, \zeta_0, \xi_0)\}$, où $(\zeta_0, \xi_0) \in \mathbb{C}^n$ est fixé. En tensorisant par $\mathbb{C}$, on obtient une algèbre de Lie *complexe* $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{Hol}(M)$. Le lien précis entre l'algèbre de Lie réelle des automorphismes infinitésimaux de M et l'algèbre de Lie complexe des symétries infinitésimales du système $(\mathcal{E})$ est donné par la relation

$$\mathfrak{Lie}(\mathcal{E}) = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{Hol}(M).$$

Observons qu'il n'existe pas de champ de vecteurs $X \in \mathfrak{Hol}(M)$ non nul tel que $iX \in \mathfrak{Hol}(M)$ (autrement X est tangent à M, ce qui contredit l'hypothèse que M est

[1] On démontre facilement que $\mathcal{M}$ est la complexifiée d'une hypersurface analytique réelle *si et seulement si* l'équation fonctionnelle $w \equiv \Theta(z, \bar{z}, \overline{\Theta}(\bar{z}, z, w))$ est satisfaite.

[2] Autrement dit, $\mathcal{M}$ est la complexifiée d'une hypersurface analytique réelle *si et seulement si* $\underline{\Theta}$ coïncide avec la conjuguée $\overline{\Theta}$ de l'application Θ.

ℓ_0-finiment non dégénérée en 0, et en particulier holomorphiquement non dégénérée). On en déduit :

Théorème 7. [7] *L'algèbre de Lie $\mathfrak{Hol}(M)$ des automorphismes infinitésimaux de M est une sous-algébre totalement réelle maximale de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})$ des symétries infinitésimales du système d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{E})$ associé à la complexifiée $\mathcal{M}$ de M. En particulier,*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{Hol}(M) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{Lie}(\mathcal{E}).$$

Pour terminer, citons un résultat qui découle implicitement de [2] et que nous redérivons, via le Théorème 7, comme corollaire du Théorème 3.

Théorème 8. [20] *Soit M une hypersurface analytique réelle, Levi non dégénérée dans $\mathbb{C}^n$. Alors $\dim(\mathfrak{Aut}_{CR}(M)) \leq n^2+4n+3$. De plus, $\dim(\mathfrak{Aut}_{CR}(M)) = n^2+4n+3$ si et seulement si M est localement biholomorphe à la sphère :*

$$M = \left\{(z_1, \ldots, z_{n-1}, w) : \operatorname{Im} w = |z_1|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2\right\}.$$

Nous allons terminer cette section par un autre exemple d'application de la théorie de Lie en géométrie CR.

3.6. **Hypersurfaces uniformément Levi dégénérées dans $\mathbb{C}^3$.** Si la classification des hypersurfaces homogènes, Levi non dégénérées de $\mathbb{C}^2$ a été réalisée par É. Cartan dans [1] en prenant appui sur la classification des actions de groupes de Lie locaux effectué par S. Lie dans [14], la situation en dimension supérieure reste bien mystérieuse. Il n'existe par exemple pas de liste exhaustive d'hypersurfaces analytiques réelles, Levi non dégénérées, homogènes, uniques à biholomorphisme près, résolvant le problème d'équivalence, analogue à la liste fournie par É. Cartan dans $\mathbb{C}^2$. Et que peut-on dire lorsque l'hypersurface à étudier n'est pas Levi non dégénérée ? Si M est une hypersurface de $\mathbb{C}^n$, définie localement à l'origine et passant par 0, on dit que M est *uniformément Levi dégénérée de rang r avec $0 \leq r \leq n-2$* si la forme de Levi est de rang constant égal à r sur M. D'après les rappels énoncés dans la sous-section 2.1, il existe ainsi quatre types différents d'hypersurfaces analytiques en un point générique[3] :

1. Les hypersurfaces Levi-plates, qui sont aussi 2-holomorphiquement dégénérées, et qui sont localement biholomorphes au produit $\mathbb{I} \times \Delta^2$, où Δ est le disque unité dans $\mathbb{C}$, et où $\mathbb{I}$ est le segment unité dans $\mathbb{R}$.

2. Les hypersurfaces 1-holomorphiquement dégénérées, qui sont localement biholomorphes à un produit $N \times \Delta$, où N est une hypersurface analytique réelle Levi non dégénérée de $\mathbb{C}^2$.

3. Les hypersurfaces 2-finiment non dégénérées et uniformément Levi dégénérées de rang un.

4. Les hypersurfaces Levi non dégénérées, dont le type de Levi est égal à un,

P. Ebenfelt a présenté dans [3] le tube complexe $\Gamma_{\mathbb{C}} = \Gamma + i\mathbb{R}^3$ construit au-dessus de la partie lisse du cône de lumière bidimensionel $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,\ x_3 \neq 0\}$, comme une hypersurface modèle parmi les hypersurfaces analytiques réelles

[3]Nous voulons dire par là qu'étant donnée une hypersurface analytique réelle connexe *arbitraire* M de $\mathbb{C}^3$, il existe un sous-ensemble analytique réel *strict* V de M tel que localement, au voisinage de tout point p de $M \backslash V$, l'hypersurface M est représentable comme l'un des quatre types suivants.

