



**Exercice 1** (3 pts) Pour cet exercice vous donnerez explicitement le sens des variables propositionnelles que vous introduirez (comme : la variable  $p$  signifie *il pleut*).

1. Formaliser les affirmations suivantes :
  - (A) Si Pierre est grand alors Jean n'est pas le fils de Pierre.
  - (B) Si Pierre n'est pas grand alors Jean est le fils de Pierre et si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean.
  - (C) Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand.
2. Est-ce que la formule  $C$  est une conséquence logique de  $A$  et  $B$ ? Vous ferez une preuve formelle avec une quelconque des méthodes vues en cours, sémantique (table de vérité) ou syntaxique (tableau ou résolution).

**Exercice 2** (6 pts) Toutes les formules sont des formules du calcul propositionnel. Vous justifierez vos réponses de manière précise et concise.

1. Rappeler ce qu'est un modèle d'une formule.
2. Donner un exemple de formule  $\varphi$  telle que ni  $\varphi$  ni  $\neg\varphi$  ne sont des tautologies.
3. Peut-on avoir un modèle de  $\varphi$  qui soit aussi un modèle de  $\neg\varphi$ ?
4. On considère un ensemble  $\Gamma$  de formules.
  - Est-ce qu'une formule de  $\Gamma$  est conséquence logique de  $\Gamma$ ?
  - On considère  $\varphi$  une formule qui n'est pas dans  $\Gamma$ , mais qui est une tautologie. Est-ce que  $\varphi$  est une conséquence logique de  $\Gamma$ ?

**Exercice 3** (6 pts)

1. Utiliser la méthode des tableaux sémantiques pour savoir si les formules suivantes sont ou non des tautologies :

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

$$\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg(p \vee q)$$

Si la formule n'est pas une tautologie vous donnerez une valuation qui la rend fausse.

2. Utiliser la méthode des tableaux sémantiques pour savoir si la formule

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \Rightarrow \neg r)$$

est une conséquence logique de l'ensemble  $\Gamma = \{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee q \vee \neg r, \neg p \Rightarrow \neg r\}$ . Si la formule n'est pas une conséquence logique vous donnerez un modèle de  $\Gamma$  qui n'est pas modèle de la formule.

**Exercice 4** (5 pt) On rappelle que les règles utilisées dans la méthode de résolution sont :

$$(Resolution) \frac{l \vee C \quad \neg l \vee C'}{C \vee C'}$$

avec  $l$  un littéral.

$$(Factorisation) \frac{l \vee C_1 \vee l \vee C_2}{C_1 \vee l \vee C_2}$$

1. Calculer une forme clausale de

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \vee r)]$$

(utilisez les règles données en cours pour le calcul en donnant toutes les étapes). Vous écrirez le résultat comme un ensemble de clause.

2. Rappeler le principe de la méthode de résolution pour prouver qu'une formule  $\varphi$  est une tautologie. En utilisant la résolution, montrer que la formule

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \vee \neg r]$$

est une tautologie (Vous pourrez utiliser le résultat de la question précédente pour la mise en forme clausale).