Université de Provence
Année 2005-2006

Partiel. Durée 2h.

Exercice 1 [10pts] Une entreprise de menuiserie réalise des boites de rangement de jeu d'échec de deux tailles différentes. La petite boite demande 3 heures de machine outil et utilise 1 kilo de bois, la grande demande 2 heures et utilise $3kg$ de bois. L'entreprise dispose de 4 tourneurs qui peuvent travailler chacun $40h$ par semaine (chaque tourneur dispose d'une machine). Une petite boite rapporte 5 euros et une grande 20 euros. Par contre le bois utilisé est rare et on ne peut en obtenir que $210kg$ par semaine. L'entreprise veut maximiser son profit.

1. Donner une modélisation du problème.
2. Résoudre le problème primal par une interprétation graphique.
3. Résoudre le problème primal en utilisant l'algorithme du simplexe.
4. Donner le problème dual et le résoudre graphiquement.
5. Une entreprise concurrente qui fabrique des jeux de dames et manque de matière première propose de racheter le bois pour fabriquer des jeux de dames (mais ne cherche pas à louer les machines-outils avec leur ouvrier). Ecrire le problème que doit résoudre cette entreprise et en déduire le prix au kilo qu'elle doit proposer pour que la première entreprise accepte le marché ?
6. L'entreprise conçoit un nouveau modèle de petite boite qui demande la même quantité de bois et $4h$ de travail, mais qu'elle vend 10 euros. Par contre seul un tourneur maitrise la technique de construction de ce nouveau modèle. Ecrire le problème que l'entreprise doit résoudre pour maximiser son profit et en donner une solution. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 2 [6pts]

Deux entreprises de publicité A et B se partagent un marché de consommateur. En début d'année, A a le choix entre m campagnes de publicité distinctes (mais n'en lance qu'une seule) et B a le choix entre n campagnes de publicité distinctes (mais n'en lance qu'une seule). Chaque entreprise ignore les choix fait par l'autre. Les études statistiques ont permis de calculer les coefficients $c_{i,j}$ tels que

- si $c_{i,j} > 0$ alors $c_{i,j}$ est la part de marché de B prise par A si A fait la campagne i et si B fait la campagne j.
- si $c_{i,j} < 0$ alors $c_{i,j}$ est la part de marché de A prise par B si A fait la campagne i et si B fait la campagne j.

L'entreprise A décide la statégie suivante : elle choisit de faire la campagne i avec la probabilité p_i (à déterminer) de manière à maximiser la part de marché moyenne reprise à B soit maximale. L'entreprise A suppose que sa concurrente est dirigée par des personnes compétentes qui sauront faire les meilleurs choix possibles.

1. Peut-on modéliser le problème comme un problème de Programmation Linéaire ? Si oui donner la modélisation, si non expliquer pourquoi cela n'est pas possible.
2. Donner le problème dual.
3. Donner la solution pour la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

   Vous expliciterez vos calculs ou votre raisonnement.

Exercice 3 [4pts] On donne un problème d'optimisation sous la forme :

$$\begin{aligned} Max\ z \quad & = cx + c'x' \\ & Ax \leq b \\ & A'x' = b' \\ & x \geq 0 \\ & x' \geq 0 \end{aligned}$$

les dimensions des matrices étant $x(n,1), x'(n',1), c(1,n), c'(1,n'), b(m,1), b'(m',1), A(m,n), A'(m',n')$

1. Transformer le problème en un problème en forme canonique (toutes les contraintes sont des égalités).
2. Montrer que le problème dual du problème initial peut s'écrire :

$$\begin{aligned} Min\ \omega \quad & = yb + y'b'' \\ & yA \geq c \\ & y'A' \geq c' \\ & y \geq 0 \\ & \text{y'}quelconque \end{aligned}$$

   (vous donnerez les dimensions des matrices y et y'). Vous devrez justifier votre résultat par le calcul.