Exercice 1 *(Simplexe : 10 points)*
On donne le problème de programmation linéaire (P) suivant :

$$\begin{cases} \max z = & -2.x_1 & & + & 2.x_3 & + & 4x_4 & & \\ & 2.x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -p \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2.x_3 & + & 4.x_4 & \leq & 1 \\ & & & & & & & x_1,x_2,x_3,x_4 & \geq & 0 \end{cases}$$

Question 1. Mettre ce problème en forme standard en introduisant des variables d'écarts.

$$\begin{cases} \max z = & -2.x_1 & & + & 2.x_3 & + & 4x_4 & & & \\ & 2.x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & = & -p \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2.x_3 & + & 4.x_4 & +e & = & 1 \\ & & & & & & & x_1,x_2,x_3,x_4,e & & \geq & 0 \end{cases}$$

(une seule variable d'ecart puisqu'on a déjà une égalité a la première contrainte)

Question 2. Formuler le problème dual.

Par définition :

$$\begin{cases} min\ w & = & -p.y1 + y2 \\ & & 2.y_1 + y_2 \geq -2 \\ & & y_1 + y_2 \geq 0 \\ & & y_1 + 2.y_2 \geq 2 \\ & & -y_1 + 4.y_2 \geq 4 \\ & & y_2 \geq 0 \\ & & y_1, y_2\ quelconques \end{cases}$$

la contrainte $y_2 \geq 0$ vient de ce que le coefficient de e est 0 dans la fonction économique et dans la première contrainte du dual. On elimine donc y_2 quelconque et on laisse $y_2 \geq 0$.

(a) Résoudre graphiquement le problème dual pour $p = 1/2$.

Pas de solution.

(b) Résoudre graphiquement le problème dual pour $p = 0$.

Une solution (0,1).

Question 3. **On suppose que $p = 0$ dans cette question.** En écrivant les conditions d'optimalités primales duales, déterminer si le primal admet une solution optimale finie (et la donner dans ce cas) ou pas.

$y^* = (0,1)$ solution du dual d'ou :

$$\begin{cases} x_1^*.(2.y_1^* + y_2^* + 2) = 0 \\ x_2^*.(y_1^* + y_2^*) = 0 \\ x_3^*.(y_1^* + 2y_2^* - 2) = 0 \\ x_4^*(-y_1^* + 4y_2^* - 4) = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y_1^*.(2.x_1^* + x_2^* + x_3^* - x_4^*) = 0 \\ y_2^*.(x_1^* + x_2^* + 2.x_3^* + 4.x_4^* - 1) = 0 \end{array}$$

avec $y_1^* = 0, y_2^* = 1$. d'ou : $x_1^* = 0, x_2^* = 0, (x_1^* + x_2^* + 2.x_3^* + 4.x_4^* - 1 = 0$ et on sait $1 = w^* = z^* = 2.x_3^* + 4.x^*4$. De plus la première contrainte impose $x_3^* - x_4^* = 0$. D'ou $x_3^* = x_4^* = 1/6$.

Question 4. **On suppose que $p = 1/4$ dans cette question et la suivante.** On considère le problème primal sous forme standard obtenu dans la première question (en instanciant p par $1/4$). Introduire une variable artificielle pour avoir une base admissible de départ.

$$\begin{cases} \max z = -2.x_1 + 2.x_3 + 4x_4 \\ -2.x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + a = 1/4 \\ x_1 + x_2 + 2.x_3 + 4.x_4 + e = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(attention au signe : multiplier par -1 la premiere contrainte avant d'introduire a pour que la valeur soit ≥ 0). d'ou

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
w	$-1/4$	1	1	1	-1
z	0	2	0	-2	-4
a	$1/4$	-2	-1	-1	$+1$
e	1	1	1	2	4

Question 5. Résoudre le problème auxiliaire puis le problème initial (P). On donnera la valeur optimale de z et les valeurs de x_1, x_2, x_3 et x_4 correspondantes.

