Exercice 1 *(8 points)*
On donne le problème de programmation linéaire (P) suivant :

$$\begin{cases} \max z = & 3.x_1 & + & 4.x_2 & + & 8.x_3 & & \\ & x_1 & + & 2.x_2 & + & 3.x_3 & \leq & 15 \\ & x_1 & & & - & x_3 & \leq & -1 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & & \end{cases}$$

Question 1. Mettre ce problème en forme standart en introduisant des variables d'écarts.

Question 2. Introduire une variable artificielle pour avoir une base admissible de départ.

Question 3. Résoudre le problème auxiliaire et le problème initial (P). On donnera la valeur optimale de z et les valeurs de x_1, x_2 et x_3 correspondantes.

Question 4. Formuler le problème dual et le résoudre graphiquement.

Exercice 2 *(4 points)*
La compagnie Mouliseb doit fabriquer 1000 exemplaires de son grille-pain et peut le faire manuellement, de manière semi-automatisée ou entièrement automatisée. La fabrication manuelle demande 1 mn d'ouvrier qualifié, 40 mn d'ouvrier non-qualifié, et occupe 3 mn de la chaine d'assemblage. La fabrication semi-automatisée demande respectivement 4 mn, 30 mn et 2 mn des mêmes ressources et la fabrication automatisée demande 8 mn, 20 mn et 4 mn. On dispose de 4500 mn d'ouvrier qualifié, de 36000 mn d'ouvrier non-qualifié et de 2700 mn sur la chaine d'assemblage. Le prix de revient d'un grille-pain est 7 Euros pour la production manuelle, 8 Euros pour la semi-automatisée et 8.50 Euros pour la production automatisée.

1. Etablir le système de programmation linéaire qui permet de trouver le plan de production minimisant le coût de production.
2. Les minutes de chaines d'assemblages non-utilisées peuvent être vendues à une autre entreprise au prix de $0,50$ Euros. Modifier la formalisation précédente pour tenir compte de cette possibilité.

Exercice 3 *(8 points)*
On considère un problème de programmation linéaire en forme standard. On veut montrer que si le simplexe termine sur un optimum fini avec une base non dégénérée (c'est à dire toutes les valeurs des variables de base sont > 0), alors l'optimum est unique (i.e. atteint en un seul point) si et seulement si tous les $z_j - c_j$ du tableau sont > 0.

1. On considère le problème

$$\begin{cases} \max z = & 2.x_1 & + & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & 4.x_1 & + & 2.x_2 & \leq 8 & \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

(a) Le résoudre graphiquement. Quel est l'optimum et le (les) point(s) qui le réalise.

(b) Mettre le problème en forme standard avec deux variables d'écart e_1, e_2. Montrer qu'on peut prendre e_1, x_1 comme base admissible moyennant une transformation très simple sur la deuxième équation. Donner l'expression de z en fonction des variables hors base.

(c) Ecrire la forme tableau correspondant. Que peut-on dejà conclure. Effectuer le pivotage qui sortir e_1 puis donner la solution optimale obtenue et la base correspondante. Cette base est-elle dégénérée ? Que peut-on conclure sur l'unicité ?

2. On revient au cas général. On considère une base B non dégénérée qui donne l'optimum et telle qu'il existe j_0 tel que $z_{j_0} - c_{j_0} = 0$.

   (a) Montrer que s'il existe dans le tableau un $\alpha_{r,j_0} > 0$ alors il n'y a pas unicité de la base qui donne l'optimum.

   (b) Si $\alpha_{r,j_0} < 0$ pour tout r, montrer qu'il y a une infinité de solution donnant l'optimum.

3. On suppose que l'optimum est atteint pour une base B non dégénérée et que $\forall j, z_j - c_j > 0$ pour j non indice de la base B. Montrer qu'alors toute autre solution optimale x' doit vérifier $x'_j = 0$ pour j non indice de la base B. En déduire l'unicité de B.