Exercice 1 *(Simplexe : 10 points)*
On donne le problème de programmation linéaire (P) suivant :

$$\begin{cases} \max z = -2.x_1 + 2.x_3 + 4x_4 \\ 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -p \\ x_1 + x_2 + 2.x_3 + 4.x_4 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Question 1. Mettre ce problème en forme standard en introduisant des variables d'écarts.

Question 2. Formuler le problème dual.

(a) Résoudre graphiquement le problème dual pour $p = 1/2$.

(b) Résoudre graphiquement le problème dual pour $p = 0$.

Question 3. **On suppose que $p = 0$ dans cette question.** En écrivant les conditions d'optimalités primales duales, déterminer si le primal admet une solution optimale finie (et la donner dans ce cas) ou pas.

Question 4. **On suppose que $p = 1/4$ dans cette question et la suivante.** On considère le problème primal sous forme standard obtenu dans la première question (en instanciant p par 1/4). Introduire une variable artificielle pour avoir une base admissible de départ.

Question 5. Résoudre le problème auxiliaire puis le problème initial (P). On donnera la valeur optimale de z et les valeurs de x_1, x_2, x_3 et x_4 correspondantes.

Question 6. On donne le problème de programmation linéaire

$$\begin{cases} \max \quad z = c.x \\ A_1.x = b_1 \\ A_2.x \leq b_2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Prouver que son dual équivaut à :

$$\begin{cases} \max \quad w = (y_1, y_2).\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ (y_1, y_2).\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \geq c \\ y_2 \geq 0, y_1 \textit{ quelconque} \end{cases}$$

(Indication : regarder le calcul du dual dans la question 2).

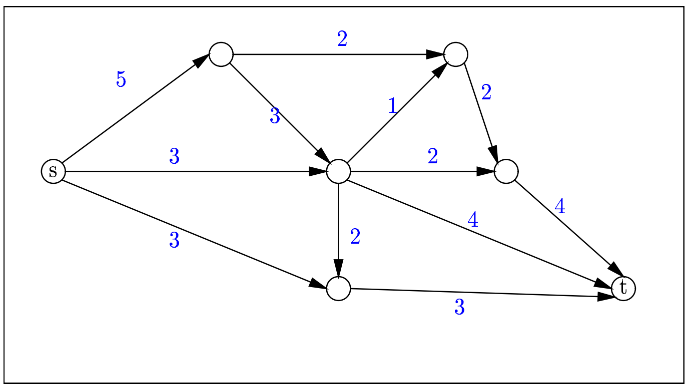
Exercice 2 *(Charge de cargos : 5 points)*
Un capitaine peut charger ses bâtiments avec différents types de caissons dont les poids, les volumes et les rapports distincts sont les suivants :

	Poids	Volume	Rapport
A	10	14	18
B	2	2.5	4
C	4	6	10
D	12	12	18

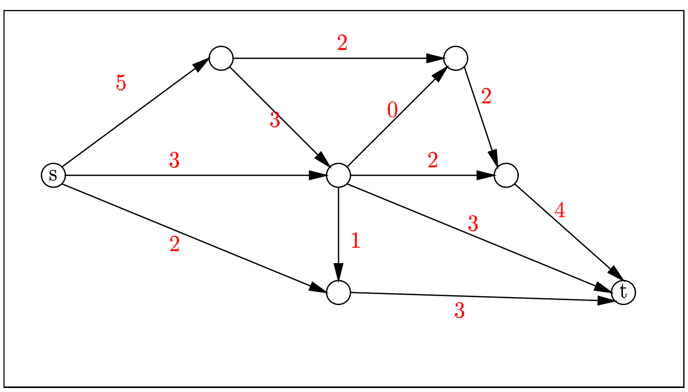
Question 1. Le volume du premier cargo étant de 108 et la charge maximale de 112, comment le charger pour obtenir le meilleur rapport ? Indication : pour commencer, ne considérer qu'une seule des deux contraintes pour le choix du pivot.

Question 2. Le second cargo a un volume de 170 et une charge maximale de 82. Comment charger ce second navire pour obtenir le meilleur rapport ?

Exercice 3 *(Recherche d'un flot optimal : 2 points)*
Un réseau de transport correspond au graphe suivant :



Dans un premier temps, le flot obtenu est celui décrit comme suit :



Question 1. Est-ce que ce flot est optimal ? Pourquoi ?

Question 2. Quel est la valeur des flots optimaux ?

Exercice 4 *(Flots à contraintes : 3 points)*
Un problème de flot à contraintes est un problème de flot classique avec pour chaque sommet s du graphe une valeur maximale V_s du flot entrant. Ainsi, un flot du réseau de transport satisfait les contraintes additionnelles si la somme des flots entrant en s est inférieure à V_s.

Question 1. Expliquer comment traduire un problème de flot avec contraintes en un problème auxiliaire de flot *sans contrainte* (en introduisant un nouveau réseau de transport).

Question 2. Les diverses classes et issues d'un établissement scolaire sont décrites par un graphe $G = (X, E)$. Les sommets de ce graphe sont les classes et les issues : $X = C \cup I$. Certaines classes disposant d'issues propres apparaissent comme des sommets $s \in X$ qui sont en fait éléments de C et de I : $s \in C \cap I$. Les arêtes de ce graphe représentent les couloirs et les escaliers pouvant mener d'un sommet à un autre. Bien entendu, le graphe est symétrique : $(s, s') \in E$ implique $(s', s) \in E$.
Un chemin d'alerte du graphe est une suite de sommets $c = s_1 ... s_n$ menant à une issue (c'est-à-dire $s_n \in I$). Un *plan d'évacuation* est donné par un ensemble de chemins d'alerte qui ne partagent aucun sommet. Autrement dit, un sommet ne peut pas apparaître sur deux chemins d'alerte du plan d'évacuation. En revanche, certains sommets peuvent ne pas apparaître du tout sur le plan.
On souhaite établir un plan d'évacuation *avec un nombre maximal de chemins d'alerte.* Expliquez comment modéliser ce problème comme un problème de flots *avec contraintes.*