



On rappelle que  $\forall x, y$  est une abréviation de  $\forall x \forall y$  (et de même pour  $\exists$ ).

**Exercice 1** [4pt] Formes prenexes et clausales.

1. Calculer une forme prenexe de

$$(\exists x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x, y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x, y) \wedge \exists x' Q(y, x')))$$

(vous donnerez toutes les étapes du calcul)

Renommage :

$$(\exists x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x, y))) \Rightarrow (\exists y' (\forall x'' P(x'', y') \wedge \exists x' Q(y', x')))$$

Passer en tête la quantification à droite de implique, et passer en échangeant les quantificateurs celle à gauche :

$$\exists y' \forall x'' \exists x' \forall x \exists y [(P(x, y) \wedge Q(x, y)) \Rightarrow (P(x'', y') \wedge Q(y', x'))]$$

2. Calculer une forme clausale de

$$\forall x \neg r(x, x) \wedge \forall x, y (r(x, y) \Rightarrow \neg r(y, x)) \wedge \forall x, y (r(x, y) \Rightarrow \exists z (r(x, z) \wedge r(z, x)))$$

Vous donnerez le résultat comme un ensemble de clauses.

$$\neg r(x, x), \neg r(x, y) \vee \neg r(y, x), \neg r(x, y) \vee (r(x, f(x, y)), \neg r(x, y) \vee \wedge r(f(x, y), x))$$

**Exercice 2** [4pts] Unification.

Résoudre les problèmes d'unification suivants (vous répondrez soit *non unifiable* ou bien vous donnerez un unificateur le plus général). Dans tous les cas vous détaillerez toutes les applications de règles de l'algorithme.

1. (Plusieurs calculs peuvent être fait simultanément)

$$g(x_1, x_2, f(x_3, x_3)) = g(f(x_0, a), f(x_1, x_1), f(x_2, x_2))$$

$$x_1 = f(x_0, a), x_2 = f(x_1, x_1), f(x_3, x_3) = f(x_2, x_2)$$

$$x_1 = f(x_0, a), x_2 = f(x_1, x_1), x_3 = x_2, x_3 = x_2$$

$$x_1 = f(x_0, a), x_3 = f(x_1, x_1), x_2 = x_3, x_3 = x_3$$

$$x_1 = f(x_0, a), x_2 = f(f(x_0, a), f(x_0, a)), x_3 = f(f(x_0, a), f(x_0, a))$$

donne le pgu

2.

$$g(x_1, x_2, f(x_2, x_3)) = g(f(x_0, a), f(x_1, x_1), f(x_1, b))$$

$$x_1 = f(x_0, a), x_2 = f(x_1, x_1), f(x_2, x_3) = f(x_1, b)$$

$$x_1 = f(x_0, a), x_2 = f(x_1, x_1), x_2 = x_1, x_3 = b$$

$$x_1 = f(x_0, a), x_1 = f(x_1, x_1), x_2 = x_1, x_3 = b$$

echec

**Exercice 3** (8 pts) Méthodes de preuve.

1. Utiliser la méthode des tableaux sémantiques pour vérifier si les formules suivantes sont ou non des tautologies (si la formule n'est pas une tautologie, vous donnerez un modèle de la négation) :

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists y \exists z (P(y) \wedge Q(z)))$$

$$\exists x \forall y \exists z (r(x, x) \Rightarrow r(y, z))$$

2. On rappelle que dans la méthode de résolution on peut utiliser autant de fois que voulu les clauses (aussi bien celle de départ que celles déduites en cours de résolution). On veut montrer par résolution que la formule

$$\begin{aligned} & (\exists x, y r(x, y) \wedge \forall x, y (r(x, y) \Rightarrow r(y, x)) \wedge \forall x, y, z (r(x, y) \wedge r(y, z) \Rightarrow r(x, z))) \\ & \Rightarrow \\ & (\exists x r(x, x)) \end{aligned}$$

est une tautologie.

- (a) Calculer l'ensemble des clauses permettant de débiter la résolution. Mettre en forme clausale la négation de la formule.

$$(1) \{r(a, b), (2) \neg r(x, y) \vee r(y, x), (3) \neg r(x, y) \vee \neg r(y, z) \vee r(x, z), (4) \neg r(x, x)\}$$

On utilise les mêmes noms de variables dans les clauses, mais ceux-ci étant quantifiés universellement, ils sont anonymes et on les peut renommer avant chaque étape de résolution.

- (b) Utiliser la méthode de résolution pour montrer que la formule est une tautologie (seule la règle de résolution est utile, la règle de factorisation n'est pas nécessaire).

Résolution (1) (2) donne (5)  $r(b, a)$

Résolution (1) (3) donne (6)  $\neg r(b, z) \vee r(a, z)$

Résolution (6) (5) donne (7)  $r(a, a)$

Résolution (7) (4) donne la clause vide.

**Exercice 4** (4 pts) Modèles.

Pour chaque question, vous direz quel est le domaine, l'interprétation des fonctions et des prédicats.

1. Peut-on donner un modèle pour la formule  $\exists x (p(x) \wedge \neg p(x))$  ?

Non : elle signifie qu'un élément vérifie une propriété et sa négation.

2. Donner un modèle de Herbrand du programme Prolog :

$$\begin{aligned} & \text{toto}(s(s(s(o)))) . \\ & \text{toto}(s(s(s(X)))) : \neg \text{toto}(X) . \end{aligned}$$

Interprétation des symboles de fonction par eux-même. Le domaine est donc  $D = \{o, s(o), s(s(o)), \dots\}$  et on définit les atomes pour lesquels toto est vrai. Le plus simple est de dire que toto est vrai partout. Un autre modèle est de prendre  $\text{toto}(s(s(s(o))))$ ,  $\text{toto}(o)$  vrais et toto faux ailleurs.

3. Dans cette question on note le prédicat  $<$  de manière infixée et on écrit  $x < y$  pour  $<(x, y)$ . Le symbole  $=$  désigne le prédicat d'égalité (avec les axiomes associés) qui s'interprète par l'égalité dans le domaine de l'interprétation. Donner un modèle qui n'est pas un modèle de Herbrand pour la formule

$$\begin{aligned} & \forall x \neg(x < x) \\ & \wedge \forall x, y, z ((x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z) \\ & \wedge \forall x, y (x < y \Rightarrow \neg y < x) \\ & \wedge (\forall x, y (x < y \vee y < x \vee x = y)) \\ & \wedge \forall x, y (x < y \Rightarrow (\exists z (x < z \wedge z < y))) \end{aligned}$$

Prendre  $D = \mathbb{Q}$ ,  $=$  l'égalité et  $<$  l'ordre strict.