# GÉOMÉTRIE ET COMBINATOIRE DES GROUPES

H. SHORT

## 1. Définition des groupes libres

Rappeler que si $G$ est un groupe, $X$ un partie de $G$, alors le sous–groupe engendré par $X$, que nous dénoterons $gp(X)$, est défini comme le plus petit sousgroupe de $G$ qui contient $X$. Il n'est pas difficiles de voir que

$$gp(X) = \{{x_1}^{\epsilon_1}{x_2}^{\epsilon_2}\ldots x_n^{\epsilon_n} \mid x_i \in X,\ \epsilon_i = \pm 1\}$$

**Définition 1.1.** *Soit $X$ un ensemble. Un produit (ou suite) $w = {x_1}^{\epsilon_1}{x_2}^{\epsilon_2}\ldots x_n^{\epsilon_n}, \mid x_i \in X,\ \epsilon_i = \pm 1$ s'appelle un $X$–mot (ou mot) de longueur $n$.*

*Si on considère les $x_i$ comme des éléments du groupe $G$, ce mot a une valeur $g$ dans $G$, et nous écrivons ${x_1}^{\epsilon_1}{x_2}^{\epsilon_2}\ldots x_n^{\epsilon_n} =_G g$ (certains écrivent $\overline{w}$).*

**Définition 1.2.** *On dit que le $X$–mot $w = {x_1}^{\epsilon_1}{x_2}^{\epsilon_2}\ldots x_n^{\epsilon_n}$ est <u>réduit</u> si $x_i = x_{i+1} \implies \epsilon_i + \epsilon_{i+1} = 0$ ou $\epsilon_i\epsilon_{i+1} = 1$.*

Est–ce qu'il y a quelque chose à démontrer dans l'assertion $gp(X) = \{{x_1}^{\epsilon_1}{x_2}^{\epsilon_2}\ldots x_n^{\epsilon_n} \mid$ réduit$\}$?

**Définition 1.3.** *Soit $G$ un groupe, $X \subset G$ une partie génératrice (c'est à dire $gp(X) = G$). Si aucun $X$–mot réduit (non–vide) n'est égal à 1 (= élément neutre de $G$), alors on dit que <u>$G$ est libre avec base $X$</u> (ou $X$ est une base libre pour $G$, ou $X$ engendre $G$ librement).*

<u>exemple :</u> Soit $G$ un groupe, et $X = \{t\}$, t.q. $X$ est une base libre pour $G$. Les mots ont le forme $t^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Alors $G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

<u>Exercice :</u> Deux $X$–mot réduits sont égaux dans un groupe libre $G$ si et seulement s'ils sont identiques.

**Théorème 1.4.** *Soit $X$ un ensemble. Il existe un groupe libre $F$ avec base $X$.*

Démonstration: (suivant [rotman] chap 11)

Soit $X'$ un ensemble disjoint de $X$ avec la même cardinalité. On dénote une bijection $X \to X'$ par $x \to x^{-1}$ (où $x \in X$ et $x^{-1} \in X'$). On l'étend à une bijection $X \cup X' \to X \cup X'$ mettant $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

Alors un mot réduit est une suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ finie d'éléments de $X \cup X'$ telle que $a_{j+1} \neq a_j^{-1}$. On peut noter cette suite ${x_1}^{\epsilon_1}{x_2}^{\epsilon_2}\ldots x_n^{\epsilon_n}$ où $x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$.

Soit $W$ l'ensemble de ces mots réduits. Le mot de longueur 0 on dénote 1.

On veut définir la loi de multiplication comme la juxtaposition des suites, mais ça ne donne pas un mot réduit: par exemple quel est le produit de $(xyx^{-1}y)$ $(y^{-1}xxxy^{-1}y^{-1})$? Il est raisonnable de dire que la loi sera de juxtaposition suivie de annulation des lettres "inverses" voisines.

Chaque élément $x \in X \cup X'$ définit une application

$$\phi_x : W \to W, \quad \phi_x({x_1}^{\epsilon_1}{x_2}^{\epsilon_2}\dots x_n^{\epsilon_n}) = \begin{cases} x{x_1}^{\epsilon_1}{x_2}^{\epsilon_2}\dots x_n^{\epsilon_n} & \text{si } x^{-1} \neq {x_1}^{\epsilon_1} \\ x_2^{\epsilon_2}\dots x_n^{\epsilon_n} & \text{si } x^{-1} = {x_1}^{\epsilon_1} \end{cases}.$$

Noter que les compositions $\phi_x \circ \phi_{x^{-1}}$ et $\phi_{x^{-1}} \circ \phi_x$ donnent la identité sur $W$. Donc chaque $\phi_x$ est une permutation de $W$ (un élément du groupe symétrique $S_W$).