de $\mathbb{C}^3$, uniformément Levi dénégénérées, 2-finiment non dégénérées, en caractérisant $\Gamma_{\mathbb{C}}$ par l'annulation d'une certaine courbure pour une connexion qui n'est pas "de Cartan" (ce qui contraste avec l'approche de S.S. Chern et J.K. Moser [2]). Il montre de plus que pour toute hypersurface M analytique réelle de $\mathbb{C}^3$, uniformément Levi dénégénérée, 2-finiment non dégénérée, l'algèbre d'isotropie de (M,p), c'est-à-dire la sous-algèbre de $\mathfrak{Aut}_{CR}(M,p)$ des champs s'annulant en $p \in M$ et notée $\mathfrak{Aut}_{CR}(M)$, est de dimension inférieure ou égale à deux (ce qui implique que $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{Aut}_{CR}(M) \leq 7$, puisque $\dim_{\mathbb{R}} M = 5$). Sachant qu'il est bien connu par ailleurs que $\Gamma_{\mathbb{C}}$ est homogène, que l'algèbre de Lie de $\Gamma_{\mathbb{C}}$ est le produit direct de l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{O}(2,1)$ avec $\mathbb{R}^4$, *i.e.* $\mathfrak{Aut}_{CR}(\Gamma_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{o}(2,1) \oplus \mathbb{R}^4$, on a $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{Aut}_{CR}(\Gamma_{\mathbb{C}}) = 7$ et l'algèbre de Lie isotrope $\mathfrak{Aut}_{CR}(\Gamma_{\mathbb{C}}, p)$ est de dimension deux, non commutative. On peut alors se demander si $\Gamma_{\mathbb{C}}$ peut être caractérisée par le fait que son algèbre de Lie isotrope est de dimension maximale. Nous avons montré dans [6] qu'il n'en est rien, en exhibant une hypersurface analytique réelle de $\mathbb{C}^3$, 2-finiment non dégénérée, uniformément Levi dégénérée, qui n'est pas biholomorphe à $\Gamma_{\mathbb{C}}$:

Théorème 9. [6] *L'hypersurface*

$$M_0 = \{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3 : \, w + \bar{w} = 2z_1\bar{z}_1 + z_1^2\bar{z}_2 + \bar{z}_1^2 z_2/(1 - z_2\bar{z}_2), \ |z_2| < 1\}$$

est 2-finiment non dégénérée, uniformément Levi dégénérée dans $\mathbb{C}^3$ et homogène. De plus, l'algèbre de Lie isotrope $\mathfrak{Aut}_{CR}(M_0, 0)$ est de dimension réelle deux, commutative. Par conséquent, si $p \in \Gamma_{\mathbb{C}}$, il n'existe pas de biholomorphisme local f de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $f(\Gamma_{\mathbb{C}}, p) = (M_0, 0)$.

Démonstration. Résumons les calculs qui conduisent à une expression explicite de $\mathfrak{Aut}_{CR}(M_0)$. Tout d'abord, expliquons la méthode qui nous a conduits à l'expression de l'équation définissante de M_0. Soit M une hypersurface analytique réelle dans $\mathbb{C}^3$, définie au voisinage de l'origine par l'équation $w + \overline{w} = F(z, \overline{z})$, où $z = (z_1, z_2)$. Supposons M uniformément Levi dégénérée, c'est-à-dire que la forme de Levi de M a exactement une valeur propre nulle sur M. Sans perte de généralité, après diagonalisation de la forme de Levi en 0, on a $F(z, \bar{z}) = z_1\bar{z}_1 + \mathrm{O}(3)$. On développe ensuite $F(z, \bar{z}) = z_1\bar{z}_1 + \sum_{k\geq 3} F^k(z, \bar{z})$, où F^k est un polynôme homogène de degré k en $z, \overline{z}$. Par hypothèse, le déterminant de Levi de M doit être identiquement nul :

$$\begin{vmatrix} 1 + \sum_{k\geq 3} F^k_{z_1\bar{z}_1} & \sum_{k\geq 3} F^k_{z_2\bar{z}_1} \\ \sum_{k\geq 3} F^k_{z_1\bar{z}_2} & \sum_{k\geq 3} F^k_{z_2\bar{z}_2} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

En particulier $F^3_{z_2\bar{z}_2} \equiv 0$ dans un voisinage de l'origine, et il existe des constantes complexes a_{2100}, a_{2001}, a_{1110} et a_{0120} telles que : $F^3(z, \bar{z}) = a_{2100}z_1^2\bar{z}_1 + a_{2001}z_1^2\bar{z}_2 + a_{1110}z_1z_2\bar{z}_1 + a_{0120}z_2^2\bar{z}_1 + \overline{a_{2100}}z_1\bar{z}_1^2 + \bar{a}_{2001}z_2\bar{z}_1^2 + \overline{a_{1110}}z_1\bar{z}_1\bar{z}_2 + \overline{a_{0120}}z_1\bar{z}_2^2$.

