

**Exercice VII.1** (*Charge d'un avion*)

Un avion ne dispose que de 330 kg de fret. Il doit transporter des marchandises identiques conditionnées dans 4 types de caisses.

Type de caisse	I	II	III	IV
Poids	150	120	70	40
Nb de marchandises	180	140	80	40

Evidemment, on ne charge que des caisses pleines. Comment doit-on constituer le chargement pour maximiser le nombre de marchandises expédiées ?

Question 1. Modéliser le problème sous la forme d'un programme linéaire entier.

Question 2. Utiliser la méthode B& B pour calculer le nombre de marchandises maximal. Indication : Utiliser les solutions de calcul de simplexe données page suivante.


**Exercice VII.2**

1. Résoudre le problème de programmation linéaire suivant par une méthode PSEP (vous expliquerez le principe de la méthode que vous utilisez avant de faire les calculs).

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\
 x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\
 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\
 x_1, x_2, x_3 &\in \{0, 1, 2\}
 \end{aligned}$$

2. On relâche la contrainte d'appartenance en  $x_1, x_2, x_3$  entiers positifs. Donner une solution du problème correspondant (vous expliquerez votre méthode).

Remarque : aucun calcul de simplexe n'est nécessaire.

**Exercice VII.3** Ce problème linéaire est particulièrement simple : il consiste en une seule contrainte dont les coefficients sont positifs. Par exemple, 

$$\begin{aligned}
 \text{Maximiser } z &= 8.x_1 + 11.x_2 + 6.x_3 + 4.x_4 \\
 \text{s.c. } &5.x_1 + 7x_2 + 4.x_3 + 3.x_4 \leq 14 \\
 \text{avec } &x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Utilisez le simplexe pour déterminer la solution optimale si l'on néglige la contrainte que les inconnues sont entières. Quelle valeur optimale obtient-on pour  $z$  ?

Utilisez l'approche *Branch & Bound* pour déterminer une solution entière optimale.

**Exercice VII.4** (*Charge d'un avion : suite*)

On considère le problème suivant :

$$P(-, -, -, -) = \begin{cases} \max F = & 18.x_1 + 14.x_2 + 8.x_3 + 4.x_4 \\ & 15.x_1 + 12.x_2 + 7.x_3 + 4.x_4 \leq 33 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ce problème admet pour solution réelle :  $F = 128$ .

1. On fixe  $x_1$ .

Si l'on fixe  $x_1$  à la valeur  $X_1$ , on obtient à partir de  $P$  un nouveau problème avec seulement 3 inconnues  $x_2, x_3, x_4$ . Ce problème est noté

$$P(X_1, -, -, -) = \begin{cases} \max F = & 18.X_1 + 14.x_2 + 8.x_3 + 4.x_4 \\ & 15.X_1 + 12.x_2 + 7.x_3 + 4.x_4 \leq 33 \\ & x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Par exemple, nous avons

$$P(0, -, -, -) = \begin{cases} \max F = & 14.x_2 + 8.x_3 + 4.x_4 \\ & 12.x_2 + 7.x_3 + 4.x_4 \leq 33 \\ & x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

et

$$P(1, -, -, -) = \begin{cases} \max F = & 18 + 14.x_2 + 8.x_3 + 4.x_4 \\ & 15 + 12.x_2 + 7.x_3 + 4.x_4 \leq 33 \\ & x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Quelques solutions des problèmes  $P(X_1, -, -, -)$  sont données ci-dessous.

$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$
$F = 92$	$F = 110$	$F = 128$

2. On fixe maintenant aussi  $x_2$ .

Quelques solutions des problèmes  $P(X_1, X_2, -, -)$  sont données ci-dessous.

Valeur de $F$	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$
$x_1 = 0$	64	78	92
$x_1 = 1$	82	96	?
$x_1 = 2$	36	?	?

Quelques valeurs de  $F$  pour les problèmes  $P(X_1, X_2, -, -)$

3. On fixe maintenant aussi  $x_3$ . Quelques solutions des problèmes  $P(X_1, -, -, -)$  sont données ci-dessous.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$F$
0	0	0	32
0	0	1	40
0	0	2	48
0	0	3	56
0	0	4	64
0	1	0	46
0	1	1	54
0	1	2	62
0	1	3	70
0	2	0	60
0	2	1	68
1	0	0	50
1	0	1	58
1	0	2	66

**Exercice VIII.1** (*Réseaux de transport*)

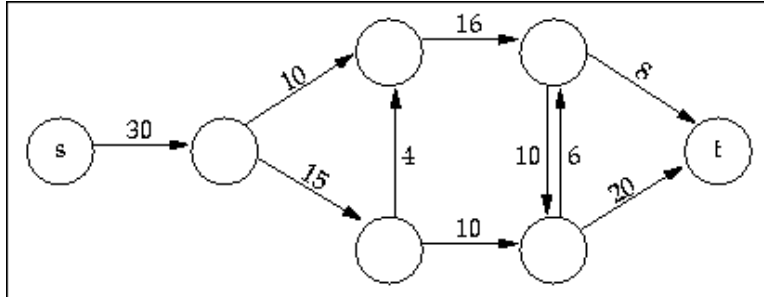
Certains problèmes de transport dans un réseau sont modélisables par des graphes dont les sommets sont des points de passage (sans stockage) et les arcs des trajets entre ces points. Le problème consiste à maximiser l'utilisation de tels réseaux, c'est-à-dire à calculer la quantité maximale transportable compte tenu des contraintes.