Soit $F_0$ le sous–groupe de $S_W$ engendré par $X_0 = \{\phi_x \mid x \in X\}$.

On veut montrer que $F_0$ est un groupe libre sur $X_0$.

Soit $u \in F_0$; alors $u$ a une écriture réduite (possiblement pas unique) $u =_{F_0} \phi_{{x_1}^{\epsilon_1}}\phi_{{x_2}^{\epsilon_2}}\dots\phi_{{x_n}^{\epsilon_n}}$, car dans $S_W$, $(\phi_x)^{-1} = \phi_{x^{-1}}$.

Mais une telle factorisation est unique, car en l'applicant au mot vide (=1) on obtient un mot réduit, dont unique, de l'ensemble $W$:

$$\phi_{{x_1}^{\epsilon_1}}\phi_{{x_2}^{\epsilon_2}}\dots\phi_{{x_n}^{\epsilon_n}}(1) = {x_1}^{\epsilon_1}{x_2}^{\epsilon_2}\dots x_n^{\epsilon_n}$$

Donc les factorisations différents proviennent de permutations différentes.

□

**Théorème 1.5.** Propriété Universelle des groupes Libres

*Soit $F(X)$ le groupe libre sur l'ensemble $X$.*

*Soit $G$ un groupe et $\phi : X \to G$ une application.*

*Alors il existe un unique homomorphisme $\Phi : F(X) \to G$ tel que $\Phi|_X = \phi$.*

Démonstration: L'homomorphisme est défini par les images des générateurs. □

**Corollaire 1.6.** *Tout groupe est quotient d'un groupe libre.*

**Définition 1.7.** *S'il existe un homomorphisme $\Phi$ de $F(X)$ sur $G$ où $|X|$ est fini on dit que $G$ est de type fini.*

*Si $R$ est un ensemble dans $F(X)$ tel que le noyau* ker$\Phi$ *est le sousgroupe distingué engendré par $R$ écrit $\langle\langle R\rangle\rangle$ (c'est à dire l'intersection de tous les sousgroupes distingués qui contiennent $R$), alors on dit que $< X; R >$ est une présentation pour $G$. En fait, on a $G \cong F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle$).*

*Si les ensembles $X$ et $R$ sont fini, alors on dit que $< X; R >$ est une présentation finie de $G$.*

exemple

Le groupe libre sur $a, b$ a une présentation $< a, b \mid >$.

Le groupe libre abélien de rang 2, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a une présentation $< a, b \mid [a, b] >$. (Ici on utilise le convention que $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — mais si on utilise l'autre convention standard, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ on a le même groupe (pourquoi?).)

Exercice La présentation $< a, b, c \mid c >$ est une présentation du groupe libre $F(a, b) =< a, b \mid >$.

## 2. Version Géométrique

**Définition 2.1.** *Un complexe simpliciale (abstraite) est un ensemble $V(K)$ de sommets, et une famille de sous–ensembles de $V(K)$, les simplexes de $K$ tels que les sommets sont des simplexes et les faces des simplexes (c'est à dire, les sous–ensembles des simplexes) sont aussi des simplexes; c'est à dire*

1. $v \in V(K) \implies \{v\}$ *est un simplexe;*
2. $s = \{v_1, \ldots, v_p\}$ *un simplexe,* $s' = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_q}\} \subset s \implies s'$ *est un simplexe.*

*Un simplexe $s = \{v_0, v_1, \ldots, v_q\}$ de $q+1$ éléments distincts est un $q$–simplexe, ou simplexe de dimension $q$.*

*La dimension de $K$ est le maximum des dimensions de ses simplexes, si ceci est fini.*

Exemples: Un point est un simplexe de dimension 0, et l'intervalle $[0,1]$ est le modèle d'un simplexe de dimension 1. Un triangle (solide) et un tetrahèdre (solide) peuvent être vu comme des modèles des simplexes de dimension 2 et 3. Le bord de chacun peut être vu comme un complexe simpliciale.

Traduire tous ces idées au monde topologique n'est pas trop difficil. On définit un $q$–simplexe géométrique: Soit $v_0, v_1, \ldots v_k$ une collection de $k$ points dans $\mathbb{R}^n$ tels que les vecteurs $v_i - v_0, 1 \leq i \leq k$ sont lineairement indépendant (donc $n \geq k$). Alors l'ensemble des points

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i, \ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$$

est un $k$ simplex géométrique. Alternativement, choisissant les points $v_i, i > 0$ comme les points de la base standarde ($v_1 = (1,0,0,\ldots,0), v_2 = (0,1,0,\ldots,0)$ $\ldots$) et $v_0$ comme l'origine, on a l'ensemble des points

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq 1, \lambda_i \geq 0.$$

(On a défini l'ensemble convexe minimale qui contient $\{v_i\}$.) Pour définir un complexe géométrique il faut s'assurer que l'intersection de deux simplexes est un simplexe, etc. (voir par exemple [7] chap. 5).