La transformation $z \mapsto y = (y_1, y_2) := (z_1 + a_{2100}z_1^2 + a_{1110}z_1z_2 + a_{0120}z_2^2, z_2)$ est un biholomorphisme local à l'origine. Dans les coordonnées (w, y_1, y_2), M est représentée par $M = \{w + \bar{w} = y_1\bar{y}_1 + a_{2001}y_1^2\bar{y}_2 + \overline{a_{2001}}\bar{y}_1^2 y_2 + \sum_{k\geq 4} G^k(y, \bar{y})\}$, G^k étant un polynôme homogène de degré k en $(y, \bar{y})$. Comme M est 2-finiment non dégénérée, on vérifie que $a_{2001} \neq 0$ et après une dilatation, nous pouvons écrire :

$$M = \{w + \bar{w} = y_1\bar{y}_1 + y_1^2\bar{y}_2 + \bar{y}_1^2 y_2 + G^4(y, \bar{y}) + \cdots\}.$$

Ecrivons à nouveau z au lieu de y dans l'équation de M. L'annulation du déterminant de Levi (2.2) est alors équivalente aux équations suivantes :

$$\begin{cases} G^4_{z_2\bar{z}_2} & \equiv & 4z_1\bar{z}_1 \\ G^5_{z_2\bar{z}_2} & \equiv & 2(z_1G^5_{z_1\bar{z}_2}+\bar{z}_1G^5_{z_2\bar{z}_1}) \\ G^k_{z_2\bar{z}_2} & \equiv & 2(z_1G^{k-1}_{z_1\bar{z}_2}+\bar{z}_1G^{k-1}_{z_2\bar{z}_1})+\sum_{j=4}^{k-2}G^j_{z_1\bar{z}_2}G^{k+2-j}_{z_2\bar{z}_1}, \text{ pour } k\geq 6. \end{cases}$$

En posant toutes les constantes d'intégration nulles dans ces équations nous obtenons l'équations de M_0. En résumé, M_0 est construite de la façon la plus simple possible à partir de la condition d'annulation du déterminant de Levi.

Revérifions maintenant que M_0 est bien uniformément Levi dégénérée de rang un. Les champs CR de type $(1,0)$ tangents à M sont engendrés par

$$\begin{cases} L_1 := \dfrac{\partial}{\partial z_1}+\left[\dfrac{2\bar{z}_1+2z_1\bar{z}_2}{1-z_2\bar{z}_2}\right]\dfrac{\partial}{\partial w}, \\ L_2 := \dfrac{\partial}{\partial z_2}+\left[\dfrac{(\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2)^2}{(1-z_2\bar{z}_2)^2}\right]\dfrac{\partial}{\partial w}. \end{cases}$$

Alors le noyau de la forme de Levi est engendré en tout point par

$$T := -\left[\frac{\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2}{1-z_2\bar{z}_2}\right]\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2}-\left[\frac{(\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2)^2}{(1-z_2\bar{z}_2)^2}\right]\frac{\partial}{\partial w}.$$

En effet, on calcule les crochets

$$[L_1,\overline{T}] = -\left(\frac{1}{1-z_2\bar{z}_2}\right)\overline{L_1}, \qquad [L_2,\overline{T}] = -\left(\frac{\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2}{(1-z_2\bar{z}_2)^2}\right)\overline{L_1}.$$

Il découle d'un théorème attribué à F. Sommer et simplifié par M. Freeman que les hypersurfaces uniformément Levi dégénérées de rang r sont feuilletées par des plans complexes de dimension r. Dans notre cas, M_0 est feuilletée par les droites complexes $z_1 := z_0-\bar{z}_0\zeta$, $z_2 := \zeta$, $w := z_0\bar{z}_0+i\lambda-\zeta\bar{z}_0^2$, où $z_0\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et où $\zeta\in\mathbb{C}$ satisfait $|\zeta|<1$.

Notre calcul de l'algèbre de Lie $\mathfrak{Aut}_{CR}(M)$ est basé sur la théorie de Lie présentée dans la Section 1. Nous voudrions mentionner que le calcul direct par la méthode classique (*cf.* [2]) nécessite la résolution d'une soixantaine équations linéaires aux dérivées partielles comportant dix-sept inconnues, alors que la théorie de Lie restreint l'étude à la résolution de neuf équations linéaires à trois inconnues. En suivant la méthode de Lie, écrivons $(x_1,x_2,u,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u})$ les variables $(z_1,z_2,w,\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{w})$ et considérons $\bar{u}$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ comme des paramètres complexes, x_1, x_2 comme des variables indépendantes et u comme fonction de x_1, x_2 dans l'équation définissante de M_0. Les dérivées d'ordre un :

$$u_{x_1} = \frac{2(\bar{x}_1+x_1\bar{x}_2)}{1-x_2\bar{x}_2}, \qquad u_{x_1^2} = \frac{2\bar{x}_2}{1-x_2\bar{x}_2}$$

permettent d'exprimer toutes les autres dérivée $u_{x_1^k x_2^l}$ et notamment :

$$\begin{cases} u_{x_2} = \frac{1}{4}(u_{x_1})^2, & u_{x_1^3} = 0, \\ u_{x_1x_2} = \frac{1}{2}\, u_{x_1}\, u_{x_1^2}, & u_{x_1^2x_2} = \frac{1}{2}\,(u_{x_1^2})^2, \\ u_{x_2^2} = \frac{1}{4}\,(u_{x_1})^2\, u_{x_1^2}, & u_{x_1x_2^2} = \frac{1}{2}\, u_{x_1}\,(u_{x_1^2})^2, \\ & u_{x_2^3} = \frac{3}{8}\,(u_{x_1})^2\,(u_{x_1^2})^2. \end{cases}$$

On va calculer le groupe de symétrie de Lie de ce système. Soit $J^3_{2,1}(\mathbb{C})$ l'espace des jets des dérivées partielles d'ordre 3 de u dépendant de x_1, x_2, équipé des coordonnées

$$(x_1, x_2, u, U_1^1, U_1^2, U_{1,1}^2, U_{1,2}^2, U_{2,2}^2, U_{1,1,1}^3, U_{1,1,2}^3, U_{1,2,2}^3, U_{2,2,2}^3).$$

