Classification des matériaux élastiques et calcul des invariants

Résumé du projet

15 janvier 2009

En élasticité linéaire, le *tenseur des contraintes* σ et le *tenseur des déformations* ε d'un matériau sont reliés, à une température donnée, par la *loi de Hooke* $\sigma = L\varepsilon$. Ainsi, chaque matériau est caractérisé par son *tenseur d'élasticité* L mais cette correspondance n'est pas univoque. En effet, la donnée explicite des composantes de L est *relative au choix* d'une base orthonormée dans laquelle sont exprimées les composantes des tenseurs σ et ε. Un changement de base orthonormée induit une action du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$ sur l'espace des tenseurs d'élasticité $\mathbb{E}$. Par conséquent, du point de vue de l'*élasticité linéaire*, décrire *tous les matériaux*, c'est décrire les orbites de l'action du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{E}$.

D'un point de vue mécanique et physique, la résolution de ce problème permettra de mieux appréhender de nombreux phénomènes issues de l'élasticité anisotrope et/ou non linéaire, qui sont fréquemment rencontrés dans l'étude des matériaux composites et des tissus biologiques. Par exemple, l'identification du comportement élastique d'un matériau anisotrope dont la symétrie matérielle est a priori inconnue est un problème de première importance en géotechnique qui est étroitement lié à celui que nous proposons d'étudier. En outre, la compréhension complète du problème linéaire et isotrope est cruciale avant de partir à l'assaut des cas non linéaires et anisotropes car elle donnera des outils et des clés nouvelles pour traiter les cas plus généraux.

Ce problème, bien qu'ancien et clairement formulé d'un point de vue mathématique, demeure extrêmement complexe et n'a toujours pas reçu de réponse totalement satisfaisante à ce jour car l'espace des orbites en question n'est pas une variété lisse mais un *espace singulier* dont la description complète est difficile sans le recours au calcul symbolique sur ordinateur. L'objectif du projet et de lever ces verrous par une approche multidisciplinaire alliant les compétences de chercheurs en mathématique, en informatique et en mécanique.

Concrètement, la description des orbites s'effectue par la détermination d'un système fini d'*invariants polynomiaux* qui *séparent* les orbites. Il s'agit là d'un problème qui bien que théoriquement résolu s'avère en pratique extrêmement complexe. La méthode employée consiste à décomposer en facteurs irréductibles la représentation du groupe $\mathrm{SO}(3)$ sur l'espace $\mathbb{E}$ de dimension 21. On obtient ainsi, outre les deux représentations de dimension 1 qui correspondent aux deux *nombres de Lamé*, deux représentations de dimension 5 et une représentation de dimension 9. Bien qu'on sache calculer individuellement les invariants de chacune de ces représentations irréductibles (on peut se ramener au calcul [1, 2] des *invariants des formes binaires* sous l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$), on a toutefois du mal à expliciter les *invariants joints* de l'ensemble de ces formes car la complexité explose.

Les travaux récents sur le sujet [1, 4] ne sont d'ailleurs pas parvenu à fournir un système complet d'invariants permettant de décrire toutes les orbites – certaines orbites non génériques ne sont pas décrites, bien qu'elles jouent un rôle important en pratique.

Le but de ce projet est de réaliser une description *complète* des différentes orbites. On cherchera aussi à élucider la structure de l'algèbre des invariants considérée (recherche d'un système minimal de générateurs). On utilisera éventuellement des méthodes alternatives au calcul *classique* des invariants :

- calcul d'une forme canonique du tenseur élasticité L sur les différentes orbites du groupe SO(3),
- utilisation de la méthode du *repère mobile*, méthode qui s'est perfectionnée très récemment, sous l'impulsion de P. Olver [3],
- techniques d'algèbre non commutative (étude des opérateurs différentiels invariants),
- la difféologie développée par Jean-Marie Souriau.

Un tel projet ne peut se réaliser sans une utilisation *subtile* des techniques de calcul symbolique sur ordinateur. Il est probable que les techniques classiques de codage des polynômes en variables commutatives (utilisées par exemple dans le calcul des bases de Gröbner) ne fonctionneront pas pour des polynômes comportant entre 18 et 21 indéterminées. Il faudra expérimenter, sur cet exemple difficile, les techniques de codage empruntées à la combinatoire (existence de *lois de redressement* dans les algèbres d'invariants, représentation *graphique* des invariants à la manière des molécules en chimie, combinatoire du groupe symétrique et des partitions etc.). On pourra se laisser guider par l'origine concrète de la question (en mécanique) pour faire avancer un problème très général en calcul symbolique, à savoir le grossissement des formules.

Les retombées du projet ne concernent pas uniquement l'élasticité. Les méthodes, algorithmes et outils informatiques développés devraient permettre d'avancer sur des problèmes similaires, notamment en électrodynamique des milieux continus anisotropes. Notre équipe se compose de 4 chercheurs de Marseille, Lille et Marne-la-Vallée : un mathématicien, un informaticien (spécialiste de calcul symbolique) et deux mécaniciens qui ont déjà eu l'occasion de se rencontrer souvent et d'échanger ensemble sur ce sujet, notamment au *Colloque International de Théories Variationnelles*, un séminaire annuel d'une semaine réunissant des mathématiciens, informaticiens, physiciens et mécaniciens dans un esprit pleinement interdisciplinaire.

Références

[1] J.-P. Boehler, A. A. Kirillov, Jr., and E. T. Onat. On the polynomial invariants of the elasticity tensor. *J. Elasticity*, 34(2) :97–110, 1994.

[2] Jacques Dixmier. *Quelques aspects de la théorie des invariants*, chapter 5, pages 63–93. Où en sont les mathématiques ? Vuibert, SMF, 2002.

[3] P. J. Olver. An introduction to moving frames. In I.M. Mladenov and eds. A.C. Hirschfeld, editors, *in : Geometry, Integrability and Quantization*, pages 67–80, Softex, Sofia, Bulgaria, 2004.

[4] H. Xiao. On isotropic invariants of the elasticity tensor. *Journal of Elasticity*, 46(2) :115-149, 1997.