Un complexe $L$ est un *sous–complexe* de $K$. si

1. $V(L) \subset V(K)$;
2. chaque simplexe de $L$ est un simplexe de $K$.

Le $q$–squelette de $K$, denoté $K^{(q)}$, est le sous–complexe de $K$ de tous les simplexes de dimension au plus $q$.

Une *arête* (orientée) de $K$ est une paire ordonné $e = (u, v)$, $u, v \in V(K)$, tel que $\{u, v\}$ est un simplexe (on inclut la possibilité ici que $u = v$ — dans ce cas l'arête est degenerée –elle se réduit à un sommet). On dit que $u = o(e)$ est l'*origine* de $e$, et que $v = t(v)$ est le sommet *terminale* de $e$.

On peut généraliser un peu, une fois qu'on accepte d'identifier l'interieure un simplexe de dimension $n$ avec l'interieure d'un disque de dimension $n$ :

**Définition 2.2.** $\Delta$*–complexe est une collection de complexes orientés disjoints avec les intérieurs de certains faces identifiés via des homéomorphisme préservant les* *ordres des sommets. C'est à dire: pour chaque dimension $n$, on a une collection d'ensembles de simplexes de dimension $n$: pour chacun de ces ensembles, les membres seront considérés comme identifiés.*

Exemples:
un point: un sommet
un cercle: un sommet, un arc, (les deux sommets de l'arête sont identifiés), deux sommets, deux arcs...
un tore: un sommet, deux triangles, avec des identifications des arêtes.

La différence: un vrai complexe simplicial pour le tore contient beaucoup de simplexes (au moins 15 triangles je crois...facil de le faire avec 18).

Un *chemin* est une suite $\gamma = e_1, e_2, \ldots, e_n$ d'arêtes tels que $t(e_i) = o(e_{i-1}), 2 \leq i \leq n$. On étend la définition d'origine et sommet terminale on posant $o(\gamma) = o(e_1)$ et $t(\gamma) = t(e_n)$.

Un chemin $\gamma$ est dit *fermé* si $t(\gamma) = t(e_n) = o(e_1) = o(\gamma)$ (on dit aussi que $\gamma$ est un lacet ou un circuit).

Un complexe est connexe s'il y a un chemin entre chaque paire de sommets.

Donner deux chemins $\alpha = e_1 e_2 \ldots e_m$ et $\beta = f_1 f_2 \ldots f_n$ dans $K$, on peut former le chemin produit $e_1 e_2 \ldots e_m f_1 f_2 \ldots f_n$ quand $t(\alpha) = o(\beta)$.

exemple

Pour obtenir le groupe des lacets, nous avons besoin de définir une notion d'equivalence des chemins:

**Définition 2.3.** *Les chemins $\alpha = e_1 e_2 \ldots e_m$ et $\beta = f_1 f_2 \ldots f_n$ sont equivalents si on peut changer l'un dans l'autre par une suite finie des operations et ses inverses:*
*(I) remplacer dans un chemin les deux arêtes adjacentes $\ldots(u,v)(v,w)\ldots$ par l'arête seule $\ldots(u,w)\ldots$ quand $\{u,v,w\}$ est un 2–simplexe de $K$;*
*(II) remplacer deux arêtes adjacentes $\ldots(u,v)(v,u)\ldots$ par l'arête seule $(u,u)$;*
*(III) supprimer une arête degenerée $(u,u)$.*

Il est facil de voir que si $\alpha \equiv \alpha'$ et $\beta \equiv \beta'$ alors:

(1) $o(\alpha) = o(\alpha')$ et $t(\alpha) = t(\alpha')$;
(2) si $t(\alpha) = o(\beta)$ alors $[\alpha.\beta] = [\alpha'.\beta']$ — on peut donc définir la loi $[\alpha].[\beta] = [\alpha.\beta]$
(3) on peut considerer les trois changements comme des homotopies dans les réalisations géométriques;
(4) si $o(\alpha) = u$ et $t(\alpha) = v$, $[(u,u)].[\alpha] = [\alpha] = [\alpha][(v,v)]$;
(5) la loi est associative;
(6) $[\alpha.\alpha^{-1}] = [(u,u)]$, $[\alpha^{-1}.\alpha] = [(v,v)]$

L'ensemble des chemins est un groupoïde (voir par exemple le livre de R. Brown "Topology").