Le squelette de notre système est donné par

$$\begin{cases} U_2^1 = \frac{1}{4}\,(U_1^1)^2, & U_{1,1,1}^3 = 0, \\ U_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\, U_1^1\, U_{1,1}^2, & U_{1,1,2}^3 = \frac{1}{2}\,(U_{1,1}^2)^2, \\ U_{2,2}^2 = \frac{1}{4}\,(U_1^1)^2\, U_{1,1}^2, & U_{1,2,2}^3 = \frac{1}{2}\, U_1^1\,(U_{1,1}^2)^2, \\ & U_{2,2,2}^3 = \frac{3}{8}\,(U_1^1)^2\,(U_{1,1}^2)^2. \end{cases}$$

Soit $X = Q^1\partial/\partial x_1 + Q^2\partial/\partial x_2 + R\partial/\partial u$ un champ de vecteurs dans l'espace des (x_1, x_2, u). Son prolongement d'ordre trois :

$$\begin{cases} X^3 = X + \sum_{1\leq j_1\leq 2} R_{j_1}^1\, \frac{\partial}{\partial U_{j_1}^1} + \sum_{1\leq j_1,j_2\leq 2} R_{j_1,j_2}^2\, \frac{\partial}{\partial U_{j_1,j_2}^2} + \\ \qquad + \sum_{1\leq j_1,j_2,j_3\leq 2} R_{j_1,j_2,j_3}^3\, \frac{\partial}{\partial U_{j_1,j_2,j_3}^3}, \end{cases}$$

possède des coefficients $R_{j_1}^1$, R_{j_1,j_2}^2, R_{j_1,j_2,j_3}^3, $j_i = 1, 2$, qui sont calculés par induction conformément à la Section 1. Leur expression explicite est relativement complexe et pourrait facilement être programmée sur Maple ou sur Mathematica, mais nous l'avons détaillée à la main. En appliquant le critère de Lie (Théorème 1), la condition de tangence de X^3 au squelette conduit aux équations :

$$\begin{cases} R_2^1 = \frac{1}{2}\, R_1^1 U_1^1, & R_{1,1,1}^3 = 0, \\ R_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\,(R_{1,1}^2 U_1^1 + R_1^1 U_{1,1}^2), & R_{1,1,2}^3 = R_{1,1}^2 U_{1,1}^2, \\ R_{2,2}^2 = \frac{1}{2} R_1^1 U_1^1 U_{1,1}^2 + \frac{1}{4}\, R_{1,1}^2 (U_1^1)^2, & R_{1,2,2}^3 = \frac{1}{2}\, R_1^1 (U_{1,1}^2)^2 + R_{1,1}^2 U_1^1, \\ & R_{2,2,2}^3 = \frac{3}{4}\, R_1^1 U_1^1 (U_{1,1}^2)^2 + R_{1,1}^2 (U_1^1)^2 U_{1,1}^2. \end{cases}$$

En utilisant les expressions explicites (que nous n'avons pas reproduites) des coefficients $R_{j_1}^1$, R_{j_1,j_2}^2, R_{j_1,j_2,j_3}^3 et en réordonnant les termes comme cela se fait habituellement en théorie de Lie, on obtient des équations aux dérivées partielles linéaires satisfaites par (Q^1, Q^2, R), dont les plus marquantes sont les neufs équations suivantes, qui permettent de déterminer complètement toutes les symétries de Lie :

$$
\begin{cases}
\text{Terme constant dans } R_2^1 = \frac{1}{2}R_1^1U_1^1 : & R_{x_2} = 0, \\
U_1^1 \text{ terme dans } R_2^1 = \frac{1}{2}R_1^1U_1^1 : & Q^1_{x_2} = -\frac{1}{2}R_{x_1}, \\
(U_1^1)^2 \text{ terme dans } R_2^1 = \frac{1}{2}R_1^1U_1^1 : & \frac{1}{4}Q^2_{x_2} = \frac{1}{2}Q^1_{x_1} - \frac{1}{4}R_u, \\
(U_1^1)^3 \text{ terme dans } R_2^1 = \frac{1}{2}R_1^1U_1^1 : & \frac{1}{4}Q^1_u = -\frac{1}{8}Q^2_{x_1}, \\
(U_1^1)^4 \text{ terme dans } R_2^1 = \frac{1}{2}R_1^1U_1^1 : & \frac{1}{16}Q^2_u = 0, \\
(U_1^1)^2 \text{ terme dans } R_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(R_{1,1}^2U_1^1 + R_1^1U_{1,1}^2) : & -Q^1_{ux_2} + \frac{1}{4}(R_{ux_1} - Q^2_{x_1x_2}) = \\
& = \frac{1}{2}(2R_{ux_1} - Q^1_{x_1^2}), \\
(U_1^1)^3 \text{ terme dans } R_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(R_{1,1}^2U_1^1 + R_1^1U_{1,1}^2) : & \frac{1}{4}(R_{u^2} - Q^1_{ux_1} - Q^2_{ux_2}) = \\
& = \frac{1}{2}(R_{u^2} - 2Q^1_{ux_1} - \frac{1}{4}Q^2_{x_1^2}), \\
\text{Terme constant dans } R_{1,1,1}^3 = 0 : & R_{x_1^3} = 0, \\
(U_{1,1}^2)^2 \text{ terme dans } R_{1,1,1}^3 = 0 : & -\frac{5}{2}Q^2_{x_1} - 3Q^1_u = 0.
\end{cases}
$$

