COURS DE LOGIQUE

Karl Schlechta
LIF - Universite de Provence
schcsg@gmail.com
http://www.cmi.univ-mrs.fr/∼ks

September 29, 2010

Contents

1 Introduction

L'objectif de la logique est de faire des conclusions sûres - de manière absolue dans la tradition, relatives aux axiomes dans l'approche moderne. Le langage naturel s'est avéré trop vague (et riche) pour y arriver. Deux exemples: (a) le paradoxe du menteur: "Je mens." Si j'ai menti en le disant, je ne mens pas, mais je viens de mentir. Si je n'ai pas menti en le disant, c'est faux aussi. (b) notions vagues comme "grand", "proche" etc.

Pour cette raison, la logique moderne travaille avec des langages artificiels et relativement pauvres - cette (et autres) modestie(s) est la raison principale pour son succès après 2000 ans de stagnation.

La logique est un outil pour parler et raisonner d'une certaine classe de sujets. Pour différents sujets, on utilise différentes logiques: il n'y a pas une seule logique, mais, par exemple, si on veut parler de "possibilité", on va introduire un opérateur pour "possible" - qui n'existe pas dans la logique classique de base. Si on veut parler des situations "normales", on introduit un opérateur pour "normal", etc.

Un exemple: la vérité est fermée sous disjonction: Si "2+2=4" est vrai, "2+2=4 ou la lune est un camembert" est vrai aussi - sans que la deuxième partie soit vraie. De l'autre côté, les devoirs ne sont pas fermées sous disjonction: "Il faut être honnête" est raisonnable, mais "il faut être honnête ou tuer sa grande-mère" semble un peu moins acceptable. (On note que la deuxième partie n'est guère un devoir.) Ces différences doivent être reflétées par des logiques adéquates.

La question si une logique est adéquate pour un sujet est un mélange d'un problème philosophique et d'un problème mathématique. Ainsi, il est plus facile de séparer les deux: On définit clairement le sujet à traiter, on en fait une abstraction adéquate, un objet mathématique, cela s'appelle une sémantique formelle, et, seulement ensuite, on cherche une logique qui correspond à la sémantique formelle. Le premier problème est la partie philosophique, le deuxième la partie mathématique, elle est résolue positivement par un théorème de correction et de complétude, qui disent que tout ce qui est vrai dans la sémantique est démontrable, mais pas plus.

Dans ce cours, nous allons nous concentrer sur la deuxième question, qui va nous permettre d'apprendre à manipuler des systèmes logiques, sur le plan de la sémantique et sur le plan de la logique dans le sens stricte, i.e. la déduction.

La logique classique est bien adaptée pour le raisonnement sur les objets mathématiques, comme nombres naturels, espaces vectoriels, etc. - d'un point de vue platoniste.

Mais, la logique classique est aussi la plus simple, et forme la base de presque toutes les autres logiques - pour comprendre ces autres logiques, et faut avoir compris la logique de base. On commence avec le plus simple, et nous allons présenter ici surtout la logique classique, d'abord la logique propositionelle, ensuite la logique des prédicats (beaucoup plus compliquée que la logique propositionelle).

Nous commencons dans le chapitre 2 avec la logique propositionelle (on dit aussi calcul propositionel). Cette logique parle de propriétés de base, et de leur combinaison. On s'imagine qu'on parle d'un seul objet, plus précisément de ses propriétés, par exemple "bleu", "rond", etc., l'objet peut donc être bleu et rond, ou bleu, mais pas rond, ou pas bleu, mais rond, ou ni l'un ni l'autre - ce sont toutes les possibilités dans notre langage de 2 éléments de base (qu'on appelle variables propositionelles). Ces quatre possibilités donnent les quatre modèles de ce petit langage. Les opérateurs du langage propositionelle sont (pour tout ensemble de variables propositionelles, donc c'est la partie constante): "et", "ou", "non", "implique" - et quelques autres si on en a envie: déjà, par ex., le "et" et le "non" permettent de définir le reste. Maintenant, on veut faire des déductions, pour cela on se donne des axiomes - qu'on considère intuivement vrais - comme "a ou non(a)", et (une) règle, qui s'appelle Modus Ponens, et qui permet de déduire de "a" et "a implique b" "b". Une preuve formelle de ϕ à partir de T partira des axiomes et des formules dans T, et "arrive" à ϕ en appliquant la règle Modus Ponens, ceci donne la structure d'un arbre binaire (et fini). (Ici, nous suivons en partie le livre de Delahaye: "Outils logiques pour l'intelligence artificielle".)

Plus en détail:

Nous introduisons ici les notions de base de la logique propositionelle: langage, modèle, preuve, et nous démontrons les théorèmes de correction et de complétude: $T \vdash \phi$ ssi $T \models \phi$ pour tout T et ϕ.

Section 2.1 contient une introduction au langage propositionnel. Dans la section 2.2, nous discutons les modèles pour la logique propositionelle, dans la section 2.3 une axiomatisation pour cette logique, avec notion de preuve, et en section 2.4 nous prouvons l'équivalence $T \vdash \phi$ ssi $T \models \phi$. La première direction, $T \vdash \phi \Rightarrow T \models \phi$, est simple, voir Théorème 2.14. L'idée de preuve de la 2ème direction, $T \models \phi \Rightarrow T \vdash \phi$, est la suivante: $T \not\vdash \phi \Rightarrow$ (par Fait 2.12) $Cons(T \cup \{\neg\phi\}) \Rightarrow$ (par *Thèorème* 2.5) existe $T' \supseteq T \cup \{\neg\phi\}$ maximal consistent. T' definit un modèle $m_{T'}$ par $m_{T'}(p) = v$ ssi $p \in T'$, ainsi $Th(m_{T'}) \cap v(\mathcal{L}) = T' \cap v(\mathcal{L})$. Par Fait 2.16, $Th(m_{T'})$ est maximal consistent, ainsi par Lemme 2.17 $Th(m_{T'}) = T'$, et comme $m_{T'} \models Th(m_{T'})$, $m_{T'} \models T'$, donc $m_{T'} \models T \cup \{\neg\phi\}$, donc $T \not\models \phi$. En section 2.5, nous présentons la procédure de Davis/Putnam, qui permet de déterminer si un ensemble de formules (d'une certaine forme syntaxique) a un modèle. Cette procédure sera à implementer dans les TP (cela ne concerne pas le télé-enseignement).

Nous concluons ce chapitre avec quelques remarques sur des logiques-nonclassiques propositionelles, en forme d'exercices.

Le chapitre 3 introduit la logique des prédicats (aussi logique du premier ordre), où un modèle est beaucoup plus riche: c'est un ensemble non-vide d'objets, un "univers", avec des noms pour quelques objets (qu'on appelle les constantes), des relations (unaires, binaires, etc., pensez par ex. à "bleu" pour une relation unaire, $'' <''$ pour une relation binaire), des fonctions (unaires, binaires, etc., pensez à $log(x)$, $sin(x)$, $x + y$ etc.). Dans le langage, on a des noms pour ces fonctions etc., on a aussi les opérateurs de la logique propositionelle, et, comme nouveaux opérateurs les quantificateurs existentiel ("il existe x tel que ....") et universel (" pour tout x il est vrai que ....") et le symbole = pour l'égalité. Les axiomes et règles de déduction sont aussi plus riches, et permettent de traiter les nouveaux symboles, par ex. on devra être capable de dire "si $x = y$, donc $f(x) = f(y)$" ou: "si pour tout x $A(x)$ est vrai, et t est un élément de l'univers, donc $A(t)$ est vrai aussi." (Ici, nous suivons le (tout début) du livre Chang/Keisler: "Model theory".)

L'objectif du chapitre 3 est analogue à celui du chapitre II. Nous introduisons les notions de base du langage, des modèles et des preuves, et démontrons la correction et la complétude. L'argument essentiel est ici qu'une théorie consistente T peut être complétée à une théorie T' maximale consistente, qui a des témoins, i.e. suffisamment de constantes C pour démontrer $\exists x\phi$ par un $\phi[C]$ (Lemme 3.8). Nous construisons un modèle pour T', utilisant essentiellement les constantes pour en construire un univers adéquat (Lemme 3.9). Le reste de l'argument est proche de celui du cas propositionnel. (Notre preuve démontre aussi le théorème de Lindenbaum/Skolem/Tarski.)

Dans le chapitre 4, nous intoduisons un tout petit bout de la théorie des ensembles, surtout pour les étudiants qui n'en ont pas l'habitude.

Chapitre 5 contient l'example d'un examen.

Un mot pédagogique:

Malheureusement, il nous faut introduire un nombre important de définitions, et je suis très conscient que c'est difficile pour un débutant d'absorber tout cela. Il y a des définitions de base qu'il faut absolument connaître, sans eux, on ne comprend rien, il y en a aussi des moins importantes. Et, il y a aussi des choses qu'on oublie mieux pour suivre ce cours, par ex. les tables de vérité et tout autour. Il y a une connexion avec la notion de modèle, mais cela risque plutôt de causer des confusions, en tout cas, si je ne le démande pas explicitement, un argument par table de vérité ne sera pas accepté. Il vous faut vous habituer aux nouvelles définitions.

Et, pour conclure cette partie: Si vous ne comprenez pas, n'hésitez pas de demander. Il n'est pas une honte de ne pas comprendre, mais de ne pas poser des questions. Celui, qui ne pose jamais de questions a tout compris (et c'est rare) ou rien compris (c'est plus souvent le cas).

L'essentiel: Tous les définitions et résultats de base. L'idée générale des preuves - mais par exemple pas ceux concernent les substitutions etc., ce n'est pas profond, et ne contient pas d'idées importantes.

Ce qu'il ne faut pas apprendre: Les axiomes, et les preuves formelles données - les notions sont essentielles, mais pas les détails.

On a fini de papoter, et on commence le travail - bon courage!

2 La logique propositionelle

2.1 Le langage de la logique propositionelle

Définition 2.1

Note: on utilise un minimum des notions de la théorie des ensembles, comme ensemble vide, notions de union, intersection, sous-ensemble, ensemble des sous-ensembles, etc., une introduction beaucoup plus formelle se trouve dans la Section 4.

Un langage propositionel $\mathcal{L}$ (les symboles $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ etc. seront réservés pour un langage) est construit d'un ensemble $v(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, ($\emptyset$ est l'ensemble vide) on appelle ses éléments variables propositionelles, qui sont - avec les opérateurs toujours présents comme $\wedge$ ("et"), $\vee$ ("ou"), $\rightarrow$ ("implique"), $\neg$ ("non") etc. - les entités de base d'un langage propositionel.

Normalement, on va utiliser p, q, p', p_1, etc. pour les variables propositionelles.

Les formules de $\mathcal{L}$, ($F(\mathcal{L})$ dénote l'ensemble des formules) sont construites par récurrence à partir de $v(\mathcal{L})$:

1. $v(\mathcal{L}) \subseteq F(\mathcal{L})$, ($\subseteq$ abbrévie "est inclus dans" ou "est sous-ensemble de", cela veut dire que tout élément dans l'ensemble à gauche est aussi élément de l'ensemble à droite, et les deux peuvent aussi être égaux.)

2. si $\phi, \psi \in F(\mathcal{L})$, donc (ϕ), $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi \in F(\mathcal{L})$. ($\in$ dit: est élément de ...)

(Et ce sont toutes les formules, c'est à dire une séquence de lettres qu'on ne peut pas générer ainsi n'est pas une formule, par ex. "$)p\wedge$" n'est pas une formule, la parenthèse de gauche manque, et derrière le $\wedge$ doit être un symbole.)

On va utiliser les lettres grèques minuscules ϕ, ψ, etc. pour les formules (si elles ne sont pas forcément des variables propositionelles). On appelle aussi les variables propositionelles et leurs négations (simples, non itérées) litéraux. Ces notions (variables propositionelles, litéraux) ne sont pas normées, et diffèrent un peu d'auteur à auteur.

$\phi \leftrightarrow \psi$ est une abbréviation pour $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$.

On utilise les parenthèses pour désambiguer: $p \wedge q \vee r$ pourrait être $(p \wedge q) \vee r$ ou $p \wedge (q \vee r)$ - les deux ne sont pas équivalents, mais il y a quelques règles pour simplifier la notation: $p \wedge \neg q$ est une abbréviation pour $p \wedge (\neg q)$, $p \wedge q \vee r$ une abbréviation pour $(p \wedge q) \vee r$ - en général, un suivit la hiérarchie: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, donc $\neg$ "lie" plus fortement que $\wedge$ etc. Si vous avez un doute, écrivez plus de parenthèses, cela ne nuit pas.

Une théorie T (de $\mathcal{L}$) est un sous-ensemble quelconque de $F(\mathcal{L})$. T, S, etc. vont en général dénoter des théories. (Attention: d'autres auteurs utilisent quelque fois la notion de théorie seulement pour des ensembles déductivement fermés - voir Définition 2.5.)

Un symbole barré est sa négation.

Quelque fois vous voyez des expressions comme $\forall.\phi$, c'est une autre manière d'écrire $\forall(\phi)$.

Remarque 2.1

(1) On note que $F(\mathcal{L})$ est infini, même si $v(\mathcal{L})$ est fini. (Si $p \in v(\mathcal{L})$, par ex. $\neg p$, $\neg\neg p$ etc. sont des formules, toutes différentes (comme suite de lettres).)

(2) La construction d'une formule donne un arbre de manière naturelle. Par exemple, $(a \wedge b) \vee c$ donne l'arbre avec racine $(a \wedge b) \vee c$, les deux noeuds suivants sont $(a \wedge b)$ et c, le premier a deux successeurs, a et b, etc.

(3) On note que la définition par récurrence d'une formule diffère d'autres récurrences qu'on trouve:

(a) il y a plusieurs cas de départ - chaque variable propositionelle en est un,

(b) on construit souvent à partir de 2 éléments déjà construits,

(c) il y a plusieures règles de construction.

Exercice 2.1

(1) Montrez formellement que $p \rightarrow q$ est bien une formule pour $\mathcal{L}$ défini à partir de $v(\mathcal{L}) := \{p, q\}$, mais pas pour $\mathcal{L}$ défini à partir de $v(\mathcal{L}) := \{p, r\}$.

(2) Montrez formellement que $(((p)\wedge \rightarrow r) \vee s)$ n'est pas une formule pour aucun langage.

(3) Dessinez l'arbre de construction pour une formule de longueur au moins 10 (que vous choisissez vous-même).

(4) Refléchissez comment faire un logiciel qui analyse une formule, construit son arbre de construction, et détermine si c'est bien une formule "légale".

(5) Contrastez le principe de construction par récurrence en haut avec celui pour les nombres naturels: $0 \in \omega$, $n \in \omega \rightarrow n+1 \in \omega$. - On utilise ω ou $\boldsymbol{N}$ pour dénoter les nombres naturels.

2.2 La sémantique de la logique propositionelle

Définition 2.2

(1) Un $\mathcal{L}$-modèle m est une fonction $m : v(\mathcal{L}) \rightarrow \{true, false\} = \{t, f\}$ (ou $\{vrai, faux\}$, $\{v, f\}$).

$M(\mathcal{L})$ est l'ensemble des $\mathcal{L}$-modèles.

