

Séries, transformées, Équations différentielles

Partiel, 21.11.2005

I. *Question de cours*: Séries de Riemann. Définition. Critère de convergence avec démonstration dans les cas $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

II. Étudier la convergence des séries

1. $\sum \sin \frac{1}{n}$, $\sum \cos \frac{1}{n}$
2. $\sum \arcsin \frac{1}{n(n+1)}$
3. $\sum (-1)^n \tan \frac{1}{n}$
4. $\sum \frac{1}{n^n}$
5. $\sum n^{2n} z^{n^2}$ (selon $z \in \mathbb{C}$).

III. Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ la suite croissante des nombres premiers: $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11, \dots$. Montrer que

1. la série $\sum (-1)^n \frac{1}{p_n}$ est convergente,
2. la somme S de cette série satisfait à $47/210 \leq S \leq 77/210$.

IV. On considère la suite de fonctions définie sur \mathbb{R}^+ par: $f_n(x) = nx^\alpha e^{-nx^2}$ où $\alpha > 0$.

1. Démontrer que cette suite converge simplement vers la fonction nulle et que:
 - (a) pour $\alpha > 2$ elle converge uniformément sur \mathbb{R}^+ ;
 - (b) pour $\alpha \leq 2$ elle ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^+ mais qu'elle le fait sur tout intervalle $[a, \infty[$ où $a > 0$.
2. Étude de la série associée. Démontrer que :
 - (a) pour tout $\alpha > 0$ cette série est simplement convergente sur \mathbb{R}^+ ;
 - (b) cette série converge normalement sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $\alpha > 4$.
 - (c) pour tout $\alpha > 0$ elle converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ ($a > 0$).
3. Calcul de la somme: pour $x \geq 0$ posons $S_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.
 - (a) Citer le théorème sur la dérivation des séries de fonctions; en déduire la valeur de $S_\alpha(x)$ pour $x > 0$ (*Indication: considérer d'abord le cas $\alpha = 1$*);
 - (b) Déterminer pour quelle valeur de α la fonction S_α est continue en 0.