Après résolution de ce dernier système linéaire, on obtient alors la forme générale d'un champ de vecteur qui est symétrie de Lie de notre système non linéaire :

$$
\begin{cases}
X = (\gamma + \delta x_1 + \alpha x_2 + \beta x_1 x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\mu + (2\delta + \varepsilon)x_2 + \beta x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \\
\qquad + (\lambda - 2\alpha x_1 - \varepsilon u - \beta x_1^2)\frac{\partial}{\partial u},
\end{cases}
$$

où les coefficients α, β, γ, δ, ε, λ, μ sont des constantes complexes.

En appliquant le Théorème 7, on en déduit qu'une base des automorphismes infinitésimaux de M_0 est donnée par les parties réelles de combinaisons linéaires complexes de ces générateurs :

$$\begin{cases} X^1 &= i\frac{\partial}{\partial w}, \\ X^2 &= z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + 2w\frac{\partial}{\partial w}, \\ X^3 &= i(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2}), \\ X^4 &= (z_2-1)\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_1\frac{\partial}{\partial w}, \\ X^5 &= i((1+z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_1\frac{\partial}{\partial w}), \\ X^6 &= z_1z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + (z_2^2-1)\frac{\partial}{\partial z_2} - z_1^2\frac{\partial}{\partial w}, \\ X^7 &= i(z_1z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + (z_2^2+1)\frac{\partial}{\partial z_2} - z_1^2\frac{\partial}{\partial w}). \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que M_0 est homogène. De plus, l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{Aut}_{CR}(M_0,0)$ est engendrée sur $\mathbb{R}$ par les parties réelles de X^2 and X^3 et elle est donc commutative, puisque $[X^2,X^3]=0$.

De plus, $\Gamma_{\mathbb{C}}$ étant invariant sous l'action des translations dans les directions du tube, des dilatations et des automorphismes de la forme quadratique réelle $x_1^2+x_2^2-x_3^2$, l'algèbre de Lie de ses automorphismes infinitésimaux est engendrée par les parties réelles des champs de vecteurs holomorphes :

$$\begin{cases} Y^1 = i\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \quad Y^2 = i\dfrac{\partial}{\partial z_2}, \quad Y^3 = i\dfrac{\partial}{\partial z_3}, \\ Y^4 = z_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + z_2\dfrac{\partial}{\partial z_2} + z_3\dfrac{\partial}{\partial z_3}, \quad Y^5 = z_2\dfrac{\partial}{\partial z_1} - z_1\dfrac{\partial}{\partial z_2}, \\ Y^6 = z_3\dfrac{\partial}{\partial z_1} + z_1\dfrac{\partial}{\partial z_3}, \quad Y^7 = z_3\dfrac{\partial}{\partial z_2} + z_2\dfrac{\partial}{\partial z_3}. \end{cases}$$

Le tube $\Gamma_{\mathbb{C}}$ étant homogène, on peut étudier sa géométrie locale au voisinage du point $p_0 := (1,0,1)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{Aut}_{CR}(\Gamma_{\mathbb{C}},p_0)$ est engendrée par les deux champs de vecteurs $K_1 = \mathrm{Re}(Y_4 - Y_6)$ and $K_2 = \mathrm{Re}(Y_5+Y_7)$, vérifiant $[2K_1,2K_2]=2K_2$. Il en découle que les algèbres d'isotropie $\mathfrak{Aut}_{CR}(\Gamma_{\mathbb{C}},p)$ sont toutes non commutatives. Ainsi, $(\Gamma_{\mathbb{C}},p)$ et $(M_0,0)$ ne sont pas équivalentes. □

4. Algébricité locale de sous-variétés analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$

Une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$ est dite *algébrique* (au sens de J. Nash) si elle est définie localement par l'annulation de polynômes réels et *localement algébrisable* en un de ses points p s'il existe un système de coordonnées holomorphes locales centré en p dans lequel elle est algébrique. X. Huang, S. Ji et S.T. Yau ont récemment présenté dans [12] le premier exemple explicite $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : \mathrm{Im}\, w = \exp(z\bar{z})\}$ d'une hypersurface analytique réelle Levi non dégénérée de $\mathbb{C}^2$, algébrisable en aucun de ses points. Nous présentons ici des conditions nécessaires d'algébrisabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques, de codimension quelconque dans $\mathbb{C}^n$, ce qui nous permet d'exhiber des familles entières de sous-variétés analytiques réelles, non localement algébrisables dans $\mathbb{C}^n$. La présentation que nous en donnons est tirée de [9].

4.1. **Présentation des résultats.** Les notions utilisées ont été définies dans la présentation générale de la Section 3. Nous commençons par présenter une version précisée du Théorème 4, ingrédient essentiel dans la démonstration des Théorèmes suivants. Nous renvoyons le lecteur à [8] pour la démonstation de ce résultat.