(2) La validité d'une $\mathcal{L}-$formule ϕ dans un $\mathcal{L}$ -modèle m est definie par récurrence sur l'opérateur extérieur de ϕ :

1. $m \models p :\Leftrightarrow m(p) = t$ si $p \in v(\mathcal{L})$ - la notation $:\Leftrightarrow$ signifie que la partie gauche est définie par la partie droite. On peut donc lire: $m \models p$ est vrai par définition si et seulement si (abbrévié ssi) $m(p) = t$ pour $p \in v(\mathcal{L})$

2. $m \models (\phi) :\Leftrightarrow m \models \phi$ - les parenthèses ne changent donc pas la validité

$m \models \neg\phi :\Leftrightarrow m \not\models \phi$

$m \models \phi \wedge \psi :\Leftrightarrow m \models \phi$ et $m \models \psi$

$m \models \phi \vee \psi :\Leftrightarrow m \models \phi$ ou $m \models \psi$

$m \models \phi \rightarrow \psi :\Leftrightarrow m \not\models \phi$ ou $m \models \psi$ - attention: ceci ne correspond pas à l'utilisation habituelle!

par conséquence:

$m \models \phi \leftrightarrow \psi :\Leftrightarrow (m \models \phi$ et $m \models \psi)$ ou $(m \not\models \phi$ et $m \not\models \psi)$ (Preuve comme exercice.)

(3) On definit comme extension:

$m \models T :\Leftrightarrow \forall\phi \in T.m \models \phi$, ($\forall$ est le quantificateur universel, à lire "pour tout", ici: pour tout ϕ qui est élément de T, m est un modèle de ϕ.)

$M(\phi) := \{m \in M(\mathcal{L}) : m \models \phi\}$, (:= veut dire que l'ensemble (ou une autre entité) à gauche est définie par l'expression à droite, à lire ici: $M(\phi)$ est défini comme l'ensemble des $m \in M(\mathcal{L})$ tel que $m \models \phi$)

$M(T) := \{m \in M(\mathcal{L}) : m \models T\}$,

$M \models \phi :\Leftrightarrow \forall m \in M.m \models \phi$,

$T \models \phi :\Leftrightarrow \forall m \in M(\mathcal{L})(m \models T \Rightarrow m \models \phi)$,

$\models \phi :\Leftrightarrow \emptyset \models \phi$,

$Th(m) := \{\phi \in F(\mathcal{L}) : m \models \phi\}$,

$Th(M) := \{\phi \in F(\mathcal{L}) : M \models \phi\}$,

$At(m) := \{p \in v(\mathcal{L}) : m(p) = v\} \cup \{\neg p \in v(\mathcal{L}) : m(p) = f\}$.

(4) On dit: pour $m \models \phi$ etc. "ϕ (ou T) est vrai dans m (ou M)", ou " ϕ est valide dans m", ou "m est un modèle de ϕ", etc. Lisez ainsi, et ne donnez pas de nom au symbôle lui-même, c'est sans importance (ou, si vous voulez, inventez votre propre nom pour le symbôle). J'en connais pas de nom ni en Allemand, ni en Francais, en Anglais je ne suis pas sûr - on n'en a simplement pas besoin (si on n'est pas imprimeur de profession), parce qu'on lit toujours les deux côtés avec.

Fait 2.1

(a) $m \not\models \phi \wedge \neg\phi$,

(b) $m \models \phi \vee \neg\phi$,

(c) $\phi \rightarrow \psi \models \neg\phi \vee \psi$, $\neg\phi \vee \psi \models \phi \rightarrow \psi$,

(d) $m \models (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$,

(e) $m \models (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$,

(f) $M \subseteq M'$, $M \models \phi \not\Rightarrow M' \models \phi$,

$M \subseteq M'$, $M' \models \phi \Rightarrow M \models \phi$,

(g) $T \subseteq T'$, $T \models \phi \Rightarrow T' \models \phi$,

$T \subseteq T'$, $T' \models \phi \not\Rightarrow T \models \phi$,

(h) $T \subseteq T' \not\Rightarrow M(T) \subseteq M(T')$,

$T \subseteq T' \Rightarrow M(T') \subseteq M(T)$,

(i) $M(T') \subseteq M(T) \not\Rightarrow T \subseteq T'$.

Preuve: (a) Si $m \models \phi \wedge \neg\phi$, par définition $m \models \phi$ et $m \models \neg\phi$, mais $m \models \neg\phi$ ssi $m \not\models \phi$, une contradiction. Les autres preuves sont laissées comme exercice.

□

Exercice 2.2

(a) Montrez l'énoncé concernant $m \models \phi \leftrightarrow \psi$ dans la Définition 2.2.

(b) Montrez (b) - (i) du Fait 2.1. Attention: $T \subseteq T'$ dit que T est un sous-ensemble de T', et rien d'autre. Ainsi, $\{\phi\} \not\subseteq \{\phi \wedge \phi\}$.

Fait 2.2

(1) $M(T) \cap M(T') = M(T \cup T')$.

(2) $\bigcap\{M(T_i) : i \in I\} = M(\bigcup\{T_i : i \in I\})$, ($\bigcap X := \{y :$ pour tout $x \in X, y \in x\}$, et ($\bigcup X := \{y :$ il existe $x \in X, y \in x\}$).

(3) $M(T) \cup M(T') = M(T \vee T')$, ($T \vee T' := \{\phi \vee \phi' : \phi \in T,\ \phi' \in T'\}$, si $T, T' \neq \emptyset$).

(4) $M(At(m)) = \{m\}$.

(5) Si $v(\mathcal{L})$ est fini, tous les ensembles de modèles sont définissables, i.e. si $X \subseteq M(\mathcal{L})$, il existe T tel que $X = M(T)$.

(6) les fragments finis des modèles decident la validité: Si $Var(\phi)$ est l'ensemble des variables dans ϕ, et $\forall p \in Var(\phi).m(p) = m'(p)$, $m \models \phi \Leftrightarrow m' \models \phi$.

(7) Si $v(\mathcal{L})$ est infini, il existe $X \subseteq M(\mathcal{L})$ tel qu'il n'y a pas une $\mathcal{L}$-théorie T avec $X = M(T)$. Par consequence, (3) ne peut pas être generalisé aux unions infinies.

Preuve:

(1) $m \in M(T) \cap M(T') \Leftrightarrow m \in M(T)$ et $m \in M(T') \Leftrightarrow \forall\phi \in T.m \models \phi$ et $\forall\phi \in T'.m \models \phi \Leftrightarrow \forall\phi \in T \cup T'.m \models \phi$.

(2) comme (1)

(3) Soit $m \in M(T) \cup M(T')$, $\phi \vee \phi' \in T \vee T'$. Si $m \in M(T)$, donc $m \in \phi$, donc $m \models \phi \vee \phi'$, de même si $m \in M(T')$.

Dans l'autre sens, supposons $m \notin M(T \vee T')$, donc il y a $\phi \in T$, $\phi' \in T'$ tel que $m \not\models \phi \vee \phi'$, donc $m \not\models \phi$, $m \not\models \phi'$, donc $m \notin M(T)$, $m \notin M(T')$.

(4) $m \in M(At(m))$ est trivial. Supposons $m' \neq m$, donc il y a $p \in v(\mathcal{L})$ tel que $m(p) = t$, $m'(p) = f$, ou vice versa. Donc au premier cas $p \in At(m)$, mais $m' \not\models p$, au deuxième cas $\neg p \in At(m)$, mais $m' \not\models \neg p$.

(5) Soit $X \subseteq M(\mathcal{L})$, $X = \{m_1, \ldots, m_n\}$, donc $X = M(At(m_1) \vee \ldots \vee At(m_n))$ par (3) et (4).

(6) Récurrence sur la complexité de ϕ :

(Plus précisément, la complexité est définie comme la longueur, et on suppose le résultat vrai pour toutes les formules de longueur inférieure.)

$\phi \in v(\mathcal{L})$: trivial.

$\phi = \neg\psi$: $Var(\phi) = Var(\psi)$, donc $\forall p \in Var(\psi).m(p) = m'(p)$, est vrai aussi, donc par hypothèse de récurrence $m \models \psi \Leftrightarrow m' \models \psi$, donc $m \models \phi \Leftrightarrow m' \models \phi$. $\phi = \psi \wedge \sigma$: $Var(\phi) = Var(\psi) \cup Var(\sigma)$, donc $\forall p \in Var(\psi).m(p) = m'(p)$, et $\forall p \in Var(\sigma).m(p) = m'(p)$, donc par récurrence $m \models \psi \Leftrightarrow m' \models \psi$, et $m \models \sigma \Leftrightarrow m' \models \sigma$, donc $m \models \phi \Leftrightarrow m' \models \phi$. Des arguments similaires traitent les autres cas.

(7) Soit $v(\mathcal{L}) = \{p_i : i \in \boldsymbol{N}\}$, $m \in M(\mathcal{L})$, $M' := M(\mathcal{L}) - \{m\}$. Supposons $M' = M(T)$, donc il y a ϕ tel que $\forall m' \in M'.m' \models \phi$, mais $m \not\models \phi$. Ainsi $m \models \neg\phi$, mais il y a $m' \in M'$ tel que $\forall p \in Var(\neg\phi).m(p) = m'(p)$, donc $m' \models \neg\phi$ par (6), une contradiction.

$\square$

Exercice 2.3

Montrez la "conséquence" dans (7).

Fait 2.3

(a) Attention: $M \neq M(Th(M))$ en général, si $v(\mathcal{L})$ est infini.

(b) $card(M(\mathcal{L})) = 2^{card(v(\mathcal{L}))}$ ($card(X)$ la cardinalité de X).

Preuve:

(a) Dans la preuve de Fait 2.2, (7), $M(Th(M')) = M(\mathcal{L}) \neq M'$.

(b) $M(\mathcal{L})$ est isomorphe à $\mathcal{P}(v(\mathcal{L}))$ ($\mathcal{P}$: ensemble de sous-ensembles). ("isomorphe" veut dire ici: il y a une bijection, i.e. une fonction qui est injective et surjective.) $\square$

Exercice 2.4

Elaborez la preuve de (b).

2.3 Une axiomatization de la logique propositionelle, notion de preuve

Définition 2.3

Les axiomes (schemata d'axiomes) et la règle de déduction de la logique propositionelle:

Soient ϕ, ψ des formules quelconques de $\mathcal{L}$ ($\phi = \psi$ est possible, aussi), les axiomes sont:

A1: $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$,

A2: $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma))$, A3: $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$.

Règle (Modus Ponens, MP):

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi}$$

Par exemple, si p est une variable propositionelle, $p \to (\neg\neg\neg p \to p)$ sera une instance du premier axiome dans ce langage.

Ax sera l'ensemble de tous les instances de A1-A3, donc $Ax = \{\phi \to (\psi \to \phi) : \phi, \psi \in F(\mathcal{L})\} \cup \{(\phi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \sigma)) : \phi, \psi, \sigma \in F(\mathcal{L})\} \cup \{(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi) : \phi, \psi \in F(\mathcal{L})\}$.

Définition 2.4

Une preuve d'une formule ϕ à partir d'un ensemble de formules T est un arbre FINI, tel que:

(1) la racine est ϕ,

(2) les feuilles sont des formules dans $T \cup Ax$,

(3) la structure interne est déterminée par la règle MP: si ψ est un noeud de l'arbre, mais pas une feuille, donc il a deux prédécesseurs, et ses prédécesseurs doivent être de la forme σ et $\sigma \to \psi$ pour quelque σ.

ATTENTION: Une preuve est cela et rien d'autre! C'est si simple que cela! Une preuve n'est pas une table de vérité ou autre machin/truc - ces réponses donnent des points négatifs.

La taille de la preuve est le nombre de ses noeuds (normalement, on peut aussi par ex. prendre la profondeur de la preuve, si cela est plus adapté). Preuves de la taille 1 sont permises, leur racine est une feuille. (Donc, dans ce cas, ϕ est dans $T \cup Ax$.)

S'il y a une preuve de ϕ à partir de T, nous écrivons $T \vdash \phi$, $\emptyset \vdash \phi$ est abbrevié par $\vdash \phi$ (toutes les feuilles sont des axiomes) - on dit: "il y a une preuve de ϕ à partir de T (ou $\emptyset$)". Même commentaire que pour $\models$: il n'y a pas de nom pour $\vdash$.

Vous trouvez un exemple dans la preuve du Fait 2.6, d'autres sur les pages suivantes. Pour faciliter l'écriture, on dessine les arbres avec des traits horizontaux.

Il est simple de vérifier qu'une preuve formelle (et complète) est vraiment une preuve, il est plus difficile de la trouver. Si on commence à travailler avec un système formel pour faire une preuve, au début, on ne trouve rien, après quelques heures, on arrive à faire des petites preuves, après quelques jours, des preuves plus importantes - c'est un problème psychologique.

Note: il y a beaucoup de systèmes d'axiomes équivalents pour la logique propositionelle (et aussi pour d'autres logiques). Equivalent veut dire: on peut prouver les mêmes formules. Le choix suit - entre autres - le goût de l'auteur.

Exercice 2.5

Réfléchissez comment écrire un logiciel qui vérifie si un arbre est vraiment une preuve de ϕ à partir de T.

Définition 2.5

(a) $\bot$ est $\phi \wedge \neg\phi$ pour n'importe quel ϕ,

(b) T est appellé consistent ou cohérent, $Cons(T)$, ssi $T \not\vdash \bot$,

(c) T est maximal consistent, ssi $Cons(T)$, et tout T' tel que $T \overset{\subset}{\neq} T'$ (T propre sous-ensemble de T' - j'utilise parfois ce symbôle au lieu de juste $\subset$ pour sousligner qu'ils ne sont pas égaux) est inconsistent (= pas consistent),

(d) $\overline{T} := \{\phi : T \vdash \phi\}$,

(e) T est fermé sous déduction ssi $T = \overline{T}$.

Fait 2.4

(1) $\vdash$ est compact et monotone, i.e.

(a) si $T \vdash \phi$, donc il y a $T' \subseteq T$, T' fini, tel que $T' \vdash \phi$,

(b) si $T \vdash \phi$, $T \subseteq T'$, donc $T' \vdash \phi$,

(2) $\phi \in T \cup Ax \Rightarrow T \vdash \phi$,

(3) $T \vdash \phi$, $T' \cup \{\phi\} \vdash \psi \Rightarrow T \cup T' \vdash \psi$,

(4) $\forall \phi, T, T'$ $(T \subseteq T' \subseteq \overline{T} \Rightarrow T \vdash \phi$ ssi $T' \vdash \phi)$,

(5) Corollaire: $Cons(T)$, $T \subseteq T' \subseteq \overline{T} \Rightarrow Cons(T')$,

(6) T maximal consistent $\Rightarrow T = \overline{T}$.

Preuve:

(1) (a) Si l'arbre fini X est une preuve de ϕ à partir de T, donc les feuilles de X, qui sont dans T, forment un T' cherché.

(b) Exercice.

(2) Exercice.

(3) remplacer toutes les feuilles ϕ dans la preuve de ψ à partir de $T' \cup \{\phi\}$ (ϕ peut figurer plusieures fois comme feuille) par l'arbre que démontre ϕ à partir de T. (C'est du jardinage, on greffe un arbre sur un autre!)

