



On rappelle que $\forall x, y$ est une abréviation de $\forall x \forall y$ (et de même pour \exists).

Exercice 1 [4pt] Formes prenexes et clausales.

1. Calculer une forme prenexe de

$$(\exists x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x, y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x, y) \wedge \exists x Q(y, x)))$$

(vous donnerez toutes les étapes du calcul)

2. Calculer une forme clausale de

$$\forall x \neg r(x, x) \wedge \forall x, y (r(x, y) \Rightarrow \neg r(y, x)) \wedge \forall x, y (r(x, y) \Rightarrow \exists z (r(x, z) \wedge r(z, x)))$$

Vous donnerez le résultat comme un ensemble de clauses.

Exercice 2 [4pts] Unification.

Résoudre les problèmes d'unification suivants (vous répondrez soit *non unifiable* ou bien vous donnerez un unificateur le plus général). Dans tous les cas vous détaillerez toutes les applications de règles de l'algorithme.

- 1.

$$g(x_1, x_2, f(x_3, x_3)) = g(f(x_0, a), f(x_1, x_1), f(x_2, x_2))$$

- 2.

$$g(x_1, x_2, f(x_2, x_3)) = g(f(x_0, a), f(x_1, x_1), f(x_1, b))$$

Exercice 3 (8 pts) Méthodes de preuve.

1. Utiliser la méthode des tableaux sémantiques pour vérifier si les formules suivantes sont ou non des tautologies (si la formule n'est pas une tautologie, vous donnerez un modèle de la négation) :

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists y \exists z (P(y) \wedge Q(z)))$$

$$\exists x \forall y \exists z (r(x, x) \Rightarrow r(y, z))$$

2. On rappelle que dans la méthode de résolution on peut utiliser autant de fois que voulu les clauses (aussi bien celle de départ que celles déduites en cours de résolution). On veut montrer par résolution que la formule

$$\begin{aligned}
 & (\exists x, y \ r(x, y) \wedge \forall x, y \ (r(x, y) \Rightarrow r(y, x)) \wedge \forall x, y, z \ (r(x, y) \wedge r(y, z) \Rightarrow r(x, z))) \\
 & \Rightarrow \\
 & (\exists x \ r(x, x))
 \end{aligned}$$

est une tautologie.

- (a) Calculer l'ensemble des clauses permettant de débiter la résolution.
- (b) Utiliser la méthode de résolution pour montrer que la formule est une tautologie (seule la règle de résolution est utile, la règle de factorisation n'est pas nécessaire).

Exercice 4 (4 pts) Modèles.

Pour chaque question, vous direz quel est le domaine, l'interprétation des fonctions et des prédicats.

1. Peut-on donner un modèle pour la formule $\exists x \ (p(x) \wedge \neg p(x))$?
2. Donner un modèle de Herbrand du programme Prolog :

$$\begin{aligned}
 & \textit{toto}(s(s(s(o))))). \\
 & \textit{toto}(s(s(s(X)))) : \neg \textit{toto}(X).
 \end{aligned}$$

3. Dans cette question on note le prédicat $<$ de manière infixée et on écrit $x < y$ pour $< (x, y)$. Le symbole $=$ désigne le prédicat d'égalité (avec les axiomes associés) qui s'interprète par l'égalité dans le domaine de l'interprétation. Donner un modèle qui n'est pas un modèle de Herbrand pour la formule

$$\begin{aligned}
 & \forall x \ \neg(x < x) \\
 & \wedge \forall x, y, z \ ((x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z) \\
 & \wedge \forall x, y \ (x < y \Rightarrow \neg y < x) \\
 & \wedge (\forall x, y \ (x < y \vee y < x \vee x = y)) \\
 & \wedge \forall x, y \ (x < y \Rightarrow (\exists z \ (x < z \wedge z < y)))
 \end{aligned}$$