Théorème 10. *Soit M une sous-variété générique algébrique réelle de $\mathbb{C}^n$, passant par l'origine, minimale et finiment non dégénérée en 0. Les trois conditions suivantes sont satisfaites :*
(a) *Le (pseudo)groupe G_M des biholomorphismes locaux de $\mathbb{C}^n$ définis au voisinage de 0 et stabilisant M est un groupe de Lie local algébrique réel de dimension finie m, ne dépendant que de la géométrie locale de M au voisinage de l'origine.*
(b) *Il existe une application* algébrique *H_M, constructible algorithmiquement à partir des équations définissantes de M, définie au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, vérifiant $H_M(t,0) \equiv t$, et telle que toute application holomorphe h, définie au voisinage de l'origine, suffisamment proche de l'identité et stabilisant M, vérifie $h = H_M(.,e_h)$ pour un unique $e_h \in \mathbb{R}^m$.*
(c) *L'application $(t,e) \mapsto H_M(t,e)$ définit un groupe de Lie local algébrique de biholomorphismes algébriques stabilisant M.*

Considérons maintenant la famille $\mathcal{T}_n^d$ des sous-variétés analytiques réelles génériques de $\mathbb{C}^n$, définies au voisinage de l'origine, de codimension d, minimales et finiment non dégénérées en 0, dont le groupe G_M est commutatif, de dimension n. Il existe alors, pour tout élément M de $\mathcal{T}_n^d$, un système local de coordonnées holomorphes centré à l'origine $(z,w) = (x+iy, u+iv) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ et d fonctions analytiques réelles $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ s'annulant en 0, tels que M est représentée au voisinage de 0 par les équations $v_1 = \varphi_1(y), \ldots, v_d = \varphi_d(y)$. Dans ce cas, M est finiment non dégénéré en 0 si et seulement s'il existe $(n-d)$ multiindices $\beta^1, \ldots, \beta^{n-d} \in \mathbb{N}^{n-d}$ de longueur strictement positive et des entiers $1 \leq k_1, \ldots, k_{n-d} \leq d$ tels que l'application réelle

$$\psi(y) := \left(\frac{\partial^{|\beta^1|}\varphi_{k_1}(y)}{\partial y^{\beta^1}}, \ldots, \frac{\partial^{|\beta^{n-d}|}\varphi_{k_{n-d}}(y)}{\partial y^{\beta^{n-d}}} \right)$$

est de rang $(n-d)$ à l'origine dans $\mathbb{R}^{n-d}$ (*cf.* [8] Lemme 3.2). On note $y' \mapsto (\psi'_1(y'), \ldots, \psi'_{n-d}(y'))$ l'application réciproque de ψ. On a le théorème suivant :

Théorème 11. *Soit M appartenant à $\mathcal{T}_n^d$, définie par les équations $v_1 = \varphi_1(y), \ldots, v_d = \varphi_d(y)$, minimale et finiment non dégénérée en 0. Si M est localement algébrisable à l'origine, les dérivées partielles $\partial\psi'_j/\partial y'_l$ sont algébriques réelles pour $1 \leq j, l \leq n-d$.*

Cette condition d'algébrisabilité locale s'exprime très simplement pour une hypersurface Levi non dégénérée de $\mathbb{C}^n$, définie par l'équation $v = \varphi(y)$: les fonctions $\partial\psi'_j/\partial y'_l$ sont algébriques réelles pour $1 \leq j, l \leq n-1$ si et seulement si les dérivées partielles secondes $\partial^2\varphi/\partial y_j \partial y_l$ sont des fonctions algébriques des dérivées partielles premières $\partial\varphi/\partial y_1, \ldots, \partial\varphi/\partial y_{n-1}$ pour $1 \leq j, l \leq n-1$. Le Théorème 11 montre qu'un élément de $\mathcal{T}_n^d$ pour lequel une dérivée $\partial\psi'_j/\partial y'_l$ n'est pas algébrique réelle (ce qui est génériquement le cas au sens de Baire) n'est pas localement algébrisable à l'origine. Le Corollaire 1 présente une famille explicite d'exemples de sous-variétés analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$, qui ne sont pas localement algébrisables à l'origine :

Corollaire 1. [8] **(a)** *Soient $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$ des fonctions analytiques réelles arbitraires, définies au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$. L'hypersurface M de $\mathbb{C}^n$ d'équation $v = \sum_{k=1}^{n-1} [y_k^2 + y_k^6 + y_k^9 y_1 \cdots y_{k-1} + y_k^{n+8} \chi_k(y_1, \dots, y_{n-1})]$ appartient à la famille $\mathcal{T}_n^1$. De plus, pour un choix générique (au sens de Baire) de $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$, M n'est pas localement algébrisable à l'origine.*

(b) *Les hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$ d'équations $v = \sin(y^2)$, $v = \sinh(y^2)$ et $v = \exp(\exp(y) - 1) - 1$ appartiennent à $\mathcal{T}_2^1$ et ne sont pas localement algébrisables à l'origine.*

On vérifie que ces hypersurfaces M appartiennent à la famille $\mathcal{T}_n^1$ en leur associant un système d'équations aux dérivées partielles comme pour l'exemple étudié dans la Section 3 ci-dessus et en utilisant la théorie analytique des symétries de Lie.