**Définition 2.4.** *Si $v_*$ est un sommet de $K$ on peut définir l'ensemble*

$$\pi_1(K, v_*) = \{[\alpha] \mid \alpha \textit{ est un lacet basé à } v_*, \textit{ c'est à dire } o(\alpha) = t(\alpha) = v_*\}$$

**Théorème 2.5.** *Avec la loi $[\alpha][\beta] = [\alpha.\beta]$, l'ensemble $\pi(K, v_*)$ devient un groupe.*
*Si $K$ est connexe et $u_*$ est un sommet de $K$, alors $\pi_1(K, u_*) \cong \pi_1(K, v_*)$*

**Définition 2.6.** *Le chemin $\alpha$ est dit réduit si une arête $(u, v)$ n'est jamais suivie par son inverse $(v, u)$ dans $\alpha$, et $\alpha$ ne contient pas d'arête dégenerée $(u, u)$.*

*Un circuit est un chemin fermé réduit.*

*Un arbre est un complexe connexe de dimension au plus 1 sans circuit non–trivial.*

*Un arbre $T$ dans $K^{(1)}$ est dit maximal si pour tout arbre $T'$ tel que $T \subset T' \subset K^{(1)}$, on a $T = T'$.*

**Proposition 2.7.** *Si $K$ est connexe, un arbre $T$ dans $K^{(1)}$ est maximal si et seulement s'il contient tout sommet.*

Soit $K$ un complexe connexe, et $T$ un arbre maximal dans $K^{(1)}$. Nous definissons une présentation de groupe $G_{K,T}$ avec

• generateurs: les arêtes $(u, v)$ dans $T$;
• relateurs: (a) $(u, v) = 1$ si $(u, v) \in T$;
(b) $(u, v)(v, w) = (u, w)$ si $\{u, v, w\}$ est un simplexe.

Par exemple, soit $K_1$ le complexe qui a trois sommets $x, y, z$ et trois 1–simplexes $\sigma_1 = \{x, y\}, \sigma_2 = \{y, z\}, \sigma_3 = \{z, x\}$ (les cotés d'un triangle). Les deux simplexes $\sigma_1, \sigma_2$ forment un arbre maximal $T_1$ dans $K_1$. Donc on arrive à avoir une présentation $G_{K_1,T_1} =< a, b, c \mid a, b >$, où $a$ répresente l'arête $(x, y)$, etc.. Montrer que ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Soit $K_n$ le complexe avec ensemble de sommets $\{x, y_1, \ldots, y_n, z_1 \ldots, z_n, \}$, et comme 1–simplexes $\{x, y_i\}, \{y_i, z_i\}, \{z_i, x\}$. (Il faut imaginer un ensemble de $n$ triangles avec un sommet en commun.) Encore une fois on met dans l'arbre maximal tous les 1–simplexes sauf les $\{y_i, z_i\}$. Cela donne la présentation

$$< a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n, c_1, \ldots, c_n; a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n >$$

où $a_i = (x, y_i)$, $b_i = (y_i, z_i)$ et $c_i = (z_i, x)$.

<u>Exercice</u> Montrer que $\pi_1(K_n) \cong F_n$ le groupe libre de rang $n$.

**Proposition 2.8.** *Le groupe $G_{K,T}$ est isomorphe au groupe $\pi_1(K, v_*)$.*

Démonstration: Pour commencer on va définir une application $F(E) \to \pi_1(K, v_*)$ ou $E$ est l'ensemble des arêtes. Pour chaque sommet $v$ choisir un chemin (réduit) $\alpha(v)$ dans $T$ avec origine $v_*$ et terminal $v$. Si $e \in T$, alors soit $\alpha(o(e))e = \alpha(t(e))$ soit $\alpha(o(e)) = \alpha(t(e))e^{-1}$.

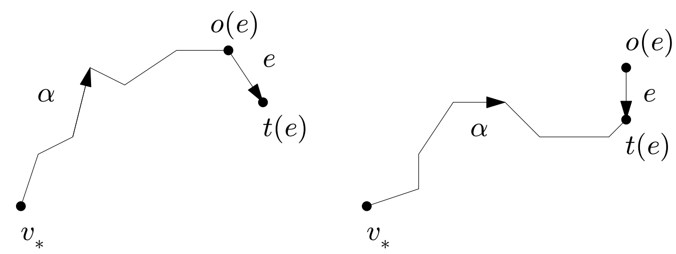
Définir $\Phi(e) = \alpha(o(e)e(\alpha(t(e)))^{-1}$. On a ainsi un homomorphisme $F(E) \to \pi_1(K, v_*)$. Noter que $\Phi(e) = \alpha(o(e))e(e^{-1}(\alpha(o(e)))^{-1}$ si $e \in T$, et ceci est égal à 1. Aussi