On considère le graphe suivant.

Question 1. Trouvez une coupe de capacité 24.

Question 2. Trouver un flot de valeur 18.

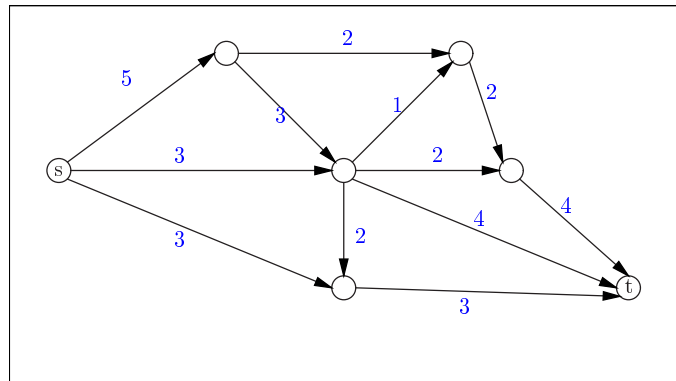
Question 3. Utilisez l'algorithme de Ford-Fulkerson pour déterminer un flot optimal. Est-il unique ?

**Exercice VIII.2** (*Recherche d'un flot optimal*)

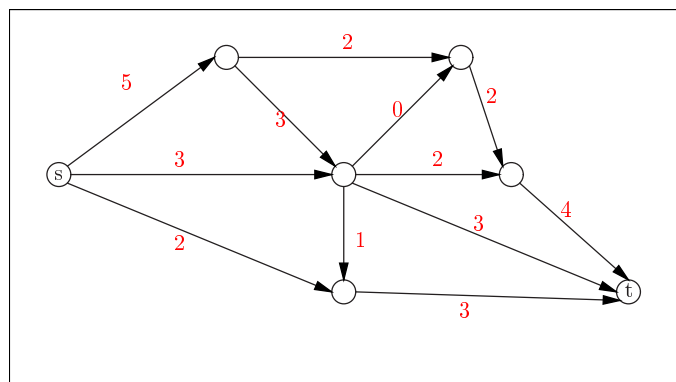
Un réseau de transport correspond un graphe ci-dessous :



Exam 01-02



Dans un premier temps, le flot obtenu est celui décrit comme suit :



Question 1. Quelle est la valeur de ce flot ?

Question 2. Déterminer une chaîne permettant d'augmenter le flot.

Question 3. Quelle est la valeur des flots optimaux ?

**Exercice VIII.3** (*Flots à contraintes*)

Un problème de flot à contraintes est un problème de flot classique avec pour chaque sommet  $s$  du graphe une valeur maximale  $V_s$  du flot entrant. Ainsi, un flot du réseau de transport satisfait les contraintes additionnelles si la somme des flots entrant en  $s$  est inférieure à  $V_s$ .



Exam 01-02



Question 1. Expliquez comment traduire un problème de flot avec contraintes en un problème auxiliaire de flot *sans contrainte* (en introduisant un nouveau réseau de transport).

Question 2. Les diverses classes et issues d'un établissement scolaire sont décrites par un graphe  $G = (X, E)$ . Les sommets de ce graphe sont les classes  $C$  et les issues  $I$  :  $X = C \cup I$ . Certaines classes disposant d'issues propres apparaissent comme des sommets  $s \in X$  qui sont en fait éléments de  $C$  et de  $I$  :  $s \in C \cap I$ . Les arêtes de ce graphe représentent les couloirs et les escaliers pouvant mener d'un sommet à un autre. Bien entendu, le graphe est symétrique :  $(s, s') \in E$  implique  $(s', s) \in E$ .

Un chemin d'alerte du graphe est une suite de sommets  $c = s_1 \dots s_n$  menant à une issue (c'est-à-dire  $s_n \in I$ ). Un *plan d'évacuation* est donné par un ensemble de chemins d'alerte qui ne partagent aucun sommet. Autrement dit, un sommet  $s \in X$  ne peut pas apparaître sur deux chemins d'alerte du plan d'évacuation. En revanche, certains sommets peuvent ne pas apparaître du tout sur le plan.

On souhaite établir un plan d'évacuation *avec un nombre maximal de chemins d'alerte*. Expliquez comment modéliser ce problème comme un problème de flots *avec contraintes*.