

**Exercice 1** (*Modélisation : 2 points*)

Un agriculteur est confronté à un choix de culture : il cherche à fournir suffisamment de valeur nutritive à sa récolte et ce *au moindre coût*. Il peut produire trois sortes de culture qui ont des coûts et des rendements différents. Les données du problème sont résumées sur le tableau suivant :

	Total minimum requis	Culture 1	Culture 2	Culture 3
Calories	2700	160	69	201
Protéines	65	11,3	0,8	5,5
Vitamines	75	0,0005	7,5	0
Coûts		9	3	1

Afin de subvenir aux besoins de la population locale, la récolte devra posséder des qualités minimales au niveau calorique (première ligne) mais aussi en terme de protéines (seconde ligne) et de vitamines (troisième ligne) ; les valeurs exactes sont indiquées dans la colonne *Total minimum requis*. Les apports et le coût de chacune des trois cultures sont indiqués dans la colonne correspondante. *Modéliser* le problème de savoir quelle quantité de chaque culture il faut produire (il n'est pas demandé pas de résoudre le problème).

Exercice 2 (*Simplexe et résolution graphique : 8 points*)

Il s'agit de résoudre le problème de programmation linéaire (P_0) à 4 contraintes suivant :

$$\begin{array}{l} \max 1000 x_1 + 1200 x_2 \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} 8 x_1 + 4 x_2 \leq 160 \\ 4 x_1 + 6 x_2 = 120 \\ x_1 \leq 12 \\ x_2 \geq 6 \end{array} \right. \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

- Question 1. Ajouter trois variables d'écart (positives) pour obtenir un problème de programmation linéaire (P_1) équivalent dont les quatre contraintes sont des *égalités*.
- Question 2. Ajouter à (P_1) deux variables artificielles pour obtenir un nouveau problème intermédiaire (P_2) avec une base admissible évidente.
- Question 3. Vérifier que les contraintes du problème (P_2) admettent une solution pour laquelle les variables artificielles sont nulles.
- Question 4. En déduire une solution optimale du problème (P_0) initial.
- Question 5. Résoudre graphiquement le problème (P_0).

Exercice 3 (*6 points*)

Un transporteur dispose d'un camion de charge utile de 14 tonnes. Il peut acheter plusieurs produits qu'il revend ensuite sur son lieu d'arrivée avec un certain bénéfice qu'il veut maximiser.

produit	poids à l'unité (en tonne)	bénéfice à l'unité (en kilo-euro)
1	5	8
2	7	9
3	4	6
4	3	4

Seuls deux exemplaires des produits 3 et 4 peuvent être achetés, par contre il n'y a aucune limite sur le nombre d'exemplaires de produits 1 et 2.

1. Modéliser le problème comme un problème de programmation linéaire en nombre entiers. Montrer qu'on peut rajouter les contraintes $x_1 \leq 2, x_2 \leq 2$.
2. Résoudre le problème avec une méthode branch and bound.
3. Effectuer l'algorithme du simplexe sur le système obtenu en relâchant les contraintes que les x_i sont entiers. D'après le résultat obtenu que concluez-vous ?

Exercice 4 (*Flots : 4 points*)

Résoudre le problème de flots suivant par l'algorithme de Ford-Fulkerson.