Pivotage x_4 entre a sort.

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
w	0			
z	1	-6	-4	-6
x_4	$1/4$	-2	-1	-1
e	0	9	5	6

Probleme auxiliaire résolu. Remarque la base obtenue est dégénŕée, et on est en fait a l'optimum. On continue, pivotage x_3 entre, e sort :

		$-x_1$	$-x_2$	$-e$
z	1	3	1	1
x_4	$1/4$	-2	-1	-1
x_3	0	$3/2$	$5/6$	$1/6$

Plus de pivotage possible. Fin et solution z=1, $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_3 = 1/4$.

Question 6. On donne le problème de programmation linéaire

$$\begin{cases} \max \quad z = c.x \\ A_1.x = b_1 \\ A_2.x \leq b_2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Prouver que son dual équivaut à : $\begin{cases} \min \quad w = (y_1, y_2).\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ (y_1, y_2).\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \geq c \\ y_2 \geq 0, y_1 \ quelconque \end{cases}$

Le problème équivaut à : $\begin{cases} \max \quad z = c.x + 0.e \\ A_1.x \quad = b_1 \\ A_2.x + \ I_p e = b_2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

avec I_p la matrice identite et $0.e = 0.e_1 + \ldots + 0.e_p$ dont le dual est :

$$\begin{cases} min \quad w = (y_1, y_2).\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ (y_1, y_2).\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & I_p \end{pmatrix} \geq (c, 0) \\ y_1, y_2 \ quelconque \end{cases}$$

d'ou :

$$\begin{cases} min \quad w = (y_1, y_2).\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ (y_1, y_2).\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \geq c \\ y_2 \geq 0, y_1 \ quelconque \end{cases}$$

Exercice 2 *(Charge de cargos)*
Un capitaine peut charger ses bâtiments avec différents types de caissons dont les poids, les volumes et les rapports distincts sont les suivants :

	Poids	Volume	Rapport
A	10	14	18
B	2	2.5	4
C	4	6	10
D	12	12	18

Question 1. Le volume du premier cargo étant de 109 et la charge maximale de 112, comment le charger pour obtenir le meilleur rapport ?

Si la seule contrainte est le volume :

	Volume	Rapport	R/V
A	14	18	9/7
B	2.5	4	8/5
C	6	10	5/3
D	12	18	3/2

Il faut remplir avec des caisses C en priorité. On prendra exactement 108/6=18 caisses C.
Si la seule contrainte est le poids :

	Poids	Rapport	R/P
A	10	18	9/5
B	2	4	2
C	4	10	5/2
D	12	18	3/2

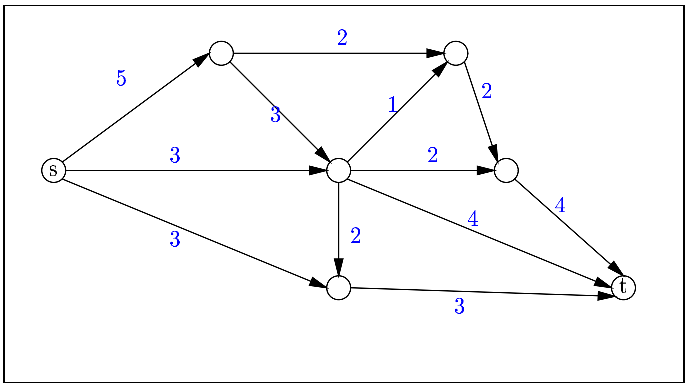
Ici encore, il faut remplir de caisses C en priorité. On prendra exactement 112/4=27 caisses C.
Afin de satisfaire les deux contraintes, il suffit de prendre 18 caisses C (avec un rapport de 180) et on ne peut pas faire mieux !

Question 2. Le second cargo a un volume de 170 et une charge maximale de 82. Comment charger ce second navire pour obtenir le meilleur rapport ?