4.2. **Résumé de la démonstration du Théorème 10.** Soit $M \in \mathcal{T}_n^d$ et soit Φ un biholomorphisme local, vérifiant $\Phi(0) = 0$, tel que $M' := \Phi(M)$ est algébrique, minimale et finiment non dégénérée en 0. L'algèbre de Lie réelle des automorphismes infinitésimaux de M étant engendrée par les champs $\partial/\partial t_1, \dots, \partial/\partial t_n$, l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de M' est commutative, de dimension n, engendrée par les champs $X_1' = \Phi_*(\partial/\partial t_1), \dots, X_n' = \Phi_*(\partial/\partial t_n)$. On commence par redresser algébriquement les feuilletages holomorphes induits par $X_1', \dots, X_n'$, en utilisant l'algébricité de l'application $H_{M'}$ et la commutativité du groupe $G_{M'}$ données dans le Théorème 10. La démonstration est standard, voir [8].

Proposition 1. *Il existe un biholomorphisme algébrique complexe Ψ, défini au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, et n fonctions algébriques complexes $c_1, \dots, c_n$, vérifiant $c_j(0) = 1$, tels que l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de $M'' := \Psi(M')$ est engendrée par les champs $X_j'' := \Psi_*(X_j') = c_j(t_j)\partial/\partial t_j$, $1 \le j \le n$.*

Admettons cette proposition et esquissons le raisonnement qui conduit à l'algébricité des dérivées partielles $\partial\psi_j'/\partial y_l'$. D'après [2], il existe des coordonnées $t = (z_1, \dots, z_{n-d}, w_1, \dots, w_d)$ dans lesquelles on peut représenter M'' par les équations $w_k = \overline{\Theta}_k(z, \bar{z}, \bar{w})$, $k = 1, \dots, d$, où $\overline{\Theta}_k$ est une fonction algébrique complexe. On note maintenant , $(\Psi \circ \Phi)^{-1} = (f_1, \dots, f_{n-d}, g_1, \dots, g_d)$ et $(c_1, \dots, c_n) = (a_1, \dots, a_{n-d}, b_1, \dots, b_d)$. L'application $\Psi \circ \Phi$ vérifiant $(\Psi \circ \Phi)_*(\partial/\partial t_j) = c_j(t_j)\partial/\partial t_j$, on a les identités $a_j(z_j)(\partial f_j/\partial z_j)(z_j) \equiv b_k(w_k)(\partial g_k/\partial w_k)(w_k) \equiv 1$, ce qui montre que $\partial f_j/\partial z_j$ et $\partial g_k/\partial w_k$ sont algébriques pour $1 \le j \le n-d$ et $1 \le k \le d$. La condition $(\Psi \circ \Phi)(M) = M''$ donne, pour $k = 1, \dots, d$, les identités suivantes dans $\mathbb{C}\{z, \bar{z}, \bar{w}\}$:

$$\frac{g_k(\overline{\Theta}_k(z, \bar{z}, \bar{w})) - \bar{g}_k(\bar{w}_k)}{2i} \equiv \varphi_k \left(\frac{f_1(z_1) - \bar{f}_1(\bar{z}_1)}{2i}, \dots, \frac{f_{n-d}(z_{n-d}) - \bar{f}_{n-d}(\bar{z}_{n-d})}{2i} \right).$$

En les différentiant par rapport à z_j pour $j = 1, \dots, n-d$, on obtient :

$$\frac{a_j(z_j)(\partial\overline{\Theta}_k/\partial z_j)(z, \bar{z}, \bar{w})}{b_k(\overline{\Theta}_k(z, \bar{z}, \bar{w}))} \equiv \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \left(\frac{f_1(z_1) - \bar{f}_1(\bar{z}_1)}{2i}, \dots, \frac{f_{n-d}(z_{n-d}) - \bar{f}_{n-d}(\bar{z}_{n-d})}{2i} \right).$$

Le membre de gauche de cette dernière équation est une fonction algébrique complexe (l'algébricité est stable par différentiation), indépendante de la variable w. Pour $1 \leq l \leq n-d$, on applique l'opérateur $\partial^{|\beta^l|}/\partial z^{\beta^l}$ à la première identité écrite avec $k = k_l$. Il existe alors des fonctions algébriques réelles A_{k_l,β^l} vérifiant :

$$A_{k_l,\beta^l}(z,\bar{z}) \equiv \frac{\partial^{|\beta^l|}\varphi_{k_l}}{\partial y^{\beta^l}} \left(\frac{f_1(z_1) - \bar{f}_1(\bar{z}_1)}{2i}, \dots, \frac{f_{n-d}(z_{n-d}) - \bar{f}_{n-d}(\bar{z}_{n-d})}{2i} \right).$$

L'application ψ définie avant l'énoncé du Théorème 9 étant de rang $n-d$, on obtient pour $j = 1, \dots, n-d$ l'identité $f_j(z_j) - \bar{f}_j(\bar{z}_j) \equiv 2i\,\psi_j'(A_{k_1,\beta^1}(z,\bar{z}), \dots, A_{k_{n-d},\beta^{n-d}}(z,\bar{z}))$. La différentiation de cette identité par rapport à z_j et à z_m pour $m \neq j$ fournit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2i\,a_j(z_j)} \equiv \displaystyle\sum_{l=1}^{n-d} \frac{\partial \psi_j'}{\partial y_l'}(A_{k_1,\beta^1}(z,\bar{z}), \dots, A_{k_{n-d},\beta^{n-d}}(z,\bar{z}))\, \frac{\partial A_{k_l,\beta^l}}{\partial z_j}(z,\bar{z}), \\ \qquad\qquad 0 \equiv \displaystyle\sum_{l=1}^{n-d} \frac{\partial \psi_j'}{\partial y_l'}(A_{k_1,\beta^1}(z,\bar{z}), \dots, A_{k_{n-d},\beta^{n-d}}(z,\bar{z}))\, \frac{\partial A_{k_l,\beta^l}}{\partial z_m}(z,\bar{z}), \qquad m \neq j. \end{cases}$$