$$\begin{aligned}\Phi((u, v)(v, w)(w, u)) &= \big(\alpha(u)(u, v)\alpha(v)^{-1}\big)\big(\alpha(v)(v, w)\alpha(w)^{-1}\big)\big(\alpha(w)(w, u)\alpha(u)^{-1}\big) \\ &= \alpha(u)(u, v)(v, w)(w, u)\alpha(u)^{-1}\text{après réduction}\end{aligned}$$

et ceci est égal à 1 dans $\pi_1(K, v_*)$. Ainsi on montre que deux mots équivalents dans $G_{K,T}$ ont la même image dans $\pi_1(K, v_*)$ et $\Phi$ est bien défini sur $G_{K,T}$. Il est aussi surjectif, car pour le lacet $\gamma$ basé à $v_*$, on a que $\gamma$ est équivalent à $\Phi(^{-}gamma)$.

On a aussi une application $\Theta : \pi_1(K, v_*) \to G_{K,T}$ obtenue de l'application au niveau d'arêts, qui envoie le lacet $\gamma = a_1 \ldots a_n \to a_1 \ldots a_n$. Il faut verifier que cette application est bien définie et est inverse à $\Phi$ (au niveau des classes).

$\square$




**Théorème 2.9.** *Si $K$ est connexe et de dimension 1, alors $\pi(K, v_*)$ est un groupe libre de rang $Card\{\sigma^1 \in K - T\}$.*

**Définition 2.10.** *Soit $K$ un complexe connexe fini, et dénotons $n_d$ le nombre de simplexes de dimension $d$. Le charactéristique de Euler comme $\chi(K) = -\sum(-1)^d n_d$. Quand $K$ est connexe et de dimension 1 ça donne $\chi(K)$ est la difference entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de $K$.*

On a demontré alors que:

**Corollaire 2.11.** *Soit $K$ est un complexe connexe de dimension 1.*
*Alors le groupe $\pi_1(K)$ est libre de rang $\chi(K) + 1$.*

<u>Exemple</u>
Les groupes libres existent — ils sont les groupes des exemples $\pi(K_n)$ ci–dessus.

2.1. **Revêtements.** Une application $f : K \to L$ est *simpliciale* si, pour tout simplexe $\sigma = \{v_0, \dots v_q\} \in K$, on a $f(\sigma) = \{f(v_0), \dots, f(v_q)\}$ est un simplexe dans $K$. Noter qu'il est permis que la dimension de $f(\sigma)$ ne soit pas $q$, c'est à dire que $f(v_i) = f(v_j)$ pour certain $i \neq j$.

Une application simpliciale $p : \widetilde{K} \to K$ est un *revêtement* si
(i) $\widetilde{K}$ est connexe ;
(ii) pour tout $q$–simplexe $\sigma \in K$, on a $p^{-1}(\sigma)$ est la réunion disjointe de $q$–simplexes $\{\sigma_i\}$ tels que $p|_{\sigma_i} : \sigma_i \to \sigma$ est une bijection — c'est à dire que l'image de chaque $q$ simplexe est un $q$ simplexe.

**Lemme 2.12.** *Propriétés des revêtements*
*Soit $p : \widehat{K} \to K$ un revêtement, et soit $\tilde{v}_*$ un sommet de $\widehat{K}$.*

1. *pour chaque arête $e$ avec $o(e) = v_*$, il y a un unique arête $\tilde{e}$ dans $\widehat{K}$ t.q. $o(\tilde{e}) = \tilde{v}_*$ et $p(\tilde{e}) = e$.*
2. *pour chaque chemin $\alpha$ dans $K$ t.q. $o(\alpha) = v_*$ il y a un unique chemin $\tilde{\alpha}$ dans $\widehat{K}$ t.q. $o(\tilde{\alpha}) = \tilde{v}_*$ et $p(\tilde{\alpha}) = \alpha$.*
3. *si les chemins $\alpha$ et $\beta$ sont equivalents dans $K$, alors $\tilde{\alpha}$ est equivalent à $\tilde{\beta}$ dans $\widehat{K}$ quand $o(\tilde{\alpha}) = o(\tilde{\beta})$.*
4. *l'application induite $p_\sharp : \pi(\widehat{K}, \tilde{v}_*) \to \pi(K, v_*)$ est un homomorphisme injectif.*
5. *si $u \in \widehat{K}$ est t.q. $p(u) = p(v_*)$ alors les sous–groupes $p_\sharp(\pi(\widehat{K}, \tilde{v}_*))$ et $p_\sharp(\pi(\widehat{K}, u))$ sont conjugés dans $\pi(K, v_*)$ par l'élément $[p_\sharp(\gamma)]$ où $\gamma$ est un chemin dans $\widehat{K}$ entre $u$ et $v_\star$.*

Démonstration: La première partie se démontre par récurrence. Soit $e = (v_*, v)$ un chemin de longeur 1; alors $v_*$ et $v$ se trouve dans un simplexe $\sigma$ de $K$, et $p^{-1}(\sigma)$ est une réunion disjointe des simplexes de $\widehat{K}$. Un de ces simplexes contient $\tilde{v}_*$, et il y a donc un simplexe $\tilde{\sigma} = \{\tilde{v}_*, \tilde{v}\}$ où $p(\tilde{v}) = v$. L'unicité de ce sommet $\tilde{v}$ vient du fait que la réunion est disjointe (exercice).