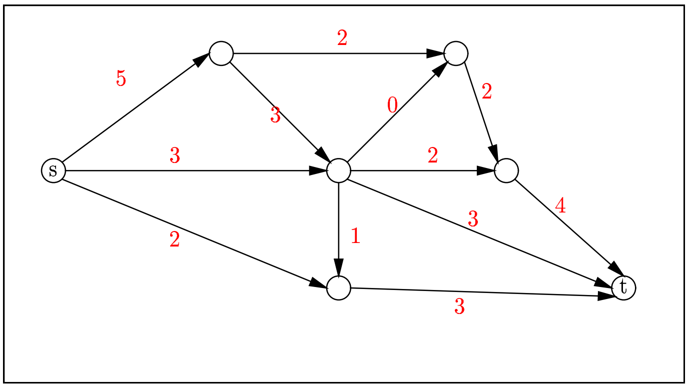
Afin de respecter seulement la contrainte de poids, nous prendrons 82/4=20 caisses C. Il est alors encore possible de prendre une caisse B. Ceci donnerait un rapport de 204.

On ne peut donc pas faire mieux que 204. Or avec 20 caisses C et une caisse B la contrainte de volume est satisfaite également : c'est donc une solution optimale !

Exercice 3 *(Recherche d'un flot optimal)*
Un réseau de transport correspond un graphe ci-dessous :



Dans un premier temps, le flot obtenu est celui décrit comme suit :



Question 1. Est-ce que ce flot est optimal ? Pourquoi ?

En appliquant l'algorithme de flot vu en TD sur le flot nul, on obtient un flot de 11.

Question 2. Quelle est la valeur des flots optimaux ?

c'est 11.

Exercice 4 *(Flots à contraintes)*
Un problème de flot à contraintes est un problème de flot classique avec pour chaque sommet s du graphe une valeur maximale V_s du flot entrant. Ainsi, un flot du réseau de transport satisfait les contraintes additionnelles si la somme des flots entrant en s est inférieure à V_s.

Question 1. Expliquez comment traduire un problème de flot avec contraintes en un problème auxillaire de flot *sans contrainte* (en introduisant un nouveau réseau de transport).

La valeur optimale du flot pour le problème auxilliaire devra être la même que celle du flot optimal pour le problème initial.
On remplace chaque sommet s par deux s_1 et s_2. Les arcs entrant de s sont placés sur s_1 ; les arcs sortant de s sont déplacés sur s_2 ; et un arc de capacité V_s relie s_1 à s_2.

Question 2. Les diverses classes et issues d'un établissement scolaire sont décrites par un graphe $G = (X, E)$. Les sommets de ce graphe sont les classes C et les issues I : $X = C \cup I$. Certaines classes disposant d'issues propres apparaissent comme des sommets $s \in X$ qui sont en fait éléments de C et de I : $s \in C \cap I$. Les arêtes de ce graphe représentent les couloirs et les escaliers pouvant mener d'un sommet à un autre. Bien entendu, le graphe est symétrique : $(s, s') \in E$ implique $(s', s) \in E$.
Un chemin d'alerte du graphe est une suite de sommets $c = s_1 ... s_n$ menant à une issue (c'est-à-dire $s_n \in I$). Un *plan d'évacuation* est donné par un ensemble de chemins d'alerte qui ne partagent aucun sommet. Autrement dit, un sommet $s \in X$ ne peut pas apparaître sur deux chemins d'alerte du plan d'évacuation. En revanche, certains sommets peuvent ne pas apparaître du tout sur le plan.
On souhaite établir un plan d'évacuation *avec un nombre maximal de chemins d'alerte*. Expliquez comment modéliser ce problème comme un problème de flots *avec contraintes*.

On ajoute un sommet initial α et un sommet final β. On relie α à chaque classe. On relie chaque issue à β. La capacité de chaque sommet est 1. Chaque flot de ce graphe décrit un plan d'évacuation et la valeur du flot est précisement le nombre de chemins.