(4) facile: utilisez (1) (b) et l'idée de (3). Exercice.

(5) trivial. Exercice.

(6) $T \subseteq \overline{T}$ est trivial. L'autre direction est une conséquence de (5). Exercice. $\square$

Exercice 2.6

Bouchez les trous dans la preuve de Fait 2.4.

Théorème 2.5

(Théorème de Lindenbaum)

Si T est consistent, il y a T' tel que $T \subseteq T'$ et T' est maximal consistent.

Preuve:

Nous utilisons la compacité de $\vdash$, et l'Axiome du Choix - voir la partie sur la Théorie des Ensembles.

Soit $\phi_i : i < \kappa$ une énumération de $F(\mathcal{L})$ (cela existe par l'Axiome du Choix, et c'est le seul endroit où on l'utilise dans la preuve).

$T_0 := T$.

T_{i+1} : Si T_i est max. cons., donc $T_{i+1} := T_i$. Sinon, il y a $\phi \notin T_i$, tel que $T_i \cup \{\phi\}$ est consistent. Soit ϕ_α la première telle formule dans l'énumération, et nous choisissons $T_{i+1} := T_i \cup \{\phi_\alpha\}$.

$T_\lambda := \bigcup\{T_i : i < \lambda\}$ si λ est un nombre limite.

Par compacité, T_λ est aussi consistent. Soit $T' := T_\alpha$, α suffisamment grand, pour que $T_\alpha = T_{\alpha+1}$.

(Si vous ne savez pas ce qui est un nombre limite, supposez que le nombre de formules est dénombrable, donc la taille des nombres naturels.)

Plus en détail:

D'abord on note que les T_i croissent.

Supposons que la procédure ne s'arrête pas à un nombre successeur $i+1$, mais continue toujours. Prenons maintenant $T'' := \bigcup\{T_i : i < \lambda\}$ - où λ peut être ω, la cardinalité des nombres naturels. D'abord, T'' est cohérent: Sinon, il y a un ensemble FINI $S \subseteq T''$ tel que $S \vdash \bot$ (ici, la compacité de $\vdash$ est essentielle!), soit $S = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Tous les ψ_i étaient soit dans T_0, soient ils étaient ajoutés à une étappe T_{k_i}, donc la dernière les contenait tous, mais tous ces T_{k_i} étaient consistants, contradiction.

Maintenant, il faut montrer que T_ω est maximal cohérent si le nombre de formules est dénombrable. On note que nous avons toujours choisi la première formule ϕ_α possible, c'est à dire toutes les $\phi_{\alpha'}$ avec $\alpha' < \alpha$ étaient soit déjà ajoutées, soit, les ajoutant aurait donné une contradiction (on aurait pu déduire $\bot$). Supposons qu'on ait "oublié" d'ajouter un certain ϕ, donc $T_\omega \cup \{\phi\} \not\vdash \bot$, mais $\phi \notin T_\omega$. A un certain moment, on avait considéré $\phi = \phi_\alpha$ pour un certain α, on ne l'a pas ajouté parce que on aurait pu déduire $\bot$, ou ϕ était déjà présent. Mais si on avait pu déduire $\bot$, on le pourrait aussi de T_ω, comme T_ω contient tous les prédécesseurs. Et s'il était présent, il le serait toujours. Donc, c'est impossible.

D'ailleurs, l'énumération est arbitraire. Son choix détermine le choix de la théorie maximale cohérente, mais pas son existence - et nous avons cherché une telle théorie quelconque.

□

Remarque: Par exactement le même argument, on peut prouver le résultat analogue pour $T \not\vdash \psi$ au lieu de $T \not\vdash \bot$.

Fait 2.6

$\vdash \phi \to \phi$

Preuve:

$$\frac{\phi \to (\phi \to \phi) \quad (A1) \qquad \dfrac{\phi\to((\phi\to\phi)\to\phi) \quad (A1) \qquad (\phi\to((\phi\to\phi)\to\phi))\to((\phi\to(\phi\to\phi))\to(\phi\to\phi)) \quad (A2)}{(\phi\to(\phi\to\phi))\to(\phi\to\phi)}}{\phi \to \phi}$$

□

On voit qu'on fait des efforts relativement importants pour prouver une trivialité. Faire des démonstrations formelles commence toujours ainsi: Les systèmes d'axiomes sont intentionellement pauvres (petits), par conséquence, au début il faut se fabriquer les outils pour avancer plus rapidement. C'est comme dans l'histoire, on commence avec un bout de pierre, après une lame en pierre, après une hache, après le charbon, après le fer, etc., cela progresse de plus en plus vite.

Fait 2.7

$T \vdash \phi \to \psi \Rightarrow T, \phi \vdash \psi$ (T, ϕ abbrevie $T \cup \{\phi\}$.) ($\Rightarrow$ veut dire: implique)

Preuve:

$$\frac{\phi \qquad \dfrac{T}{\phi\to\psi}}{\psi}$$

(Bien sûr, le T au-dessus de la ligne signifie qu'on ait fait une preuve de $\phi \to \psi$ à partir de T.)

□

Proposition 2.8

(Théorème de Déduction)

$T, \phi \vdash \psi \Rightarrow T \vdash \phi \rightarrow \psi$

Preuve:

Récurrence sur la taille k de la preuve de ψ à partir T, ϕ.

$k = 1$: Donc $\psi \in T \cup Ax \cup \{\phi\}$. Si $\psi \in T \cup Ax$, donc

$$\frac{\psi \qquad \psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \quad (A1)}{\phi \rightarrow \psi}$$

est une preuve. Si $\psi = \phi$, Fait 2.7 donne le résultat.

$k > 1$: Supposons que résultat soit vrai pour $n < k$. La preuve de ψ a la forme

$$\frac{\frac{T,\phi}{\sigma} \qquad \frac{T,\phi}{\sigma \rightarrow \psi}}{\psi}$$

pour un σ.

Par hypothèse de induction (induction=récurrence), $T \vdash \phi \rightarrow \sigma$ et $T \vdash \phi \rightarrow (\sigma \rightarrow \psi)$.

$$\frac{\frac{T}{\phi \rightarrow \sigma} \qquad \frac{\frac{T}{\phi \rightarrow (\sigma \rightarrow \psi)} \qquad (\phi \rightarrow (\sigma \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \quad (A2)}{(\phi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)}}{\phi \rightarrow \psi}$$

□

Le Théorème de Déduction facilite les preuves formelles: Il est souvent (psychologiquement!) plus facile de démontrer $T, \phi \vdash \psi$, que de démontrer $T \vdash \phi \rightarrow \psi$.

Fait 2.9

(0) $\vdash (\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$

(1) $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma))$ (Cut)

(2) $\vdash \psi \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma)$

(3) $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$

(4) $\vdash \neg\neg\psi \rightarrow \psi$

(5) $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$

(6) $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$

(7) $\vdash \psi \rightarrow (\neg\sigma \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \sigma))$

(8) $\vdash (\psi \rightarrow \phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$

Preuve:

(0)

$$\frac{\dfrac{\phi\to(\phi\to\psi) \qquad (\phi\to(\phi\to\psi))\to((\phi\to\phi)\to(\phi\to\psi)) \quad A2}{(\phi\to\phi)\to(\phi\to\psi)} \qquad \phi \to \phi \quad (Fait 2.6)}{\phi \to \psi}$$

(1)

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\psi\to\sigma \qquad (\psi\to\sigma)\to(\phi\to(\psi\to\sigma)) \quad A1}{\phi\to(\psi\to\sigma)} \qquad (\phi\to(\psi\to\sigma))\to((\phi\to\psi)\to(\phi\to\sigma)) \quad A2}{(\phi\to\psi)\to(\phi\to\sigma)}}{\phi \to \sigma}$$

(2)

$$\frac{\psi \quad \psi \to \sigma}{\sigma}$$

(3)

$$\frac{\dfrac{\neg\psi \qquad \neg\psi\to(\neg\sigma\to\neg\psi) \quad A1}{\neg\sigma\to\neg\psi} \qquad (\neg\sigma \to \neg\psi) \to (\psi \to \sigma)}{\psi \to \sigma}$$

(4)

$$\frac{\dfrac{\neg\neg\psi \qquad \dfrac{\neg\neg\psi\to(\neg\psi\to\neg(\phi\to\phi)) \quad (3) \qquad (\neg\psi\to\neg(\phi\to\phi))\to((\phi\to\phi)\to\psi) \quad A3}{\neg\neg\psi\to((\phi\to\phi)\to\psi)}}{(\phi\to\phi)\to\psi} \qquad \phi \to \phi}{\psi}$$

(5)

$$\frac{\neg\neg\neg\psi \to \neg\psi \quad (4) \qquad (\neg\neg\neg\psi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\neg\psi) \quad A3}{\psi \to \neg\neg\psi}$$

(6)

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\phi\to\phi \quad (4) \qquad \phi\to\psi}{\neg\neg\phi\to\psi} \qquad \psi\to\neg\neg\psi (5)}{\neg\neg\phi\to\neg\neg\psi}}{\neg\psi \to \neg\phi}$$

(7)

$$\frac{\psi \to ((\psi \to \sigma) \to \sigma) \quad (2) \qquad ((\psi \to \sigma) \to \sigma) \to (\neg\sigma \to \neg(\psi \to \sigma)) \quad (6)}{\psi \to (\neg\sigma \to \neg(\psi \to \sigma))}$$

(8)

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\psi\to\phi \qquad (\psi\to\phi)\to(\neg\phi\to\neg\psi) \quad (6)}{\neg\phi\to\neg\psi} \qquad \neg\psi\to\phi}{\neg\phi\to\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\phi\to(\neg\phi\to\neg(\neg\phi\to\phi)) \quad (7)}{\neg\phi\to\neg(\neg\phi\to\phi)}}{(\neg\phi\to\phi)\to\phi} \quad A.3}{\phi}$$

□

Note: on peut maintenant introduire par ex. la nouvelle règle Cut (Coupure):

$$\frac{\phi \to \psi \quad \psi \to \sigma}{\phi \to \sigma}$$

Définition 2.6

Les axiomes pour $\wedge$ et $\vee$:

A.4: $\phi \wedge \psi \to \neg(\phi \to \neg\psi)$

A.5: $\neg(\phi \to \neg\psi) \to \phi \wedge \psi$

A.6: $\phi \vee \psi \to (\neg\phi \to \psi)$

A.7: $(\neg\phi \to \psi) \to \phi \vee \psi$

Fait 2.10

(1) $\vdash \phi \wedge \psi \to \phi$

(2) $\vdash \phi \wedge \psi \to \psi$

(3) $\{\phi, \psi\} \vdash \phi \wedge \psi$

Preuve:

(1)

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\phi\wedge\psi}{\neg(\phi\to\neg\psi)} \qquad \dfrac{\neg\phi\to(\phi\to\neg\psi) \quad Fait2.9,(3)}{\neg(\phi\to\neg\psi)\to\neg\neg\phi} \quad Fait2.9,(6)}{\neg\neg\phi}}{\phi} \quad Fait2.9,(4)$$

(2)

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\phi\wedge\psi}{\neg(\phi\to\neg\psi)} \qquad \dfrac{\neg\psi\to(\phi\to\neg\psi) \quad A1}{\neg(\phi\to\neg\psi)\to\neg\neg\psi} \quad Fait2.9,(6)}{\neg\neg\psi}}{\psi} \quad Fait2.9,(4)$$

(3)

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\psi}{\neg\neg\psi} \quad Fait2.9,(5) \qquad \dfrac{\phi \qquad \phi\to(\neg\neg\psi\to\neg(\phi\to\neg\psi)) \quad Fait2.9,(7)}{\neg\neg\psi\to\neg(\phi\to\neg\psi)}}{\neg(\phi\to\neg\psi)}}{\phi\wedge\psi}$$

$\square$

Définition 2.7

Soit $\psi[\phi/\phi']$ l'ensemble de formules obtenues à partir ψ par substitution de quelques occurrences de ϕ in ψ par ϕ'.

Exemple 2.1

Exemple: $\psi = (((p \wedge \neg q) \to r) \vee s) \to ((p \wedge \neg q) \vee (s \to t))$, $\phi = p \wedge \neg q$, $\phi' = t \to w$, donc $\psi[\phi/\phi'] = \{(((p \wedge \neg q) \to r) \vee s) \to ((p \wedge \neg q) \vee (s \to t)), (((p \wedge \neg q) \to r) \vee s) \to ((t \to w) \vee (s \to t)), (((t \to w) \to r) \vee s) \to ((p \wedge \neg q) \vee (s \to t)), (((t \to w) \to r) \vee s) \to ((t \to w) \vee (s \to t))\}$.

Proposition 2.11

(Théorème de Substitution)

$T \vdash \phi \leftrightarrow \phi'$, $\psi' \in \psi[\phi/\phi'] \Rightarrow T \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$.

Preuve:

La récurrence est, simultanément pour tous $\psi' \in \psi[\phi/\phi']$, par le nombre d'opérateurs $(\neg, \rightarrow, \vee, \wedge)$ dans ψ mais en dehors de ϕ. Mais $\vee$ et $\wedge$ sont traités après $\rightarrow$ et $\neg$. Ainsi, formellement, nous pouvons compter $\wedge$ et $\vee$ comme 4 opérateurs, ainsi $\neg(\sigma \rightarrow \neg\tau)$ sera plus simple que $\sigma \wedge \tau$ - comme nécessaire. (Remarque: cela peut sembler triché. Mais la seule chose qui importe est de ordonner les formules d'une manière ou d'une autre pour pouvoir les traiter dans la récurrence - l'ordre lui-même est sans importance. Par ex., on pourrait aussi faire une récurrence sur les nombres naturels dans l'ordre 0-2-1-4-3-6-5 etc., si cela s'avère judicieux.)

(1) ϕ ne figure pas dans ψ - trivial

(2) ϕ figure dans ψ

(a) $\psi = \phi$: trivial

(b) $\psi = \neg\sigma$ $\psi' = \neg\sigma'$ pour un $\sigma' \in \sigma[\phi/\phi']$, donc par hypothèse de récurrence, $T \vdash \sigma \leftrightarrow \sigma'$.

Par Fait 2.9,(6), on a

$$\frac{\sigma \rightarrow \sigma'}{\neg\sigma' \rightarrow \neg\sigma}$$

et

$$\frac{\sigma' \rightarrow \sigma}{\neg\sigma \rightarrow \neg\sigma'}$$

ainsi $T \vdash \neg\sigma' \rightarrow \neg\sigma$ et $T \vdash \neg\sigma \rightarrow \neg\sigma'$, donc par Fait 2.10, (3) $T \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$.

(c) $\psi = \sigma \rightarrow \tau$ $\psi' = \sigma' \rightarrow \tau'$ pour un $\sigma' \in \sigma[\phi/\phi']$, $\tau' \in \tau[\phi/\phi']$. By hypothèse de récurrence, $T \vdash \sigma \leftrightarrow \sigma'$ et $T \vdash \tau \leftrightarrow \tau'$.

$$\cfrac{\frac{\sigma' \rightarrow \sigma \quad \sigma \rightarrow \tau}{\sigma' \rightarrow \tau}\ Cut \quad \tau \rightarrow \tau'}{\sigma' \rightarrow \tau'}\ Cut$$

Ainsi, $T, \sigma \rightarrow \tau \vdash \sigma' \rightarrow \tau'$. L'autre direction est analogue.