□

Comment construire des revêtements

Soit $K$ un complexe, $G = \pi(K, v_*)$ son groupe fondamentale, et $H$ un sous–groupe de $G$. On va définir un revetement $K_H$ de $K$ qui aura comme groupe fondamental $H$. Au–dessus de chaque sommet de $K$ il y aura comme fibre un ensemble qui correspond aux classes laterales $gH$ de $H$ dans $G$. (Il y a une action naturelle de $G$ à gauche sur l'ensemble, $g' \circ gH = (g'g)H$. Le stabilisateur du sommet $gH$ est le conjugué $gHg^{-1}$ de $H$. Quand $H$ est un sous–groupe distingué, il y a une action de $G/H$ sur $K_H$ sans points fixes qui est transitive sur chaque fibre.)

Pour définir les autres simplexes dans $K_H$, nous définissons d'abord une nouvelle relation d'équivalence sur l'ensemble de chemins de $K$ par:

**Définition 2.13.** *soit $\alpha$ et $\beta$ de chemins de $K$ tels que $o(\alpha) = o(\beta) = v_*$ et $t(\alpha) = t(\beta)$. On dit que les chemins sont equivalents mod $H$ si $[\alpha\beta^{-1}] \in H$. Nous écrirons $\alpha \equiv_H \beta$, et $[\alpha]_H$ pour la classe d'équivalence. Soit $K_H$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence (pour tout chemin $\alpha$ dans $K$ basé à $v_*$, et tout sommet terminal).*

(Rappeller que quand on définit la quotient d'un groupe $G$ par un sous–groupe $H$, on commence avec la relation d'équivalence sur $G$ $g \equiv_H g'$ quand $g{g'}^{-1} \in H$.)

Soit $\sigma = \{u_0, \ldots, u_k\}$ un simplexe de $K$, et $\alpha$ un chemin t.q. $o(\alpha) = v_*$ et $t(\alpha) = u_0$. Alors pour chaque $i$, $\alpha.(u_0, u_i)$ est un chemin qui commence à $v_*$ et termine à $u_i$, et ce chemin définit une classe d'équivalence $[\alpha(u_0, u_i)]_H$ dans $K_H$. Pour chaque classe $[\alpha]$, nous définissons un simplexe $\tilde{\sigma}_{[\alpha]_H}$ de $K_H$ comme

$$\tilde{\sigma}_{[\alpha]_H} = \{[\alpha]_H, [\alpha(u_0, u_1)]_H, \ldots, [\alpha(u_0, u_k)]_H\} \ .$$

Noter que cette definition est independante du chemin $\alpha$ dans $[\alpha]_H$ choisi, et que ce simplexe est de dimension $k$ aussi, car $u_i \neq u_j \implies [\alpha(u_0, u_i)]_H \not\equiv [\alpha(u_0, u_j)]_H$. Avec ces $\sigma_{[\alpha]_H}$ comme simplexes, $K_H$ devient un complexe simplcial.

Le fait important à noter ici est que les simplexes ainsi construits sont disjoints.

**Lemme 2.14.** *Soit $K$ un complexe, $v_*$ un sommet de $K$, $H$ un sousgroupe de $\pi(K, v_*)$, et $K_H$ le complexe qui correspond à $H$. Soit $\alpha$ un chemin qui commence à $v_*$, et finit à $t(\alpha) = u$.*

(1) *Pour l'1–simplexe $\sigma = \{u, v\}$ l'ensemble*
$$\{\{[\beta]_H, [\beta(u, v)]_H\} \mid \beta \text{ un chemin t.q. } o(\beta) = v_*, t(\beta) = u\}$$
*est une réunion disjointe.*
(2) *L'application $K_H \to K$ definie par $[\alpha]_H \to t(\alpha)$ est une application simplicial et un revêtement.*
(3) *Il y a une unique relevement $\tilde{\alpha}$ de $\alpha$ dans $K_H$ telle que $o(\tilde{\alpha}) = [1]_H = [(v_*, v_*)]_H$.*
(4) *Le relevement $\tilde{\alpha}$ est un lacet si et seulement si $[\alpha] \in H$.*
(5) *Si $K$ est connexe, $K_H$ l'est aussi.*

