Exercice IV.1 *(L'agriculteur intensif)*
Un agriculteur veut répandre sur ses prairies un engrais ayant une teneur maximale en azote (N). Les trois engrais dont il dispose contiennent également du phosphore (P) et du potassium (K). La teneur en potassium doit être limitée à 44 unités par hectare et celle en phosphore à 66 unités par hectare. Le tableau suivant donne la quantité de N, P, K par engrais :

	engrais 1	engrais 2	engrais 3
N	3	4	6
K	2	3	4
P	5	2	5

1. Comment doit-il faire son mélange pour que la quantité d'azote soit maximale ? Exprimer le problème sous forme d'un problème de Programmation Linéaire.
2. Calculer le problème dual. Le résoudre graphiquement.
3. Écrire les conditions du théorème des écarts complémentaire et en déduire la valeur d'une des variables x_1, x_2, x_3. En déduire la solution du problème initial.

Exercice IV.2 On considère le problème

$$\begin{cases} \max\ z = 3x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer le dual de ce problème.
2. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions admissibles du dual.
3. En supposant que le dual a une solution optimale unique, trouver celle-ci à partir de la représentation graphique. Vérifier alors que c'est bien une solution optimale.
4. En utilisant la valeur trouvée pour l'optimum, montrer que le primal a au moins une solution optimale (raisonner graphiquement sur l'ensemble des solutions admissibles). En a-t-il plusieurs ?

Exercice IV.3 On considère le problème

$$\begin{cases} \min\ \omega = 15y_1 + 21y_2 + 3y_3 \\ 3y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer le dual de ce problème.
2. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions admissibles du dual.
3. En utilisant le fait que l'ensemble des solutions admissibles du dual est un polytope, en déduire l'optimum.
4. En utilisant la valeur trouvée pour l'optimum du dual, montrer que le primal a au moins une solution optimale (raisonner graphiquement sur l'ensemble des solutions admissibles). En a-t-il plusieurs ?

Exercice IV.4 *(Rappels de cours)*
Montrer que le dual du dual est le problème initial pour

- un problème en forme canonique
- un problème en forme standard

On donne un problème de Programmation Linéaire sous la forme

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax \leq b \\ x \text{ } quelconque \end{cases}$$

Définir son dual et vérifier que le dual du dual est le problème initial.

Exercice IV.5 (Partiel 2003) Une compagnie fabrique deux types de sauces : une sauce tomate et une sauce aux légumes. Chacune est obtenue en mélangeant des légumes et du concentré de tomates. Le concentré de tomates doit représenter au moins la moitié de la composition de la sauce tomate. Les légumes doivent représenter au moins le tiers de la composition de la sauce aux légumes. Chaque jour la compagnie peut acheter jusqu'à 4 tonnes de légumes à 5 euros le kg, et 3 tonnes de concentré de tomates à 3 euros le kg. La compagnie vend un kilog de sauce tomate à 8 euros, et un kilog de sauce aux légumes à 7 euros. La capacité d'absorption du marché est illimitée. La compagnie cherche à réaliser le plus grand bénéfice possible.

1. Modéliser le problème en un problème de programmation linéaire (pas plus de 4 variables. On le note (P).
2. Ecrire le problème (Q) dual de (P).
3. Trouver des bornes inférieures strictement positives pour deux des variables duales. (On rappelle que les variables duales sont positives ou nulles).
4. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, résoudre (P).