(d) $\psi = \sigma \wedge \tau$ $\psi' = \sigma' \wedge \tau'$ pour un $\sigma' \in \sigma[\phi/\phi']$, $\tau' \in \tau[\phi/\phi']$. Par hypothèse de récurrence $T \vdash \neg(\sigma \rightarrow \neg\tau) \rightarrow \neg(\sigma' \rightarrow \neg\tau')$ (comme $\neg(\sigma \rightarrow \neg\tau)$ est plus simple que $\sigma \wedge \tau$!).

$$\cfrac{\frac{\sigma\wedge\tau \rightarrow \neg(\sigma \rightarrow \neg\tau) \quad \neg(\sigma \rightarrow \neg\tau) \rightarrow \neg(\sigma' \rightarrow \neg\tau')}{\sigma\wedge\tau \rightarrow \neg(\sigma' \rightarrow \neg\tau')} \quad \neg(\sigma' \rightarrow \neg\tau') \rightarrow \sigma' \wedge \tau'}{\sigma \wedge \tau \rightarrow \sigma' \wedge \tau'}$$

(e) $\psi = \sigma \vee \tau$ analogue. $\square$

Fait 2.12

(1) $\vdash \neg\bot$

(2) $T \nvdash \phi \leftrightarrow Cons(T \cup \{\neg\phi\})$

Preuve:

(1)

$$\cfrac{\frac{\phi \rightarrow \neg\neg\phi}{\neg\neg(\phi \rightarrow \neg\neg\phi)}}{\neg(\phi \wedge \neg\phi)} \quad (A4), (A5), Proposition 2.11$$

(2) "$\leftarrow$" trivial " $\rightarrow$ ": $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot \rightarrow T \vdash \neg\phi \rightarrow \bot$, $T \vdash \neg\bot \rightarrow \neg\neg\phi$, par $\vdash \neg\neg\phi \rightarrow \phi$ $T \vdash \neg\bot \rightarrow \phi$, donc $T \vdash \phi$ par (1) $\Box$

Fait 2.13

Si T est maximal consistent, pour tout ϕ $\phi \in T$ ou $\neg\phi \in T$.

Preuve:

Supposons que non, donc T est maximal consistent, et $\phi \notin T$, $\neg\phi \notin T$, donc $T \vdash \phi \rightarrow \bot$, $T \vdash \neg\phi \rightarrow \bot$, donc $T \vdash \neg\bot \rightarrow \neg\phi$, $T \vdash \neg\bot \rightarrow \phi$, donc $T \vdash \neg\phi$, $T \vdash \phi$, contradiction $\Box$

2.4 L'équivalence de $T \models \phi$ et $T \vdash \phi$

Théorème 2.14

(Correction)

$T \vdash \phi \Rightarrow T \models \phi$

Preuve:

Supposons $m \models T$.

Récurrence par la taille k de la preuve $T \vdash \phi$.

$k = 1$: $\phi \in T \cup Ax$ (attention: Ax contient maintenant aussi A4-A7).

$\phi \in T$: trivial

$\phi \in Ax$: on vérifie $m \models \phi$ pour tout m et tout $\phi \in Ax$, simple, mais fatiguant. Exercice.

$k > 1$: Supposons qu'on l'ait prouvé pour tout $n < k$.

La preuve se termine par

$$\frac{\frac{T}{\sigma} \quad \frac{T}{\sigma \rightarrow \phi}}{\phi}$$

pour un σ. Par hypothèse de récurrence, $m \models \sigma$ et $m \models \sigma \rightarrow \phi$. Ainsi par définition de $\models$, $m \models \phi$. $\Box$

Exercice 2.7

Prouvez la validité des axiomes.

Fait 2.15

S'il y a un modèle m tel que $m \models T \cup \{\neg\phi\}$, donc $T \nvdash \phi$

Preuve:

Supposons $T \vdash \phi$, donc par Théorème 2.14 $T \models \phi$, donc par $m \models T$, $m \models \phi$, mais $m \models \neg\phi$, contradiction. $\Box$

Fait 2.16

$Th(m)$ est maximal consistent.

Preuve:

Soit $T := Th(m)$. La maximalité est triviale, comme $\phi \in T$ ou $\neg\phi \in T$ pour tout ϕ. Mais si $T \vdash \phi \wedge \neg\phi$, donc $T \models \phi \wedge \neg\phi$ par Théorème 2.14, donc $m \models \phi \wedge \neg\phi$, contradiction. $\square$

Lemme 2.17

Soient T, T' maximal consistent, $T \cap v(\mathcal{L}) = T' \cap v(\mathcal{L})$, donc $T = T'$.

Preuve:

Récurrence sur la complexité de ϕ, mésurée par le nombre d'opérateurs dans ϕ. $\rightarrow$ compte comme 3 opérateurs, $\vee$ comme 5 opérateurs.

$\phi = p \in v(\mathcal{L})$: hypothèse.

$\phi = \neg\psi$: $\neg\psi \in T \Leftrightarrow$ (par Fait 2.13) $\psi \notin T \Leftrightarrow$ (par Hypothèse de Récurrence) $\psi \notin T' \Leftrightarrow \neg\psi \in T'$.

$\phi = \sigma \wedge \tau$: $\sigma \wedge \tau \in T \Leftrightarrow$ (par Fait 2.4, (6), A.4, A.5) $\sigma, \tau \in T \Leftrightarrow \sigma, \tau \in T' \Leftrightarrow \sigma \wedge \tau \in T'$.

$\phi = \sigma \rightarrow \tau$: $\sigma \rightarrow \tau \in T \Leftrightarrow \neg(\sigma \rightarrow \tau) \notin T \Leftrightarrow$ (par Théorème de Substitution, Fait 2.4,(6)) $\neg(\sigma \rightarrow \neg\neg\tau) \notin T \Leftrightarrow$ (par Fait 2.4,(6), A.4,A.5) $\sigma \wedge \neg\tau \notin T \Leftrightarrow$ (par Hypothèse de Récurrence) $\sigma \wedge \neg\tau \notin T' \Leftrightarrow \sigma \wedge \neg\tau \notin T' \Leftrightarrow \neg(\sigma \rightarrow \neg\neg\tau) \notin T'$ $\Leftrightarrow \neg(\sigma \rightarrow \tau) \notin T' \Leftrightarrow \sigma \rightarrow \tau \in T'$.

$\phi = \sigma \vee \tau$: $\sigma \vee \tau \in T \Leftrightarrow$ (par Fait 2.4,(6), A.6,A.7) $\neg\sigma \rightarrow \tau \in T \Leftrightarrow$ (par Hypothèse de Récurrence) $\neg\sigma \rightarrow \tau \in T'$ etc.

$\square$

Théorème 2.18

$Cons(T) \rightarrow T$ a un modèle.

Preuve:

$Cons(T) \rightarrow$ il y a T' tel que $T \subseteq T'$, et T' est maximal consistent. T' determine un modèle $m_{T'}$ par $m_{T'}(p) := true$ ssi $p \in T'$ (et $m_{T'}(p) := false$ sinon). $Th(m_{T'})$ et T' sont maximal consistents, et $Th(m_{T'}) \cap v(\mathcal{L}) = T' \cap v(\mathcal{L})$. Par Lemme 2.17, $T' = Th(m)$. Mais $m \models Th(m)$. $\square$

Théorème 2.19

(Complétude)

$T \models \phi \Rightarrow T \vdash \phi$

Preuve:

Supposons $T \not\vdash \phi$, donc $Cons(T \cup \{\neg\phi\})$ (par Fait 2.12), soit $m \models T \cup \{\neg\phi\}$ par Théorème 2.18, donc $T \not\models \phi$. $\Box$

Exercice 2.8

Utilisez tout ce qu'on a montré, en particulier complétude et correction.

(1) Montrez qu'une théorie T maximal cohérente est $Th(m)$ pour un modèle m.

(2) Montrez qu'une théorie T maximal cohérente qui contient une théorie cohérente S est $Th(m)$ pour un modèle m tel que $m \models S$.

(3) Montrez qu'une théorie T maximale, qui ne permet pas de déduire ϕ, et qui contient une théorie S est $Th(m)$ pour un modèle m tel que $m \models S \cup \{\neg\phi\}$.

2.5 Davis-Putnam

Nous continuons dans la logique propositionelle.

Définition 2.8

Une clause est une disjonction de litéraux, i.e. de variables propositionelles ou de leurs negations (simples).

$-l$ dénote $\neg p$ si l est une variable propositionelle p, et p, si l est $\neg p$, $-l$ est donc aussi un litéral.

Définition 2.9

(La procédure de Davis/Putnam)

Cette procédure construit pas récurrence un arbre à partir d'un ensemble fini X de clauses tel que

1. les noeuds sont des ensembles de clauses

2. les arrêtes sont marquées

3. la complexité des successeurs est strictement inférieure à la complexité des parents (mésurée par le nombre de clauses dans le noeud)

4. Chaque feuille est $\emptyset$, ou contient $\bot$.

Soit donné $X \neq \emptyset$, tel que $\bot \notin T$, nous construisons le(s) successeur(s) de X, en transformant X conformément à une des 5 règles suivantes. Si plus qu'une règle peut être appliquée, on choisit celle dont le nombre est le plus petit.

Si $\bot \in X$ ou $X = \emptyset$, on s'arrête.

R1: X' est obtenu à partir de X en enlevant les tautologies de X - une tautologie a la forme $\ldots .l \vee \ldots . \vee -l \ldots ..$ L'arrête de cette règle est marquée par $\emptyset$.

R2: Si une clause C est la "sous-clause" de C', i.e. C' contient tous les litéraux de C, on enlève C' de X. (Exemple: $C = \neg p \vee q$, $C' = r \vee \neg p \vee q \vee \neg s$.) L'arrête de cette règle est marquée par $\emptyset$.

R3: Si une des clauses est un seul litéral l, on construit X' à partir de X en

- enlevant de X toutes les clauses qui contiennet l et

- enlevant dans toutes les autres clauses $-l$, si présent. Si en résulte une clause vide (comme $-l \in X$), on remplace la clause vide par $\bot$. On note que, comme X contient l et $-l$ comme clauses, X est donc inconsistent.

L'arrête de cette règle est marquée par l.

R4: Si la formule atomique l apparaît dans certaines clauses, et $-l$ n'apparaît nulle part, on enlève de X toutes les clauses qui contiennent l. L'arrête de cette règle est marquée par l.

R5: Si l et $-l$ sont tous les deux presents dans X, X a deux successeurs, X_0 et X_1. X_0 est construit en

- enlevant de X toutes les clauses qui contiennent l et
- enlevant dans toutes les autres clauses $-l$, si présent.

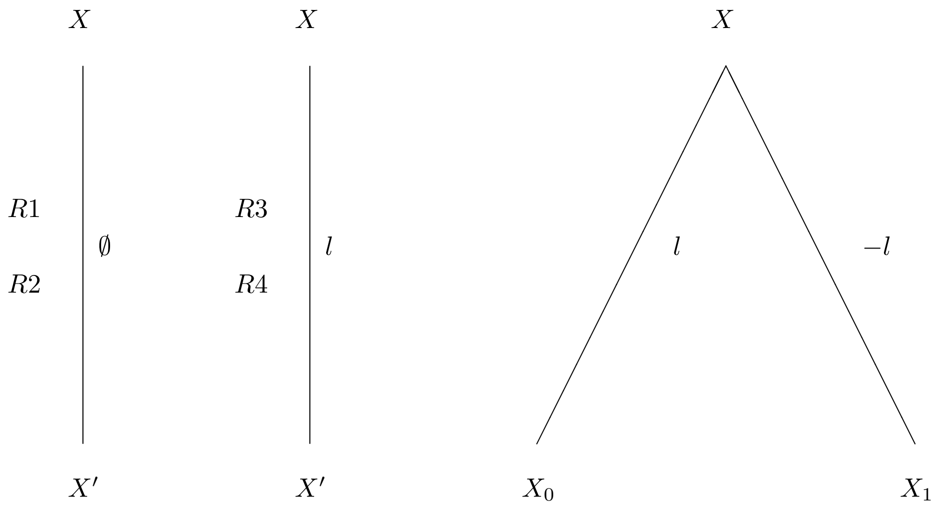
X_1 est construit en

- enlevant de X toutes les clauses qui contiennent $-l$ et
- enlevant dans toutes les autres clauses l, si présent.

L'arrête qui pointe vers X_0 est marquée par l. L'arrête qui pointe vers X_1 est marquée par $-l$.

Figure 2.1

Figure 2.1



Discussion:

La procédure permet de construire un modèle pour l'ensemble X de départ - si celui est consistant. (Les théorèmes de correction et complétude montrent que "consistant" et "avoir un modèle" sont équivalents.)

Si X n'est pas consistant, toutes les branches construites auront $\perp$ comme feuille.

Si X est consistant, toute branche qui termine par $\emptyset$ est une recette pour définir un modèle: Les marques des arrêtes nous disent comment choisir les variables propositionelles comme vrai ou faux, ceux qui ne sont pas mentionnéss peuvent être choisies arbitrairement - ils n'ont aucune influence.

R1: Ajouter ou enlever des tautologies n'a pas d'influence sur l'existence de modèles.

R2: C et C' doivent être vraies, mais si C l'est, C' l'est automatiquement - parce que les deux sont des disjonctions! -, donc on peut enlever C' sans changer les modèles.

R3: Il faut faire l vrai. Donc, si l est vrai, toutes les clauses qui contiennt l le sont automatiquement, on peut les oublier. Mais si l est vrai, $-l$ n'est plus une possibilité, donc on doit enlever $-l$ partout.

R4: Si X a un modèle, X a aussi un modèle où l est vrai, comme $-l$ n'apparaît nulle part. (Argument: supposons $m \models X$, et $m \models -$l. On considère m', le modèle identique à m, sauf pour $l : m' \models l$. Comme $-l$ ne figure pas dans X, X sera toujours vrai dans m' - de nouveau parce que X est un ensemble de disjonctions de litéraux.) Conséquence: on perd éventuellement des modèles en applicant cette règle, mais pas tous.

R5: On ne peut pas simplifier, il faut brancher dans les deux possibilités (cette règle crée la complexité). Chaque modèle de X doit faire l ou $-l$ vrai. On branche dans les deux possibilités, et applique l'argument pour R3.

Exercice 2.9

(1) Elaborez le commentaire pour la règle 4.

(2) Modifiez la règle 4 pour ne plus perdre aucun modèle - ainsi on transforme l'algorithme de Davis-Putnam qui détecte l'existence de modèles dans un algorithme qui les trouve tous.

(3) Prouvez que l'algorithme s'arrête toujours, et donne le résultat souhaité. (Idée: on note le développement des ensembles de modèles pour chaque branche.)

(4) Donnez un exemple avec complexité maximale: si n est le nombre de variables propositionelles dans X, la procédure Davis-Putnam construit un arbre avec 2^n branches.

