Exercice I.1 *(Méthode de Gauss)*
Résoudre le système linéaire à 4 inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & y & +t & +z & = & 1 \\ x & -y & +t & -z & = & -1 \\ 2.x & -y & & +z & = & 8 \\ & y & -t & +z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice I.2 Résoudre le système linéaire à 4 inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & y & +t & +z & = & 1 \\ x & -y & +t & -z & = & -1 \\ 2.x & -y & & +z & = & 8 \\ & 2.y & -t & +4.z & = & 11 \end{array}\right.$$

Exercice I.3 Pour quelles valeurs du paramètre a, le système linéaire suivant
- n'a-t-il aucune solution ?
- a-t-il une seule solution ?
- a-t-il une infinité de solutions ?

$$\left\{\begin{array}{cccccc} -x & -3.y & -5z & = & 5 \\ -x & -2.y & +a.z & = & 4 \\ -2.x & +a.y & -4z & = & 7 \end{array}\right.$$

Exercice I.4 *(Produit de matrices)*
Soient A, B, C et D les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer, si possible :
- $A - 3.B$, $C \cdot D$, $A \cdot C$ et $C \cdot A$.
- $D^t + C$, C^2, $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

Exercice I.5 *(Inverse d'une matrice)*
Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Une matrice B est dite inverse de A si $A \cdot B = I_2$ où

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 1. Expliquer comment déterminer *à l'aide d'un système linéaire* s'il existe une matrice inverse de A ?

Question 2. Combien y a-t-il d'inconnues pour ce système ?

Question 3. À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, transformez la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & b & d \end{pmatrix}$$

Question 4. Vérifiez que $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A.

Exercice I.6 Résoudre les deux systèmes linéaires suivants

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} X_1 & +2.X_2 & & = & 7 \\ -X_1 & +3.X_2 & +2.X_3 & = & 0 \\ -X_1 & -6.X_2 & +X_3 & = & 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} X_1 & +2.X_2 & & = & 11 \\ -X_1 & +3.X_2 & +2.X_3 & = & 8 \\ -X_1 & -6.X_2 & +X_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

en calculant d'abord l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice I.7 *(Interprétation graphique)* Sept. 01/02

Représenter graphiquement les trois droites suivantes du plan réel :

$$\begin{array}{ll} (D_1) & x_1 + x_2 = 50 \\ (D_2) & 2.x_1 + x_2 = 80 \\ (D_3) & x_1 + 2.x_2 = 85 \end{array}$$

Déterminer sur le dessin l'ensemble E des points $X = (x_1, x_2)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x_1 & +x_2 & \leqslant & 50 \\ 2.x_1 & +x_2 & \leqslant & 80 \\ x_1 & +2.x_2 & \leqslant & 85 \end{array}\right.$$

Calculer les coordonnées de l'intersection $Y = (y_1, y_2)$ des droites (D_1) et (D_3). Que vaut $v = 8.y_1 + 11.y_2$?
Représenter sur le dessin la droite (D') $8.x_1 + 11.x_2 = v$.
En déduire la valeur de $\max_{X \in E}\ (8.x_1 + 11.x_2)$.