Puisque $a_j(0) = 1$ pour tout $1 \leq j \leq n-d$, la matrice $((\partial A_{k_l,\beta^l}/\partial z_j)(0,0))_{1\leq j,l\leq n-d}$ est inversible et il existe donc des fonctions algébriques complexes $B_{j,l}(z,\bar{z})$, définies pour $1 \leq j,l \leq n-d$, telles que $(\partial\psi_j'/\partial y_l')(A(z,\bar{z})) := (\partial\psi_j'/\partial y_l')(A_{k_1,\beta^1}(z,\bar{z}), \dots, A_{k_{n-d},\beta^{n-d}}(z,\bar{z})) \equiv B_{j,l}(z,\bar{z})$. Enfin, la fonction A_{k_l,β^l} étant réelle et la matrice $((\partial A_{k_l,\beta^l}/\partial z_j)(0,0))_{1\leq j,l\leq n-d}$ étant inversible, le jacobien à l'origine de l'application $y \mapsto A(iy, -iy) =: y'$ est non nul. Il existe donc une application algébrique réelle C telle que $(\partial\psi_j'/\partial y_l')(y') \equiv B_{j,l}(iC(y'), -iC(y'))$, ce qui prouve l'algébricité de $\partial\psi_j'/\partial y_l'$ pour $1 \leq j,l \leq n-d$. □

RÉFÉRENCES

[1] CARTAN, É. : *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, I*, Annali di Mat. **11** (1932), 17–90.

[2] CHERN, S.S. ; MOSER, J.K. : *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), no.2, 219–271.

[3] EBENFELT, P. : *Uniformly Levi degenerate CR manifolds ; the 5-dimensional case*, Duke Math. J. **110** (2001), no.1, 37–80.

[4] F. ENGEL ; LIE, S. : *Theorie der Transformationsgruppen, I, II, II*, Teubner, Leipzig, 1889, 1891, 1893.

[5] GAUSSIER, H. ; MERKER, J. : *Estimates on the dimension of the symmetry group of a system of k-order partial differential equations*, Université de Provence, Prépublication LATP, **12**, 2001, 27 pp.

[6] GAUSSIER, H. ; MERKER, J. : *A new example of uniformly Levi degenerate hypersurface in $\mathbb{C}^3$*, Ark. Mat. (to appear).

[7] GAUSSIER, H. ; MERKER, J. : *Symmetries of differential equations and infinitesimal CR automorphisms of real analytic CR submanifolds of $\mathbb{C}^n$*, manuscript 2001, 34 pp.

[8] GAUSSIER, H. ; MERKER, J. : *Nonalgebraizable real analytic tubes in $\mathbb{C}^n$*, Prépublication LATP, **17**, 2002, 36 pp.

[9] GAUSSIER, H. ; MERKER, J. : *Sur l'algébrisabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques de $\mathbb{C}^n$*, projet de Note au C. R. Acad. Sci. soumis le 11/10/02.

[10] GONZÀLES-GASCÒN, F. and GONZÀLES-LÒPEZ, A. : *Symmetries of differential equations, IV*. J. Math. Phys. **24** (1983), 2006–2021.

[11] GONZÀLEZ-LÒPEZ, A. : *Symmetries of linear systems of second order differential equations*, J. Math. Phys. **29** (1988), 1097–1105.

[12] Huang, X., Ji, S., Yau, S.S., An example of a real analytic strongly pseudoconvex hypersurface which is not holomorphically equivalent to any algebraic hypersurface, Ark. Mat. 39 (2001), no. 1, 75–93.

[13] IBRAGIMOV, N.H. : *Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics*, Russian Math. Surveys **47** :4 (1992), 89–156.

[14] LIE, S. : *Theorie der Transformationsgruppen*, Math. Ann. **16** (1880), 441–528.

[15] OLVER, P.J. : *Applications of Lie groups to differential equations*. Springer Verlag, Heidelberg, 1986.

[16] OLVER, P.J. : *Equivalence, Invariance and Symmetries*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995, xvi+525 pp.

[17] POINCARÉ, H. : *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II, Ser. **23**, 185–220.

[18] SEGRE, B. : *Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudoconforme*, Rend. Acc. Lincei, VI, Ser. **13** (1931), 676–683.

[19] SEGRE, B. : *Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse*, Rendiconti del Seminario di Matematici di Roma, II, Ser. **7** (1932), no. 2, 59–107.

[20] SUKHOV, A. : *Segre varieties and Lie symmetries*, Math. Z. **238** (2001), no.3, 483–492.

[21] SUKHOV, A. : *On transformations of analytic CR structures*, Pub. Irma, Lille 2001, Vol. **56**, no. II.

[22] TRESSE, A. : *Détermination des invariants ponctuels de l'équations différentielle du second ordre* $y'' = \omega(x, y, y')$, Hirzel, Leipzig, 1896.

(GAUSSIER AND MERKER) CNRS, UNIVERSITÉ DE PROVENCE, LATP, UMR 6632, CMI, 39 RUE JOLIOT-CURIE, 13453 MARSEILLE CEDEX 13, FRANCE

E-mail address: [gaussier,merker]@cmi.univ-mrs.fr