2.6 Diverses logiques propositionelles

Ces logiques sont toutes propositionelles (au moins dans la forme présentée), ont des motivations différentes (formalisation du langage courant, ou intelligence artificielle), et utilisent une structure supplémentaire sur l'ensemble des modèles classiques. Nous donnons la définition de base, et présentons quelques propriétés en forme d'exercice.

Exercice 2.10

(Logique préférentielle)

Soit $<$ une relation binaire sur l'ensemble des modèles classiques $M_{\mathcal{L}}$ d'un langage propositionnel.

Si $X \subseteq M_{\mathcal{L}}$, on définit $\mu(X) := \{x \in X : \neg\exists x' \in X.x' < x\}$ - $\mu(X)$ est l'ensemble des $x \in X$, qui sont $< -$minimaux (dans X, pas nécessairement absolument, c'est à dire $y < x$ est possible, mais $y \notin X$!).

On définit une nouvelle logique $\mid\!\sim$ par:

$\phi \mid\!\sim \psi$ ssi ψ est vrai dans tous les modèles $< -$minimaux de ϕ, formellement ssi $\mu(M(\phi)) \models \psi$.

Montrez:

(1) $\phi \mid\!\sim \phi$ (trivial)

(2) $\phi \mid\!\sim \psi$ et $\phi \mid\!\sim \psi'$ impliquent $\phi \mid\!\sim \psi \wedge \psi'$

(3) $X \subseteq Y \Rightarrow \mu(Y) \cap X \subseteq \mu(X)$ (attention: l' égalité n'est pas toujours vraie!)

(4) utilisez (3) pour démontrer: Si $\phi \models \phi'$, et $\phi \mid\!\sim \psi$, donc $\phi' \mid\!\sim \psi \vee \neg\phi$

Exercice 2.11

(Conditionels irréls ou contrefactuels)

Soit $v(\mathcal{L})$ fini, et d une distance sur l'ensemble des modèles de $\mathcal{L}$.

($d : XxX \rightarrow \Re$ est une distance sur X ssi

- $d(x, y) \geq 0$ pour tout $x, y \in X$,

- $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$

- $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in X$,

- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $x, y, z \in X$ (inégalité du triangle - pas utilisé ici)

sont vrais.)

Soit $m \in M_{\mathcal{L}}$, ϕ une formule de $\mathcal{L}$. On définit $\mid \phi \mid_m := \{m' \in M(\phi) : \forall m'' \in M(\phi).d(m, m') \leq d(m, m'')\}$ - les ϕ-modèles les plus proches de m.

On définit $m \models \phi \Rrightarrow \psi$ ssi $\mid \phi \mid_m \subseteq M(\psi)$.

Montrez:

(1) Si $m \models \phi \wedge \phi'$ $m \models \phi \Rrightarrow \phi'$

(2) $m \models \phi \Rrightarrow \bot$ ssi $\phi \models \bot$

(3) $m \models \phi \Rrightarrow \phi'$, $m \models \phi \Rrightarrow \psi \Rightarrow m \models \phi \wedge \phi' \Rrightarrow \psi$

Faites des dessins!

Exercice 2.12

(Révision des théories)

Soit $v(\mathcal{L})$ fini, et d une distance sur l'ensemble des modèles de $\mathcal{L}$.

On définit $A \mid B := \{b \in B : \exists a_b \in A(\forall a' \in A, \forall b' \in B \ d(a_b, b) \leq d(a', b'))\}$ - les éléments de B les plus proches de A.

On définit $T * \phi := Th(M(T) \mid M(\phi))$.

Montrez:

(1) $T * \phi \models \phi$

(2) $Cons(T * \phi, \psi) \Rightarrow T * (\phi \wedge \psi) \models (T * \phi) \cup \{\psi\}$

(3) $(T * \phi) \cup \{\psi\} \models T * (\phi \wedge \psi)$

Faites des dessins pour avoir l'idée!

3 La logique des prédicats

On appelle la logique des prédicats aussi logique du premier ordre, ou FOL (first order logic).

3.1 Le langage et la sémantique de la logique des prédicats

Définition 3.1

Les entités de base d'un tel langage sont:

(1) symboles pour les constantes (ils dénotent des objets, éléments de l'"univers") C, D, ... (normalement, pas tous les objets ont de tels noms).

(2) symboles pour les fonctions n-aires F, G, ...

(3) symboles pour les predicats n-aires P, Q, ... (les prédicats 1-aires désignent des sous-ensembles de l'univers, les binaires des sous-ensembles du produit cartésian de l'univers avec lui-même, i.e. une relation binaire, un ensemble de pairs $< a, b >$, etc. Le symbole binaire $=$ est toujours présent, il est toujours interpréte par $=$ sur l'univers.)

$V(\mathcal{L})$: un ensemble dénombrable de variables $v_0, v_1, \ldots$ ou $x_0, \ldots$

$s(\mathcal{L})$, l'ensemble de symboles d'un langage, est l'ensemble de symboles pour les constantes, les fonctions, et les prédicats.

Définition 3.2

Les termes:

(1) Les variables sont des termes

(2) les symboles pour les constantes sont des termes

(3) Si F est un symbole pour une fonction n-aire, et t_i sont des termes, $F(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme

Les formules de base:

(1) Si t_i sont des termes, $t_1 = t_2$ est une formula de base

(2) Si t_i sont des termes, et P un symbole pour un prédicat n-aire, $P(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule de base.

Les formules:

1. Les formules de base sont des formules

2. Si ϕ, ψ sont des formules, $(\phi \wedge \psi)$, $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ sont aussi des formules

3. Si v est une variable, et ϕ une formule, $\forall v\phi$ est aussi une formule - attention: v n'est pas forcément dans ϕ.

4. $\exists v\phi$ peut être introduit comme abbréviation pour $\neg\forall v\neg\phi$, ou "officiellement" comme nouveau symbole: Si v est une variable, et ϕ une formule, $\exists v\phi$ est aussi une formule.

$card(\mathcal{L})$ est la cardinalité de l'ensemble de formules de $\mathcal{L}$ (elle est toujours infinie).

Définition 3.3

Dans les formules $\forall v\phi$ ou $\exists v\phi$, le champ du quantificateur est ϕ - sauf s'il y a un quantificateur $\forall v$ ou $\exists v$ à l'intérieur, dans ce cas, c'est le quantificateur intérieur qui détermine le champ. Une variable v est appellée liée par un quantificateur $\exists v$ ou $\forall v$, si elle est dans son champ. v est libre ssi elle n'est pas liée.

Exemple: $\exists x(P(x) \rightarrow \forall y(\exists y Q(x,y) \wedge R(z)) \wedge \exists x(x = x))$, x dans $P(x)$ et $Q(x,y)$ sont liées par le premier $\exists x$, x dans $x = x$ est lié par le deuxième $\exists x$, y dans $Q(x,y)$ est liée par $\exists y$, z est libre.

Définition 3.4

Un modèle $\mathcal{M}$ pour un langage $\mathcal{L}$ est une paire $< U, I >$ tel que

1. $U \neq \emptyset$ (appellé l'univers), est un ensemble quelconque,

2. I est appellé une interprétation, et est une fonction sur $s(\mathcal{L})$, tel que

a. pour chaque symbole pour constante C, $I(C) \in U$

b. pour chaque symbole pour fonction n-aire F, $I(F)$ est une fonction n-aire de U à U

c. pour chaque symbole pour prédicats n-aire P, $I(P)$ est une relation n-aire sur U, i.e. si $n = 1$, $I(P)$ est un sous-ensemble de U, si $n = 2$, $I(P)$ est un sous-ensemble de UxU, etc., et $=$ est interprété par $=$ sur U.

La définition de validité d'une formule dans un modèle est maintenant beaucoup plus compliquée que dans le cas propositionnel, surtout si la formule contient des variables libres.

Notez qu'un modèle $\mathcal{M}$ ne donne pas d'information sur la valeur des variables. Pour les formules et termes qui contiennent des variables, il faut étendre l'interprétation, en donnant une interprétation aux variables. A la fin, on va voir que la valeur donnée aux variables liées est sans importance. $\mathcal{M} < v_0 \dots v_n / a_0 \dots a_n >$ désigne le modèle $\mathcal{M}$, avec, en plus, une intrepétation des variables v_i par a_i ($a_i \in U$).

Soit dans ce que suit $n \leq n'$.

Définition 3.5

(La valeur d'un terme t avec au maximum les variables $v_0 \dots v_n$ dans $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} >$, par récurrence sur la complexité de t.)

(1) Si $t = x_i$, $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > (t) := a_i$,

(2) si t est un symbole pour constante C, donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > (t) := I(C)$,

(3) si $t = F(t_1 \dots t_m)$, $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > (t) := I(F)(\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > (t_1) \dots \mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > (t_m))$.

Définition 3.6

(Validité d'une formule ϕ avec au maximum les variables $v_0 \dots v_n$ dans $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} >$, définition par récurrence sur la complexité de ϕ.)

(a) formules de base:

(1) $\phi = t_1 = t_2$: $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > \models \phi :\Leftrightarrow \mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > (t_1) = \mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > (t_2)$

(2) $\phi = P(t_1 \dots t_m)$, P un symbole pour prédicats m-aire: $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > \models \phi :\Leftrightarrow I(P)(\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > (t_1) \dots \mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > (t_m))$

(b) formules complexes: Supposons que toutes les variables libres et liées sont parmi $v_0 \dots v_n$.

(1) $\phi = \sigma \wedge \tau$: $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > \models \phi :\Leftrightarrow \mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > \models \sigma$ et $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > \models \tau$

(2) $\phi = \neg\sigma$: $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > \models \phi :\Leftrightarrow \mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > \not\models \sigma$

(3) les autres opérateurs propositionelles $\rightarrow$ etc. sont traités de manière analogue.

(4) $\phi = \forall v_i \sigma$: $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > \models \phi :\Leftrightarrow$ pour tous les $a \in U$ $\mathcal{M} < v_0 \dots v_i \dots v_{n'} / a_0 \dots a \dots a_{n'} > \models \sigma$.

C'est à dire, il doit être possible de remplacer v_i par tout élément $a \in U$, (et le résultat doit être valide).

(5) $\phi = \exists v_i \sigma$: $\mathcal{M} < v_0 \dots v_{n'} / a_0 \dots a_{n'} > \models \phi :\Leftrightarrow$ il y a $a \in U$ $\mathcal{M} < v_0 \dots v_i \dots v_{n'} / a_0 \dots a \dots a_{n'} > \models \sigma$.

C'est à dire, il doit être possible de remplacer v_i par un élément $a \in U$.

Les autres utilisations de $\models$ sont analogues à la logique propositionelle.

On se débarasse des variables non utilisées par

Proposition 3.1

(a) Soit t un terme qui contient au maximum les variables $v_0 \dots v_n$ et soient $a_0, \dots, a_p$ et $b_0, \dots, b_q$ deux séquences d'éléments dans U, tel que $n \leq p$, $n \leq q$, et $a_i = b_i$ si v_i est une variable dans t. Donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t) = \mathcal{M} < v_0 \dots v_q/b_0 \dots b_q > (t)$.

(b) Soit ϕ une formule dont toutes les variables, libres et liées, sont parmi $v_0 \dots v_n$, et soient $a_0, \dots, a_p$ et $b_0, \dots, b_q$ deux séquences d'éléments dans U, tel que $n \leq p$, $n \leq q$, et $a_i = b_i$ si v_i est libre dans t. Donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > \models \phi$ ssi $\mathcal{M} < v_0 \dots v_q/b_0 \dots b_q > \models \phi$.

Preuve

(a) Preuve par récurrence sur la complexité de t. Si t est une variable v_i, donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t) = a_i = b_i = \mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > (t)$ (par hypothèse). Si t est un symbole pour une constante C, donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t) = I(C) = \mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > (t)$. Si $t = F(t_1 \dots t_n)$, et (a) est vrai pour tous les t_i, donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t) = I(F)(\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t_1), \dots, \mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t_n)) = I(F)(\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > (t_1), \dots, \mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > (t_n)) = \mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 .. b_p > (t)$.

(b) Preuve par récurrence sur la complexité de ϕ. Si $\phi = t = t'$, donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > \models \phi$ ssi $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t) = \mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t)$ ssi (par (a)) $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > (t) = \mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > (t)$ ssi $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > \models \phi$. Si $\phi = P(t_1, \dots, t_n)$, donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > \models \phi$ ssi $I(P)(\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t_1), \dots, \mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > (t_n))$ ssi (par (a)) $I(P)(\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > (t_1), \dots, \mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > (t_n))$ ssi $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > \models \phi$. Les cas $\phi = \neg\psi$, $\phi = \psi \wedge \sigma$ etc. sont simples.

Soit $\phi = \forall v\ \psi$, et toutes les variables libres et liées de ϕ parmi $v_0, \dots, v_p$. Donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > \models \phi$ ssi pour tout $a \in U$ $\mathcal{M} < v_0 \dots v_i \dots v_p/a_0 \dots a \dots a_p > \models \phi$ ssi (par hypothèse de récurrence) pour tout $b \in U$ $\mathcal{M} < v_0 \dots v_i \dots v_p/b_0 \dots b \dots b_p > \models \phi$ ssi $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/b_0 \dots b_p > \models \phi$. Le cas $\phi = \exists v_i \psi$ est analogue.

Corollaire 3.2

Soit ϕ une formule sans variables libres, et toutes ses variables liées soient parmi $v_0 \dots v_n$, et soient $a_0, \dots, a_p$ et $b_0, \dots, b_q$ deux sequences d'éléments dans U, $n \leq p, q$. Donc $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > \models \phi$ ssi $\mathcal{M} < v_0 \dots v_q/b_0 \dots b_q > \models \phi$.

Par conséquence, on peut définir:

Définition 3.7

Soit ϕ une formule sans variables libres, avec toutes les variables liées parmi $v_0 \dots v_n$, et soit $a_0 \dots a_p$ une séquence d'éléments dans U, $n \leq p$. Donc $\mathcal{M} \models \phi$ ssi $\mathcal{M} < v_0 \dots v_p/a_0 \dots a_p > \models \phi$.

3.2 Une axiomatization pour la logique des prédicats

Définition 3.8

(Une axiomatization pour la logique des prédicats (pour un langage $\mathcal{L}$ donné).)

Les axiomes de la logique propositionelle:

(A1) Toutes les axiomes de la logique propositionelle (dans le langage du 1er ordre) sont des axiomes. E.g. $\forall x\phi \rightarrow (\forall x\psi \rightarrow \forall x\phi)$ est un axiome.

Les axiomes pour les quantificateurs:

(A2) Si ϕ, ψ sont des formules (de $\mathcal{L}$), et v est une variable non libre dans ϕ, donc $\forall v(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall v\psi)$ est un axiome.

(A3) Si ϕ, ψ sont des formules, et ψ est obtenu à partir de ϕ en substituant chaque occurrence libre de v dans ϕ par le terme t, tel que aucune variable x dans t sera liée dans ψ, donc $\forall v\phi \rightarrow \psi$ est un axiome.