Démonstration: (i) Soit $e = (v_*, u)$; supposons que $u \neq v_*$. Alors il y a un 1–simplexe $\sigma = \{v_*, u\}$ qui porte $e$, et $p^{-1}(\sigma)$ est une réunion disjointe $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \ldots$ d'1–simplexes dans $\widetilde{K}$. Mais $p^{-1}(v_*)$ contient le sommet $\tilde{v}_*$, donc il existe un indice $j$ tel que $\tilde{\sigma}_j$ contient $\tilde{v}_*$, et $p|_{\tilde{\sigma}_j}\tilde{\sigma}_j \to \sigma$ est une bijection. On a alors que $\tilde{\sigma}_j = \{\tilde{v}_*, \tilde{u}\}$, où $p(\tilde{u}) = u$. Ceci est l'arête recherché.

Pour montrer qu'il est unique il suffit de remarquer que si $\tilde{\sigma}' = \{\tilde{v}_*, \tilde{u}'\}$ était un deuxième arête avec $p(\tilde{\sigma}') = \sigma$, alors $\tilde{\sigma}'$ et $\tilde{\sigma}$ ne sont pas disjoints.

(ii) Si $\alpha = e_1 e_2 \ldots e$, alors par la première partie $\tilde{e}_1$ et $t(\tilde{e}_1)$ sont bien définis. Donc il y a un unique relevement $\tilde{e}_2$ de $e_2$ avec $o(\tilde{e}_2) = t(\tilde{e}_1)$. Continuant, on a un unique relevement de $\alpha$. □

**Théorème 2.15.** *Pour chaque sous–groupe $H$ de $\pi(K, v_*)$, il existe un revetement $p : \pi(K_H, \tilde{v}_*) \to \pi(K, v_*)$ tel que $p_\sharp(\pi(\widetilde{K}, \tilde{v}_*))$.*

**Théorème 2.16.** *Le groupe fondamental d'un complexe connexe de dimension 1 est libre.*

**Corollaire 2.17.** (1) *Les sous–groupes d'un groupe libre sont libres.*
(2) *Le groupe libre de rang 2 contient un sousgroupe libre de rang infini.*

Démonstration: (i) Le revêtement d'un complexe de dimension 1 est de dimension 1; *cfr* la demonstration de Magnus, Karrass et Solitar, sections 2.3, 2.4.

(ii) Regardez le complexe figure 8, et le revetement qui est le droit $\mathbb{R}$ avec un lacet ajouté a chaque entier. □

**Proposition 2.18.** *Si $p : \widehat{K} \to K$ est un revêtement où le fibre au–dessus de un sommet de $K$ n'a qu'un nombre fini $k$ de composantes, alors $\chi(\widehat{K}) = k\chi(K)$.*

**Proposition 2.19.** *Si $H$ est un sousgroupe de rang $r_H$ dans le groupe libre $F$ de rang $r_F$, alors l'indice de $H$ dans $F$ satisfait*

$$[F : H] = \frac{r_H - 1}{r_F - 1} \ .$$

Démonstration: Soit $K$ un complexe fini de dimension 1 avec $\pi K = F$, et soit $K_H$ le revetement qui correspond à $H$.

Soit $v_*$ dans $K$ le sommet de base. Le fibre $p^{-1}(v_*)$ au–dessus de $v_*$ dans $K_H$ est de cardinalité $[F : H]$ par la construction de $K_H$. Ceci est vrai pour tout sommet de $K$. Donc si $S_F, C_F$ et $S_H, C_H$ sont les nombres de sommets et 1–simplexes dans $F$ et $H$ respectivement, alors $S_H = gS_H$.

En plus, au–dessus de chaque arête de $K$, à chaque sommet de $K_H$, il y a un arête de $K_H$. Donc $C_H = gC_F$. Mais $r_F = C_F - S_F + 1$, et

$$r_H = C_H - S_H + 1 = gC_F - gS_F + 1 \text{ et } r_H - 1 = g(r_F - 1) \ .$$

On a redemontré que la caractéristique de Euler d'un rêvetement est un multiple de la caractéristique de la base.

□

Exercice: Si $1 < A < B$ sont sous–groupes de $G = \pi_1(K, x_0)$, alors pour $\tilde{K}$, le revêtement universal de $K$, on a

$$
\begin{array}{ccc}
\tilde{K} & & \\
 & \searrow & \\
 & & K_A \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & & K_B \\
 & \swarrow & \\
K & &
\end{array}
$$

## 3. Transformations de Tietze

On peut changer une présentations sans changer le groupe (à isomorphisme près). Ici nous montrerons qu'il y a quatre changements qui engendrent toutes les presentations d'un groupe.

