



Exercice 1 (10 pts) Une compagnie fabrique deux types de sauces : une sauce tomate et une sauce aux légumes. Chacune est obtenue en mélangeant des légumes et du concentré de tomates. Le concentré de tomates doit représenter au moins la moitié de la composition de la sauce tomate. Les légumes doivent représenter au moins le tiers de la composition de la sauce aux légumes. Chaque jour la compagnie peut acheter jusqu'à 4 tonnes de légumes à 5 euros le kg, et 3 tonnes de concentré de tomates à 3 euros le kg. La compagnie vend un kilo de sauce tomate à 8 euros, et un kilo de sauce aux légumes à 7 euros. La capacité d'absorption du marché est illimitée. La compagnie cherche à réaliser le plus grand bénéfice possible.

1. Modéliser le problème en un problème de programmation linéaire (pas plus de quatre variables). On le note (P).
2. Ecrire le problème (Q) dual de (P).
3. Trouver des bornes inférieures strictement positives pour deux des variables duales. (On rappelle que les variables duales sont positives ou nulles).
4. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, résoudre (P).

Exercice 2 (5 pts) On considère le problème

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= -3x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - x_2 + e_1 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0, e_1 \leq 0 \end{aligned}$$

1. Transformer le problème en un problème en forme standard.
2. Résoudre le problème en forme standard par l'algorithme du simplexe.
3. En considérant que la variable $e'_1 = -e_1$ est une variable d'écart rajoutée à un problème en forme canonique, donner le problème canonique de départ et le résoudre graphiquement.
4. Calculer le dual et en donner une solution. Est-elle unique ?

Exercice 3 (5 pts) On considère le problème :

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= 12x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\text{ quelconques.} \end{aligned}$$

1. Calculer le problème dual (ne pas oublier que le dual du dual est le primal).
2. Résoudre le problème dual par le simplexe.
3. Que vaut la fonction objectif du problème initial à l'optimum ? Pour quelles valeurs cet optimum est-il atteint (utiliser les conditions d'optimalité primal-dual) ?