Les axiomes de l'identité:

Soient x, y variables, t un terme, ϕ une formule atomique, tel que t et ϕ contiennent au maximum les variables $v_0 \ldots v_n$, soit $t[v_i/x]$ le résultat de remplacer dans t la variable v_i par x, etc. Donc les formules suivantes seront des axiomes:

(A4) $x = x$

(A5) $x = y \to t[v_i/x] = t[v_i/y]$

(A6) $x = y \to \phi[v_i/x] \to \phi[v_i/y]$.

La connection entre $\forall$ et $\exists$:

(A7) $\exists v\phi \leftrightarrow \neg\forall v\neg\phi$

Il y a deux règles d'inférence:

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \qquad (ModusPonens)$$

$$\frac{\phi}{\forall v\phi} \qquad (Généralisation, G).$$

Les notions de preuve, $\vdash$ etc. sont analogues à celles de la logique propositionelle.

Commentaires:

Nous donnons des exemples, qui démontrent la nécessité des précautions avec les variables:

(A2) $\forall v(P(v) \to P(v)) \not\to P(v) \to \forall vP(v)$

(A3) $\forall v\exists w(v \neq w) \not\to \exists w(w \neq w)$, et $\forall x\exists x(x = C) \not\to \exists x(D = C)$

Remarque:

Beaucoup de propriétés des déductions dans la logique propositionelle s'appliquent aussi à la logique du 1er ordre.

Lemme 3.3

(1) Théorème de déduction: Soit ϕ sans variables libres. Donc $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ ssi $T \vdash \phi \to \psi$.

(2) Soit ϕ sans variables libres. Donc $T \cup \phi$ est inconsistent ssi $T \vdash \neg\phi$.

(3) Soient ϕ, ψ sans variables libres, T maximal consistent, donc

(a) $T \vdash \phi$ ssi $\phi \in T$,

(b) $\phi \notin T$ ssi $\neg\phi \in T$,

(c) $\phi \wedge \psi \in T$ ssi $\phi, \psi \in T$

Preuve:

(1) " $\leftarrow$ " est trivial. " $\to$ " Nous pouvons utiliser la preuve propositionelle, mais avons un cas supplémentaire à considérer, ψ est $\forall v\psi'$, et la preuve termine par la règle

$$\frac{\psi'}{\forall v\psi'}$$

Par hypothèse de récurrence, $T \vdash \phi \to \psi'$, ainsi

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{T}{\phi \to \psi'}}{\forall x(\phi \to \psi')} \quad (G) \qquad \forall x(\phi \to \psi') \to (\phi \to \forall x \psi') \quad (A2)}{\phi \to \forall x \psi'}$$

(2) " $\leftarrow$ " est trivial. " $\rightarrow$ " : $T \cup \{\phi\} \vdash \bot$ donc $T \vdash \phi \to \bot$ donc $T \vdash \neg\bot \to \neg\phi$ donc $T \vdash \neg\phi$.

(3) (a): On note que $Cons(T)$, $T \vdash \phi$ donc $Cons(T \cup \{\phi\})$

(b): Si $\phi \notin T, T \cup \{\phi\}$ est inconsistent, donc par (2) $T \vdash \neg\phi$, donc par (a) $\neg\phi \in T$. L'autre direction est triviale.

(c): " $\rightarrow$ ": Par $\phi \wedge \psi \to \phi$, et (a), c'est trivial. " $\leftarrow$ ": Par $\phi, \psi \in T \to T \vdash \sigma \wedge \psi$ et (a). $\square$

Lemme 3.4

(1) $\phi \to \psi \vdash \forall v\phi \to \forall v\psi$

(2) $\vdash \forall v(\phi \wedge \psi) \to (\forall v\phi \wedge \forall v\psi)$

(3) $\vdash \forall x(\phi \wedge \psi) \to \phi \wedge \forall x\psi$

Preuve

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall v\phi \to \phi \quad (A3) \quad \phi \to \psi}{\forall v\phi \to \psi}}{\forall v(\forall v\phi \to \psi)} \qquad \forall v(\forall v\phi \to \psi) \to (\forall v\phi \to \forall v\psi) \quad (A2)}{\forall v\phi \to \forall v\psi}$$

(2) par (1).

(3)

$$\dfrac{\forall x(\phi \wedge \psi) \to \forall x\phi \wedge \forall x\psi \quad (2) \qquad \dfrac{\forall x\phi \to \phi \quad (A3)}{\forall x\phi \wedge \forall x\psi \to \phi \wedge \forall x\psi}}{\forall x(\phi \wedge \psi) \to \phi \wedge \forall x\psi}$$

$\square$

Lemme 3.5

(Théorème de Substitution) Soit, comme dans le cas propositionel, $\psi[\phi/\phi']$ l'ensemble des formules obtenues à partir ψ en substituant quelques occurrences de ϕ dans ψ par ϕ'. Donc: $T \vdash \phi \leftrightarrow \phi'$, $\psi' \in \psi[\phi/\phi'] \Rightarrow T \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$.

Preuve

Récurrence sur la complexité de ψ en dehors de ϕ. Nous pouvons utiliser l'argument du cas propositionel, et ajouter 2 cas nouveaux pour les quantificateurs.

$\exists x$ peut être reduit à $\forall x$ par l'axiome (A7) en comptant de manière adéquate.

$\psi = \forall x\sigma$: Par hypothèse de récurrence, $T \vdash \sigma \leftrightarrow \sigma'$. Par Lemme 3.4 (1), $T \vdash \forall x\sigma \leftrightarrow \forall x\sigma'$.

$\square$

Lemme 3.6

Soit $T[s/z]$ obtenu à partir de T par substitution de toutes les occurrences d'un terme s sans variables par la variable z, de même pour ϕ et $\phi[s/z]$. Soit $T \vdash \phi$. Dans ce cas, il y aura une variable z tel que $T[s/z] \vdash \phi[s/z]$.

Preuve

Par récurrence sur la complexité de la preuve $T \vdash \phi$. On fixe une telle preuve, et soit z une variable qui n'est pas présente dans cette preuve.

Cas 1: Complexité=1.

(1) $\phi \in T$: trivial, $\phi[s/z] \in T[s/z]$.

(2) ϕ est un axiome propositionel: ainsi est $\phi[s/z]$.

(3) les nouveaux axiomes de FOL:

(A2) $\forall v(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall v\psi)$, v pas libre dans ϕ. $(\forall v(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall v\psi))[s/z] = \forall v(\phi[s/z] \to \psi[s/z]) \to (\phi[s/z] \to \forall v(\psi[s/z]))$ est un cas, comme $z \neq v$.

(A3) $(\forall v\phi \to \phi[v/t])[s/z] = \forall v(\phi[s/z]) \to \phi[v/t][s/z]$, mais $\phi[v/t][s/z] = \phi[s/z][v/t[s/z]]$, comme $s \neq v$, $z \neq v$.

Comme $z \neq v$, il n'y a pas de nouvelles occurrences de v dans $\phi[s/z]$, donc aucun v lié est remplacé. Comme z ne figure pas dans la preuve de la formule de départ, il ne sera pas lié.

(A4): s ne peut pas être dans ϕ, donc $\phi[s/z] = \phi$

(A5): $x = y \to t[v_i/x] = t[v_i/y]$. Soit v une variable différente de $v_0, \dots, v_n, x, y, z$. Donc $t[v_i/x] = t[v_i/v][v/x]$ et $(x = y \to t[v_i/x] = t[v_i/y])[s/z] = x = y \to t[v_i/x][s/z] = t[v_i/y][s/z]$. Mais $t[v_i/x][s/z] = t[v_i/v][v/x][s/z] = t[v_i/v][s/z][v/x]$ as $s \neq v$, $s \neq x$, $z \neq v$.

De manière similaire pour y. Ainsi $(x = y \to t[v_i/x] = t[v_i/y])[s/z] = x = y \to t[v_i/v][s/z][v/x] = t[v_i/v][s/z][v/y]$, est de nouveau un cas de (A5).

(A6) on argumente comme pour (A5).

(A7) $(\exists v\phi \leftrightarrow \neg\forall v\neg\phi)[s/z] = \exists v\phi[s/z] \leftrightarrow \neg\forall v\neg\phi[s/z]$.

Cas 2: Complexité > 1.

La preuve termine par (G):

$$\frac{\phi}{\forall v\phi}$$

Par hypothèse de récurrence, $T[s/z] \vdash \phi[s/z]$, donc $T[s/z] \vdash \forall v(\phi[s/z]) = (\forall v\phi)[s/z]$.

La preuve termine par MP:

$$\frac{\psi \quad \psi \to \phi}{\phi} \qquad (ModusPonens)$$

Par hypothèse de récurrence (z n'est pas présent dans toute la preuve), $T[s/z] \vdash \psi[s/z]$, $T[s/z] \vdash \psi[s/z] \to \phi[s/z]$, donc $T[s/z] \vdash \phi[s/z]$. □

Lemme 3.7

(1) $\phi \vdash \phi[x/t]$, si t est un terme quelconque, toutes les occurrences libres de x dans ϕ sont remplacées par t, et aucune variable y dans t est liée où t remplace x.

(2) $\vdash t = t$

(3) $\vdash s = t \to t = s$

(4) $\vdash s = t \land t = u \to s = u$

(5) Pour tout terme t, $\vdash \exists x t = x$

(6) Si toutes les occurrences libres de x sont remplacées par t dans ϕ, tel que aucune variable libre y dans t sera liée dans ϕ, donc $\vdash \phi[x/t] \to \exists x\phi$

(7) $\phi \land \psi \to \sigma \vdash \forall x\phi \land \forall x\psi \to \forall x\sigma$

(8) $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$

(9) $\phi \to \psi \vdash \phi \to \forall x\psi$, si x n'est pas libre dans ϕ

(10) Si toutes les occurrences libres de x sont remplacées par t (ou t') dans ϕ, tel que aucune variable libre y dans t (ou t') sera liée dans ϕ, donc $\vdash t = t' \to (\phi[x/t] \to \phi[x/t'])$

(11) $\vdash \phi(t) \leftrightarrow \exists x(\phi(x) \land t = x)$

(12) Renommer des variables liées: Si y n'est pas libre dans ϕ, donc $\vdash \forall x\phi \leftrightarrow \forall y\phi[x/y]$

Preuve

(1)

$$\frac{\frac{\phi}{\forall x\phi} \quad \forall x\phi \to \phi[x/t]}{\phi[x/t]}$$

(2) Par (1) et l'axiome $x = x$

(3)

Par (1), de $x = y \to (x = x \to y = x)$

$$\frac{\frac{s=t\to(s=s\to t=s)}{s=s\to(s=t\to t=s)} \quad s = s}{s = t \to t = s}$$

(4) Par (1) de $x = y \to (x = z \to y = z)$, $t = s \to (t = u \to s = u)$, par (3), $s = t \to (t = u \to s = u)$, par logique propositionelle, $s = t \land t = u \to s = u$.

(5)

$$\frac{\frac{\forall x\neg t=x\to\neg t=t}{t=t\to\neg\forall x\neg t=x}}{\exists x t = x}$$

(6)

$$\frac{\forall x\neg\phi \to \neg\phi[x/t]}{\phi[x/t] \to \exists x\phi}$$

(7)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x\phi\land\forall x\psi\to\forall x\phi \quad \forall x\phi\to\phi}{\forall x\phi\land\forall x\psi\to\phi} \quad \frac{\forall x\phi\land\forall x\psi\to\forall x\phi \quad \forall x\phi\to\psi}{\forall x\phi\land\forall x\psi\to\psi}}{\forall x\phi\land\forall x\psi\to\phi\land\psi} \quad \phi\land\psi\to\sigma}{\forall x\phi\land\forall x\psi\to\sigma}}{\forall x(\forall x\phi\land\forall x\psi\to\sigma)} \quad \forall x(\forall x\phi \land \forall x\psi \to \sigma) \to (\forall x\phi \land \forall x\psi \to \forall x\sigma)}{\forall x\phi \land \forall x\psi \to \forall x\sigma}$$

(8) Par (7), $(\phi \to \psi) \land \phi \to \psi \vdash \forall x(\phi \to \psi) \land \forall x\phi \to \forall x\psi$, mais $\vdash (\phi \to \psi) \land \phi \to \psi$, le reste par logique propositionelle.

(9)

$$\dfrac{\frac{\phi\to\psi}{\forall x(\phi\to\psi)} \quad \forall x(\phi\to\psi)\to(\phi\to\forall x\psi)}{\phi\to\forall x\psi}$$

(10) Par (1), it suffit de démontrer le résultat pour $t = z$, $t' = z'$ variables. Récurrence sur la complexité de ϕ.

ϕ est une formule de base: Axiome

$\phi = \neg\psi$: $\vdash z' = z \to (\psi[x/z'] \to \psi[x/z])$ par hypothèse de récurrence, $\vdash z = z' \to z' = z$, et $\vdash (\psi[x/z'] \to \psi[x/z]) \to (\neg\psi[x/z] \to \neg\psi[x/z'])$, donc $\vdash z = z' \to (\phi[x/z] \to \phi[x/z'])$ $\phi = \psi \wedge \sigma$: analogue. $\phi = \forall u\psi$:

$$\dfrac{\frac{z=z'\to(\psi[x/z]\to\psi[x/z']) \quad par \quad hypoth\grave{e}se \quad de \quad r\acute{e}currence}{\forall u(z=z'\to(\psi[x/z]\to\psi[x/z']))}}{z = z' \to \forall u(\psi[x/z] \to \psi[x/z'])} \quad (A2)$$

le résultat est une conséquence de (8). $\phi = \exists u\psi$: via $\forall u\psi$, par un comptage adéquat de la complexité, et Axiome (A7).

(11) $\vdash \phi(t) \leftrightarrow \exists x(\phi(x) \wedge t = x)$ ssi $\vdash \neg\phi(t) \leftrightarrow \forall x(\phi(x) \to \neg t = x)$, nous démontrons le dernier. " $\to$ " Par $\vdash \phi(x) \wedge t = x \to \phi(t)$, $\vdash \neg\phi(t) \to (\phi(x) \to \neg t = x)$, donc par (9) $\vdash \neg\phi(t) \to \forall x(\phi(x) \to \neg t = x)$. " $\leftarrow$ " $\forall x(\phi(x) \to \neg t = x) \to (\phi(t) \to \neg t = t)$, mais $(\phi(t) \to \neg t = t) \to \neg\phi(t)$.

(12)

$$\dfrac{\frac{\vdash\forall x\phi\to\phi[x/y] \quad y \quad n'est \quad pas \quad libre \quad dans \quad \phi}{\forall y(\forall x\phi\to\phi[x/y])}}{\forall x\phi \to \forall y\phi[x/y])}$$

Inversément, x n'est pas libre dans $\phi[x/y]$, ainsi $\vdash \forall x\phi[x/y] \to \phi[x/y][y/x] = \phi$, etc.

□

3.3 L'équivalence de $T \models \phi$ et $T \vdash \phi$

Définition 3.9

Soit T un ensemble de $\mathcal{L}-$formules sans variables libres, $\boldsymbol{C}$ un ensemble de symboles de constantes de $\mathcal{L}$. $\boldsymbol{C}$ est appellé un ensemble de témoins pour T dans $\mathcal{L}$, ssi pour toute formule ϕ de $\mathcal{L}$ avec au maximum une variable libre, e.g. x, il y a un symbole de constante $C \in \boldsymbol{C}$ tel que $T \vdash \exists x\phi \to \phi[x/C]$. T a des témoins dans $\mathcal{L}$, ssi T has a un ensemble $\boldsymbol{C}$ de témoins dans $\mathcal{L}$.

