Exercice V.1 Résoudre les problèmes de programmation linéaire suivants à l'aide de l'algorithme du simplexe. Effectuer l'interprétation graphique du déroulement du simplexe.

$$P_1 : \begin{cases} \max z = & 3/2.x_1 & + & x_2 & & \\ & 2.x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & 2.x_2 & \leq & 4 \\ & 2.x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases} \qquad P_2 : \begin{cases} \max z = & 2.x_1 & + & x_2 & & \\ & 2.x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & 2.x_2 & \leq & 4 \\ & 2.x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$P_3 : \begin{cases} \max z = & -x_1 & + & 2.x_2 & & \\ & 2.x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & 2.x_2 & \leq & 4 \\ & 2.x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & & & x_1, x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$

Exercice V.2 Une entreprise vend deux produits qu'elle peut soit fabriquer elle-même soit acheter directement à une autre entreprise. Le problème est de savoir si cette entreprise a intérêt à produire ou à acheter les produits. Une seule ligne de production est disponible ce qui limite la capacité à 400 heures machines. On donne le tableau suivant caractérisant le problème :

	produit 1	produit 2
Heures machine requises par unité de produit	2	4
Prix de de vente unitaire	200	100
Coût unitaire	160	80
Marge brute	40	20
Demande pour le produit	250	200

Et le tableau donnant les coûts et bénéfices en cas d'achat à une entreprise qui n'a pas un réseau de vente lui permettant de vendre directement le produit :

	produit 1	produit 2
prix d'achat	170	90
Marge brute	30	10

Modéliser le problème en un problème de programmation linéaire et le résoudre.

Exercice V.3 Une entreprise fabrique 4 produits et vend le premier à 50€ le kilo, le second à 40€, le troisième à 70€et le quatrième à 80€. Son équipement ne lui autorise que 100 heures machines alors qu'un kilo de produit 1 demande 2h, un kilo de produit 2 demande 4h, un kilo de produit 3 demande 8h et un kilo de produit 4 demande 6h. De même, son potentiel de main d'oeuvre est limité à 160h et qu'un kilo de produit 1,2,3,4 demande respectivement 10,8,6,10 heures de main d'oeuvre. Par ailleurs, les produits sont fabriqués à partir d'une matière première dont la quantité disponible est 20 kilos. La fabrication d'un kilo de produit 1 ou 2 demande 1 kilo de matière première mais celle d'un kilo de produit 3 et 4 demande 2 kilos de matière première.

1. Donner *sous forme canonique* le problème de programmation linéaire que doit résoudre l'entreprise pour maximiser son bénéfice.
2. Transformer le problème en un problème *sous forme standard* et le résoudre par la méthode du simplexe. Donner une interprétation économique des bases obtenues lors de l'algorithme.

Exercice V.4 Une entreprise fabrique deux types de ceinture A et B (A de meilleure qualité que B). Le temps de fabrication d'une ceinture de type A est le double de celui d'une ceinture de type B et si on ne produisait que des ceintures B on ne pourrait en faire que 1000 au maximum à cause de disponibilité en équipement. L'approvisionnement en cuir ne permet d'en fabriquer que 800 au maximum. De plus l'entreprise dispose de 400 boucles de ceintures pour le type A et de 700 pour le type B. La vente d'une ceinture A rapporte 20€ et celle du type B rapporte 15€.

1. Répartir la fabrication entre les types A et B de manière à maximiser le profit de l'entreprise.
2. Une entreprise concurrente ayant une commande importante propose à l'entreprise de lui racheter ses matières premières et de lui louer ses machines. Quel est le problème de programmation à résoudre permettant de connaitre les prix qu'elle doit proposer (pour cuir, boucles A, boucles B, location de machine) à la premiere entreprise pour que celle-ci accepte ?

Exercice V.5 Résoudre les problèmes de programmation linéaire suivants à l'aide de l'algorithme du simplexe (en introduisant si nécessaire des variables artificielles).

1. $Max\ z = 2x_1 - x_2$
$$\begin{array}{lcl} -x_1 + x_2 & \geq & 2 \\ x_2 & \leq & 2 \\ x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$
2. $Max\ z = x_1 + x_2 + x_3$
$$\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$
3. $Min\ w = x_1 + x_2 + x_3$
$$\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & 5 \\ -x_1 + x_2 & \leq & -1 \\ x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Exercice V.6 Une entreprise désire lancer une nouvelle marque de lessive et décide d'appuyer le lancement par une campagne publicitaire à travers différents médias. On souhaite atteindre 20 millions de consommateurs dont 15 millions de femmes. L'agence de publicité fournit les renseignements suivants :

Media	Audience	Audience féminine	Coût de l'annonce
Quotidiens	1 million	0,4 million	30K€
Magazines	1 million	0,8 million	35K€
Télévision	10 million	6 million	400K€
Radio	0,6 million	0,4 million	20K€

Comment atteindre les objectifs fixés avec un coût minimum. Résoudre le problème dual et en déduire le résultat sur le primal en écrivant le théorème des écarts complémentaires.

Exercice V.7 Résoudre sans utiliser de variable artificielles le problème suivant :

$$\begin{array}{l} max\ z = -2x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 \geq 5 \\ x_1, x_5 \geq 0 \end{array}$$

En déduire la solution optimale du problème dual associé.