Lemme 3.8

Soit T un ensemble consistent de $\mathcal{L}-$formules sans variables libres, $\boldsymbol{C}$ un ensemble de nouveaux symboles pour constantes tel que $card(\boldsymbol{C}) = card(\mathcal{L})$, et soit $s(\mathcal{L}') := s(\mathcal{L}) \cup \boldsymbol{C}$. Donc il y a T' tel que $T \subseteq T'$, et T' a $\boldsymbol{C}$ comme ensemble de témoins dans $\mathcal{L}'$.

Preuve

Soit $\alpha := card(\mathcal{L})$. Soit $\boldsymbol{C} := \{C_\beta : \beta < \alpha\}$ un ensemble de nouveaux symboles pour constantes (différentes entre eux), $\mathcal{L}'$ comme décrit en haut. Donc aussi $card(\mathcal{L}') = \alpha$, et il y a une séquence ϕ_β, $\beta < \alpha$, qui contient toutes les formules de $\mathcal{L}'$ avec au maximum une variable libre.

On définit une sequence $T_0 := T \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_\beta \subseteq \ldots$ pour $\beta < \alpha$, et une séquence D_β, $\beta < \alpha$ de symboles pour constantes de $\boldsymbol{C}$ par récurrence:

(i) $\beta = \gamma + 1$: Le nombre de formules dans T_γ, qui ne sont pas dans $\mathcal{L}$, est plus petit que α (nous avons ajouté au maximum une par étappe), et chaque telle formule contient un nombre fini de constantes de $\boldsymbol{C}$. Soit $D_\gamma \in \boldsymbol{C}$ le premier élément of $\boldsymbol{C}$, qui n'est ni dans une formule de T_γ, ni dans ϕ_γ. Soit $T_{\gamma+1} := T_\gamma \cup \{\exists x \phi_\gamma \to \phi_\gamma[x/D_\gamma]\}$ - où x est (la seule) variable libre dans ϕ_γ, si elle existe, sinon, c'est v_0.

(ii) si β est un ordinal limite, donc $T_\beta := \bigcup\{T_\gamma : \gamma < \beta\}$.

On démontre par récurrence que chaque T_β est consistent. Pour $\beta = 0$, c'est l'hypothèse, si $lim(\beta)$, i.e. β un ordinal limite, c'est trivial par compacité (même argument que dans Théorème 2.5). Considérons maintenant $\beta = \gamma + 1$. $T_{\gamma+1} := T_\gamma \cup \{\exists x_\gamma \phi_\gamma \to \phi_\gamma(D_\gamma)\}$ est consistent: Si non, par Lemme 3.3, (2), $T_\gamma \vdash \neg(\exists x \phi_\gamma \to \phi_\gamma[x/D_\gamma])$, donc par logique propositionelle $T_\gamma \vdash \exists x \phi_\gamma \wedge \neg\phi_\gamma[x/D_\gamma]$. Donc par Lemme 3.6, $T_\gamma[D_\gamma/z] \vdash (\exists x \phi_\gamma \wedge \neg\phi_\gamma[x/D_\gamma])[D_\gamma/z]$ pour un z. D_γ n'est pas dans T_γ, ni dans ϕ_γ, donc $T_\gamma \vdash \exists x \phi_\gamma \wedge \neg\phi_\gamma[x/z]$, ainsi $T_\gamma \vdash \forall z(\exists x \phi_\gamma \wedge \neg\phi_\gamma[x/z])$, donc par Lemme 3.7,(12) $T_\gamma \vdash \forall x(\exists x \phi_\gamma \wedge \neg\phi_\gamma)$, donc par Lemme 3.4, (3) $T_\gamma \vdash \exists x \phi_\gamma \wedge \forall x_\gamma \neg\phi_\gamma$, donc par le Théorème de Substitution, $T_\gamma \vdash \exists x \phi_\gamma \wedge \neg\neg\forall x \neg\phi_\gamma$, i.e. $T_\gamma \vdash \exists x \phi_\gamma \wedge \neg\exists x \phi_\gamma$, contradiction à la cohérence de T_γ.

Soit $T' := \bigcup\{T_\gamma : \gamma < \alpha\}$. T' est consistent (de nouveau par compacité, comme pour $lim(\beta)$), contient T, et est dans $\mathcal{L}'$. Si ϕ est une formule de $\mathcal{L}'$ tel que au maximum une variable, disons x, est libre, donc il y a $\beta < \alpha$ tel que $\phi = \phi_\beta$, donc $\exists x \phi_\beta \to \phi_\beta[x/D_\beta] \in T'$. $\Box$

Lemme 3.9

Soit T un ensemble consistant de $\mathcal{L}-$formules sans variables libres, $\boldsymbol{C}$ un ensemble de témoins pour T dans $\mathcal{L}$. Donc T a un modèle $\mathcal{M} :=< U, I >$ tel que tout $a \in U$ est l'interprétation d'un $C \in \boldsymbol{C}$.

Preuve

Si T a un ensemble $\boldsymbol{C}$ de témoins dans $\mathcal{L}$, $\boldsymbol{C}$ est aussi un ensemble de témoins pour tout $T' \supseteq T$, et si $\mathcal{M}$ est un modèle pour T', donc il l'est pour T. Ainsi, sans perte de généralité, T est maximal consistant (dans $\mathcal{L}$).

On définit pour $C, D \in \boldsymbol{C}$, $C \sim D :\leftrightarrow C = D \in T$. Par consistance maximale et Lemme 3.7, (2) $-$ (4), $C \sim C$, $C \sim D$, $D \sim E \to C \sim E$, $C \sim D \to D \sim C$. Donc $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\boldsymbol{C}$. Pour $C \in \boldsymbol{C}$, soit $\overline{C} := \{D \in \boldsymbol{C} : D \sim C\}$, la classe d'équivalence de C.

(1) Soit $U := \{\overline{C} : C \in \boldsymbol{C}\}$.

(2) Si $P(...)$ est un symbole pour une relation n-aire, soit $I(P)(\overline{C}1, \ldots, \overline{C}n^{):\leftrightarrow}$ $P(C_1, \ldots, C_n) \in T$. Par $\vdash P(C_1, \ldots, C_n) \wedge C_1 = D_1 \wedge \ldots \wedge C_n = D_n \to P(D_1, \ldots, D_n)$, c'est bien défini.

(3) Soit D un symbole de constante de $\mathcal{L}$. Par Lemme 3.7, (5), $\vdash \exists v(D = v) \in T$. Comme T a des témoins, il y a $C \in \boldsymbol{C}$ tel que $D = C \in T$, soit $I(D) := \overline{C}$. Par $\vdash D = C \wedge D = C' \to C = C'$, c'est bien défini.

(4) Soit $F(\ldots)$ un symbole pour une fonction n-aire, $C_1, \ldots, C_n \in \boldsymbol{C}$. Par Lemme 3.7, (5), $\exists v F(\underline{C_1, \ldots, C_n}) = v$ $\in T$. Comme T a témoins, il y a $C \in \boldsymbol{C}$ tel que $F(C_1, \ldots, C_n) = C \in T$. Soit $I(F)(\overline{C_1}, \ldots, \overline{C_n}) := \overline{C}$ ssi $F(C_1, \ldots, C_n) = C \in T$ Par $\vdash F(C_1, \ldots, C_n) = C \wedge C_1 = D_1 \wedge \ldots \wedge C_n = D_n \wedge C = D \to F(D_1, \ldots, D_n) = D$, c'est bien défini.

On démontre que $\mathcal{M} :=< U, I >$ est un modèle de T.

Pour simplifier la notation, on considère seulement les symboles pour fonctions et prédicats 1-aires. D'abord, on montre par récurrence que, pour un terme t sans variables libres et $C \in \boldsymbol{C}$, $\mathcal{M} \models t = C$ ssi $t = C \in T$.

Si $t = C'$, donc $\mathcal{M} \models C' = C$ ssi $I(C') = I(C)$ ssi $C \sim C'$ ssi $C = C' \in T$.

Si $t = F(C')$, donc $\mathcal{M} \models F(C') = C$ ssi $I(F)(I(C')) = I(C)$ ssi $F(C') = C \in T$. $\mathcal{M} \models F(t) = C$ ssi (par Lemme 3.7, (11)) $\mathcal{M} \models \exists x(t = x \wedge F(x) = C)$ ssi il y a C' tel que $\mathcal{M} \models t = C' \wedge F(C') = C$ ssi (hypothèse de récurrence) il y a C' tel que $t = C' \in T$ et $F(C') = C \in T$ ssi (comme T a témoins) $\exists x(t = x \wedge F(x) = C) \in T$ ssi $F(t) = C \in T$.

Et, si t, t' sont des termes sans variables libres, $\mathcal{M} \models t = t'$ ssi $t = t' \in T$: $\mathcal{M} \models t = t'$ ssi $\mathcal{M} \models \exists x(t = x \wedge t' = x)$ ssi pour un C $\mathcal{M} \models t = C \wedge t' = C$ ssi pour un C $\mathcal{M} \models t = C$ et $\mathcal{M} \models t' = C$. De même, $t = t' \in T$ ssi $\exists x(t = x \wedge t' = x) \in T$ ssi pour un C $t = C \wedge t' = C \in T$ ssi pour un C $t = C \in T$ et $t' = C \in T$.

En plus, $\mathcal{M} \models P(t)$ ssi $P(t) \in T$: $\mathcal{M} \models P(t)$ ssi $\mathcal{M} \models \exists x(t = x \wedge P(x))$ ssi pour un C $\mathcal{M} \models t = C \wedge P(C)$ ssi pour un C $\mathcal{M} \models t = C$ et $\mathcal{M} \models P(C)$. De même, $P(t) \in T$ ssi $\exists x(t = x \wedge P(t)) \in T$ ssi pour un C $t = C \wedge P(C) \in T$ ssi pour un C $t = C \in T$ et $P(C) \in T$.

Enfin, on démontre par récurrence sur la complexité de ϕ : $\mathcal{M} \models \phi$ ssi $\phi \in T$ pour tout ϕ sans variables libres. Le cas ϕ est une formule de base était démontré en haut. Les cas $\phi = \neg\psi$ et $\phi = \psi \wedge \sigma$ etc. sont une conséquence triviale de la hypothèse de récurrence. Soit $\phi = \exists x\psi$. Si $\mathcal{M} \models \phi$, donc pour un C, $\mathcal{M} \models \psi[x/C]$, donc $\psi[x/C] \in T$, et par $\vdash \psi[x/C] \rightarrow \exists x\psi$, $\psi \in T$. Si $\phi \in T$, comme T a témoins, il y a $C \in \boldsymbol{C}$ tel que $T \vdash \exists x\psi \rightarrow \psi[x/C]$, donc $\psi[x/C] \in T$ par maximalité de T, donc par hypothèse de récurrence, $\mathcal{M} \models \psi[x/C]$, donc $\mathcal{M} \models \psi$. $\Box$

Théorème 3.10

Tout ensemble consistent T de $\mathcal{L}-$formules sans variables libres a un modèle $\mathcal{M}$. En plus, on peut choisir $\mathcal{M}$ tel que $card(U) \leq card(\mathcal{L})$.

Preuve

Soit $T' \supseteq T$ une théorie consistente dans un langage $\mathcal{L}'$ comme dans Lemme 3.9. Par Lemme 3.9, T' a un modèle $\mathcal{M}'$ (pour le langage $\mathcal{L}'$, avec les nouvelles constantes). Soit $\mathcal{M}$ le même modèle que $\mathcal{M}'$, à l'exception que les nouvelles constantes ne sont pas interprétées (mais l'univers etc. est le même, i.e. juste $I(C)$ n'est pas defini pour les nouvelles constantes dans $\mathcal{M}$, mais $I'(C)$ est defini dans $\mathcal{M}'$). T ne contient pas de nouvelles constantes, donc $\mathcal{M}$ est un modèle pour T. L'univers était construit dans Lemme 3.9 tel que $card(U) \leq card(\mathcal{L})$, comme $card(U) \leq card(\boldsymbol{C}) = card(\mathcal{L})$. $\Box$

Théorème 3.11

Soit T un ensemble de $\mathcal{L}-$formules sans variables libres, si T a un modèle infini, donc il a un de cardinalité arbitrairement grande.

Preuve

Soit $C_i : i < \kappa$ une séquence quelconque de nouvelles constantes. Soit $T' := T \cup \{\neg C_i = C_j : i \neq j,\ i, j < \kappa\}$. Comme T a un modèle infini $\mathcal{M}$, on peut étendre $\mathcal{M}$ pour tout sous-ensemble fini $\boldsymbol{C}$ de $\{\neg C_i = C_j : i \neq j,$ $i, j < \kappa\}$ (en interprétant les nouveaux symboles pour constantes par différents éléments de U) pour obtenir un modèle de $T \cup \boldsymbol{C}$, par compacité, T' est consistent, donc a un modèle $\mathcal{M}'$, de cardinalité au moins κ. Si on "oublie" l'interprétation des nouvelles constantes, on obtient un modèle pour T dans le vieux langage. $\Box$

Théorème 3.12

(Correction et complétude pour la logique des prédicats) Pour un ensemble de formules sans variables libres T, et une formule ϕ sans variables libres, $T \vdash \phi$ ssi $T \models \phi$.

Preuve

Une direction est une récurrence facile, comme dans le cas propositionel. L'autre direction se fait aussi comme dans le cas propositionel, on utilise Théorème 3.10 $\Box$

Exercices:

(1) Donnez une formule ϕ tel que $\mathcal{M} \models \phi$ ssi $card(U) = 1$.

(2) Donnez une formule ϕ tel que $\mathcal{M} \models \phi$ ssi $card(U) < 2$, de même pour =2, > 2.

(3) Donnez une formule ϕ tel que $\mathcal{M} \models \phi$ ssi $card(U) = 3$.

(4) Décrivez que P (unaire) dénote un sousensemble non-vide.

(5) Décrivez que P (unaire) dénote un sousensemble vide.

(6) Décrivez que P (unaire) dénote l'univers entier.

(7) Décrivez que P (unaire) dénote le complément de $Q(.)$.

(8) Décrivez que F dénote une fonction injective/surjective/bijective.

(9) Décrivez que P dénote une relation (binaire) transitive/reflexive.

(10) Décrivez que un symbole pour une relation binaire P dénote une fonction.

(11) Décrivez que $card(U)$ est pair (or infini).

(12) Remplacez les fonctions par des relations (=prédicats) si $card(U) > 1$. (Pourquoi $card(U) > 1$?)

(13) Décrivez que les symboles de relation binaire P et R denotent des relations inverses.

(14) Définissez la théorie des groupes.

(15) Donnez une théorie qui a seulement des modèles infinis.

(16) Donnez une formule qui a seulement des modèles infinis.

(17) Décrivez la diagonale.

(18) $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \phi$ ssi $\mathcal{M} \models \forall y \forall x \phi$?

(19) $\mathcal{M} \models \exists x \forall y (x = y) \rightarrow C = D$?, C,D deux symboles pour constantes.

(20) Exprimez que $F(.)$ est constant pour tous les arguments dans $P(.)$

(21) Soit $\mathcal{M} \models \exists x \forall y (P(y) \rightarrow x = y) \wedge \forall x (P(F(x))$. Que peut-on dire de F?

(22) Exprimez que F est monotone wrt. $<$

(23) Exprimez que l'ensemble de sous-ensembles existe (avec $\in$)

(24) ($\exists$ correspond à $\vee$, $\forall$ to $\wedge$.) Est-ce que les formules suivantes sont vraies dans tout modèle?

$\exists x(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x \phi \vee \exists x \psi$

$\exists x(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x \phi \wedge \exists x \psi$

$\forall x(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \forall x \phi \vee \forall x \psi$

$\forall x(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x \phi \wedge \forall x \psi$

(25) $\mathcal{M} \models \forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \{a \in U : \mathcal{M} < x/a > \models \phi(x)\} \subseteq \{a \in U : \mathcal{M} < x/a > \models \psi(x)\}$?

(26) Définissez dans $\Re$ un cycle, un cylindre.

(27) Exprimez $P(.) \cap Q(.) = \emptyset$

(28) Exprimez $P(.) \cap Q(.) = R(.)$

(29) Exprimez que $<$ est transitive

(30) Est-ce que $\forall x(\phi(x) \vee \neg \phi(x))$ est valide?

(31) Exprimez $P(.,.) \subseteq Q(.,.)$

(32) Exprimez que $P(.)$ a n éléments

(33) Démontrez que $\exists x(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\phi) \vee \psi$ est vrai dans tout modèle, si x n'est pas libre dans ψ

(34) Démontrez que $\forall x(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\forall x\phi) \vee \psi$ est vrai dans tout modèle, si x n'est pas libre dans ψ

(35) Est-ce que cette formule a un modèle: $\neg P(C) \wedge \neg P(D) \wedge \exists x P(x)$?

(36) Est-ce que $\exists x\phi \rightarrow \phi$ est vrai dans quelques/tous les modèles?

4 Bases de la théorie des ensembles

Attention: Tout de quoi on parle - sauf des formules - sont des ensembles, on peut tout faire avec juste ensembles, il n'y a pas d'autres objets.

Nous donnons une axiomatisation de la théorie des ensembles appellée ZFC (Zermelo-Fränkel + Choix). Il y a 10 axiomes, (A.0)-(A.9).

Remarque 4.1

(A.0) dit qu'il y a quelque chose.

(A.1) et (A.2) donnent qqs. propriétés des ensembles. (A.1) dit que seul le contenu compte, pas le reste.

(A.3) - (A.9) donnent des constructions de nouveaux ensembles à partir de vieux ensembles. La théorie des ensembles est hautement constructive.

Axiome 4.1 Les axiomes (A.0) - (A.6)

(A.0) (Existence d'un ensemble):

$\exists x(x = x)$

(A.1) (Existensionalité):

$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$

(On peut répéter, réarranger les éléments ....)

(A.2) (Fondation):

$\forall x \ (\ \exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)) \ )$

($x \in x$ est par ex., impossible - la relation $\in$ est bien-fondée).

(A.3) (Compréhension (un peu simplifié)):

Si $\phi(x)$ est une formule, $\forall z \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi(x))$

(On peut créer des nouveaux ensembles avec des propriétés ϕ)

(A.4) (Paires):

$\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$

(A.5) (Union):

$\forall F \exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in F \to x \in A)$

Il y a des unions arbitraires.

(A.6) (Remplacement):

Pour toute formule $\phi(x, y)$: $\forall A \ (\ \forall x \in A \exists ! y \phi(x, y) \to \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi(x, y) \ )$

Attention: toujours un seul y! - $\exists! y$ est une abbréviation pour: il existe un seul y

Remarque 4.2

En général, les principes de construction donnent éventuellement trop - il faut appliquer compréhension pour avoir le résultat exacte - voir pairs.

Appliquer la propriéte $x \neq x$ à l'ensemble qui existe donne avec compréhension $\emptyset$, l'ensemble vide, donc $\emptyset$ existe.

$\{x, y\}$ existe par (A.4), donc en particulier $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$, et maintenant aussi $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Attention: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ etc.! (Preuve?)

Définition 4.1

(1) $A \subseteq B$ est une abbréviation pour $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$,

(2) $\bigcup X := \{y : \exists x \in X.y \in x\}$.

(3) $A \cup B$ est une abbréviation pour $\bigcup\{A, B\}$

(4) $< x, y > := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

(5) (le produit cartésien) $A \times B := \{< x, y >: x \in A \wedge y \in B\}$

(6) Une relation sur A est un sous-ensemble quelconque de $A \times A$, une fonction de A à B un sous-ensemble de $A \times B$ (avec quelques propriétés supplémentaires).

(7) $< A, R >$ est un bon ordre (R ordonne A bien) ssi

1. $R \subseteq A \times A$,

2. R est un ordre total (i.e. $\forall a \in A \forall a' \in A(aRa' \vee a'Ra)$),

3. si $\emptyset \neq A' \subseteq A$, existe $a' \in A'$ t.q. $\neg\exists a'' \in A'(a''Ra')$.

(8) X est transitive ssi $\forall x(x \in X \rightarrow x \subseteq X)$

(9) $s(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$.

(10) A est un nombre ordinal ssi A est transitive et si $\in$ est un bon ordre sur A.

(11) Les nombres naturels: $0 := \emptyset$, $1 := s(0)$, $2 := s(1)$, $\ldots$, $n + 1 := s(n)$

Remarque 4.3

(1) L'union existe, parce

1. (A.5) assure l'existence d'un ensemble éventuellement trop grand.

2. On jette les éléments de trop avec (A.3) - la formule $\phi(y)$ à considérer est $\exists x \in X.y \in x$.

(2) Le produit cartésien existe parce que:

1. $\forall y \in B : \forall x \in A \exists! z(z =< x, y >)$, donc par remplacement $prod(A, y) := \{z : \exists x \in A(z =< x, y >)\}$ existe.

2. $\forall y \in B \exists! z(z = prod(A, y))$, donc par remplacement $prod'(A, B) := \{prod(A, y) : y \in B\}$ existe.

3. $A \times B := \bigcup prod'(A, B)$ existe.

Exercice 4.1

(1) Montrez $A = B$ ssi $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$

(2) Montrez $< x, y >=< x', y' >$ ssi $x = x'$ et $y = y'$.

(3) Prouvez que 1-4 sont des ordinaux.

(4) $\{\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}\}$ n'en est pas un.

(5) Prouvez que, si x est un ordinal, $s(x)$ l'est aussi.

Axiome 4.2 Les axiomes (A.7) - (A.9)

(A.7) (Infinité): $\exists x$ ($0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x)$)

(A.8) (Ens. des sous-ens.): $\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \rightarrow z \in y)$

(A.9) (AC - Axiome du Choix): $\forall A \exists R$ (R est un bon ordre sur A)

Définition 4.2

(Hiérarchie de Veblen)

$V_0 := \emptyset$, $V_1 := \mathcal{P}(V_0)$, $V_{n+1} := \mathcal{P}(V_n)$

Exercice 4.2

(1) Construire la hiérarchie de Veblen jusqu'à V_5.

(2) Le produit cartésien général $\Pi\mathcal{A} := \{f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup\mathcal{A}$: $\forall A(A \in \mathcal{A} \rightarrow f(A) \in A)\}$ existe.

Idée: $\bigcup\mathcal{A}$ existe, donc $\mathcal{A} \times \bigcup\mathcal{A}$, donc $\mathcal{P}(\mathcal{A} \times \bigcup\mathcal{A})$, mais $\Pi\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A} \times \bigcup\mathcal{A})$: $\forall A \in \mathcal{A}$ $(\exists_1 a(< A, a >\in F) \wedge \forall a(< A, a >\in F \rightarrow a \in A))\}$. Tout $F \in \Pi\mathcal{A}$ est une fct. de choix, qui choisit pour tout $A \in \mathcal{A}$ un $a \in A$.

(3) AC $\Rightarrow \Pi\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Idée: $\bigcup\mathcal{A}$ existe. Soit R un bon ordre sur $\bigcup\mathcal{A}$, cela existe par AC. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ existe exactement $1 < A, a >$ t.q. a est R-minimal dans A.Donc $F := \{< A, a >$: a est R-min. dans $A\}$ existe, mais $F \in \Pi\mathcal{A}$.

(4) $\{V_i : i \in \boldsymbol{N}\}$ existe, donc $V_\omega := \bigcup\{V_i : i \in \boldsymbol{N}\}$ est défini.

(Par raisonnement analogue.)

5 Examen Tele-Enseignement Logique Mai 06

Example d'un examen.

5.1 Remarques:

Aucun document autorisé.

Les définitions moins élémentaires se trouvent en annexe. Il faut répondre aux questions (...?) avec soit une preuve, soit un contre-exemple.

Il y a 20 pt. en totalité, les exercices 4, 5, 12, 15 sont à 2 points, les autres à 1 pt.

5.2 Les questions:

5.2.1 Logique propositionelle classique

(1) Soit $\mathcal{L}$ un langage avec $v(\mathcal{L}) = \{p, q, r\}$. Est-ce que la formule $(p \wedge (q \wedge \neg r)) \wedge \neg p$ a un modèle? (Définir le modèle, ou prouver, qu'il n'y en a pas.)

(2) Est-ce que $T \models \phi$, $T \subseteq T'$ implique $T' \models \phi$?

(3) Est-ce que $M(T) \cap M(T') = M(T \cup T')$?

(4) Définissons une opération binaire sup sur modèles propositionels suivante:

$sup(m, m')(p) := v$ ssi $m(p) = v$ ou $m'(p) = v$,

$sup(m, m')(p) := f$ ssi $m(p) = m'(p) = f$.

Est-ce que pour toutes les formules ϕ, ϕ' tel que $m \models \phi$ et $m' \models \phi'$

$sup(m, m') \models \phi \wedge \phi'$ ou $sup(m, m') \models \phi \vee \phi'$

sont vrais aussi?

(5) Soit $v(\mathcal{L})$ infini, ϕ une formule de $\mathcal{L}$. Est-ce qu'il est vrai que ϕ a soit 0, soit une infinité de modèles?

(6) Est-ce que $T \vdash \phi$, $T \subseteq T'$ implique $T' \vdash \phi$?

(7) Démontrez $\vdash \phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$, vous pouvez utiliser le théorème de déduction.

(8) Est-ce que ($T \vdash \phi$ et $T' \vdash \phi \rightarrow \phi'$) implique $T \cup T' \vdash \phi'$?

(9) Prouvez le théorème de compacité. (Rappel: Th. de comp.: Si $T \vdash \phi$, il y a $T' \subseteq T$ fini tel que $T' \vdash \phi$.)

5.2.2 Modèles préférentiels

Prouvez:

(10) $\phi \mid\sim \phi$

(11) Si $X \subseteq Y$, donc $\mu(Y) \cap X \subseteq \mu(X)$

(12) En déduisez: Si $\phi \models \phi'$, et $\phi \mid\sim \psi$, donc $\phi' \mid\sim \psi \vee \neg\phi$.

5.2.3 Logique du premier ordre

(13) Soient C un symbole pour une constante,

$P(.)$ un symbole pour un prédicat unaire,

$R(.,.)$ un symbole pour un prédicat binaire,

$F(.)$ un symbole pour une fonction unaire,

$G(.,.)$ un symbole pour une fonction binaire.

Quelles sont les interprétations de ces symboles dans un modèle?

(14) Quelle est la signification de la formule $\exists x \exists y \forall z (z = x \vee z = y)$? (La réponse est une propriété de l'univers - ne traduisez pas les symboles juste en francais!)

(15) Est-ce que le côté gauche est équivalent au côté droite (i.e. dans tout modèle $\mathcal{M}$, l'un est vrai ssi l'autre l'est)?

(1) $\forall x(\phi \vee \psi)$ $\quad$ $(\forall x \phi) \vee (\forall x \psi)$

(2) $\forall x(\phi \wedge \psi)$ $\quad$ $(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi)$

(3) $\exists x(\phi \vee \psi)$ $\quad$ $(\exists x \phi) \vee (\exists x \psi)$

(4) $\exists x(\phi \wedge \psi)$ $\quad$ $(\exists x \phi) \wedge (\exists x \psi)$

5.2.4 Théorie des ensembles

(16) Est-ce que $\{\{\emptyset\}\}$ est un nombre ordinal?

5.3 Quelques définitions

5.3.1 Pour la logique préférentielle:

Soit $<$ une relation binaire sur l'ensemble des modèles classiques $M_{\mathcal{L}}$ d'un langage propositionnel.

Si $X \subseteq M_{\mathcal{L}}$, on définit $\mu(X) := \{x \in X : \neg \exists x' \in X . x' < x\}$ - $\mu(X)$ est l'ensemble des $x \in X$, qui sont $< -$minimaux (dans X, pas nécessairement absolument, c'est à dire $y < x$ est possible, mais $y \notin X$!).

On définit une nouvelle logique $\mid\!\sim$ par:

$\phi \mid\!\sim \psi$ ssi ψ est vrai dans tous les modèles $< -$minimaux de ϕ, formellement ssi $\mu(M(\phi)) \models \psi$.

5.3.2 Pour la théorie des ensembles:

Axiome 0 (Existence d'un ensemble): $\exists x(x = x)$

Axiome 1 (Existensionalité): $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ (On peut répéter, réarranger les éléments ....)

Axiome 2 (Fondation): $\forall x$ ($\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y))$) ($x \in x$ est par ex., impossible - la relation $\in$ est bien-fondée)

Axiome 3 (Compréhension (un peu simplifié)): Si $\phi(x)$ est une formule, $\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi(x))$ (On peut créer des nouveaux ensembles avec des propriétés ϕ)

Axiome 4 (Paires): $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$

Axiome 5 (Union): $\forall F \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in F \rightarrow x \in A)$ Il y a des unions arbitraires

Axiome 6 (Remplacement): Pour toute formule $\phi(x, y)$: $\forall A$ ($\forall x \in A \exists ! y \phi(x, y) \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists x \in Y \phi(x, y)$) Attention: toujours un seul y!

Def.: $A \subseteq B$ est une abbréviation pour $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

Def.: Une relation sur A est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times A$, $A \times B := \{< x, y >: x \in A \wedge y \in B\}$, $< x, y >$ est la paire ordonée

Def.: $< A, R >$ est un bon ordre sur A ssi (1.) $R \subseteq A \times A$, (2.) R est un ordre total (i.e. $\forall a \in A \forall a' \in A (aRa' \vee a'Ra \vee a = a')$), (3.) si $\emptyset \neq A' \subseteq A$, il existe $a' \in A'$ t.q. $\neg \exists a'' \in A' (a''Ra')$.

Def.: X est transitive ssi $\forall x (x \in X \rightarrow x \subseteq X)$

Def.: A est un nombre ordinal ssi A est transitive et si $\in$ est un bon ordre sur A.