**Théorème 3.1.** *Soit $X$ un ensemble de lettres, $R$ un ensemble de mots dans $F(X)$, $y$ un symbole qui n'est pas dans $X$, et $w(X)$ un mot reduit de $F(X)$*

(1) *Les groupes presentés par $< X, y; R, y = w(x) >$ et $< X; R >$ sont isomorphes.*
(2) *Si $S \subset gp_{F(X)}R$ alors $< X; R >$ et $< X; R, S >$ sont isomorphes.*

Notons que dans conditions au–dessus, l'ensemble $S$ est dit un ensemble des *consequences* de $R$.

Démonstration: Les demonstrations sont claires: soit $G$ le groupe présenté par $< X; R >$. Soit $\phi : F(X) \to G$ l'homomorphisme donné par la présentation.

Le groupe libre $F(X, y)$ sur $X \cup \{y\}$ est engendré librement par $X \cup \{yw(X)^{-1}\}$ (excercice). Donc il y a un unique homomorphisme $\phi' : F(X, y) \to G$ tel que $\phi'(x) = \phi(x)$ et $\phi'(yw(X)^{-1}) = 1$.

L'homomorphisme $\phi' : F(X, y) \to G$ se factorise comme $F(X, y) \xrightarrow{\chi} F(X) \xrightarrow{\phi} G$, où $\chi(x) = x, x \in X$ et $\chi(y) = w(X)$. Alors

$$\begin{aligned}\ker\phi' &= \chi^{-1}(\phi^{-1}(1)) = \chi^{-1}(gp_{F(X)}(R)) \\ &= gp_{F(X,y)}(R \cup \{yw(X)^{-1}\})\end{aligned}$$

et la demonstration est finie. □

L'interêt de ces changements est:

**Théorème 3.2.** ( Tietze)
*Si $\mathcal{P}_1 =< X; R >$ et $\mathcal{P}_2 =< Y; S >$ sont des présentations finies qui présentent deux groupes isomorphes, alors il existe une suite finie de changements de Tietze qui transforme la première en la deuxième.*

Démonstration: Soit $\phi : F(X) \to G$ et $\psi : F(Y) \to G$ les homomorphismes associés aux présentations. Alors il y a des mots $u_j(X)$ tels que $\phi(u_j(X)) = \psi(y_j)$ et des mots $v_k(Y)$ tels que $\psi(v_k(Y)) = \phi(x_k)$.

Alors il y a une serie de changements de Tietze

$$< X; R > \to < X, y_1; R, u_1(X) = y_1 > \cdots < X, Y; R, u_1(X) = y_1, \ldots, u_n(X) = y_n > \ .$$

A la fin, l'homomorphisme associé à la dernière présentation est induit par l'application $\phi$ sur $X$ et $\psi$ sur $Y$.

Il faut remarquer que chaque relation de $S$, écrite $s_p(Y)$ est une conséquence de $R$ et les relations $y_j = u(X)$. Alors, par une suite de changements de Tietze, on arrive à la présentation

$$< X, Y; R, S, u_1(X) = y_1, \ldots, u_n(X) = y_n > \ .$$

Mais le fait que chaque $\phi(x_k)$ peut être écrit en termes des mots $\psi(v_k(Y))$ dans les générateurs $Y$ implique que on a aussi des conséquences $x_k = v_k(Y)$. On arrive a la présentation

$$< X, Y; R, S, \{u_j(X) = y_j\}, \{v_k(Y) = x_k\} > \ .$$

Par symètrie, on a aussi que la présentation $\mathcal{P}_2$ peut aussi être changée en cette présentation. $\square$

On a parlé déjà du problème des mots: on répète (en changeant un peu peut être)la définition:

**Définition 3.3.** *Soit $\mathcal{P} =< X; R >$ une présentation finie d'un groupe $G$.*

*On dit que le problème des mots est résoluble pour $\mathcal{P}$ si les ensembles :*

$$Id = \{w \in F(X) \ t.q. \ \phi(w) = 1\}$$
$$et$$
$$NonId = \{w \in F(X) \ t.q. \ \phi(w) \neq 1\}$$

*sont récursivement denombrable.*

**Corollaire 3.4.** *Si le problème des mots est résoluble dans une une présentation finie du groupe $G$, il est résoluble dans toute présentation finie de $G$.*

On peut donc parler de la solubilité du problème des mots pour un groupe de présentation finie.

B.H. Neumann a observé que les groupes a présentation inifnie existe. Pour voir ceci, il nous faut deux lemmes:

**Lemme 3.5.** *Si le groupe $G$ a une présentation finie $< X; R >$ et une autre présentation avec les mêmes générateurs $X$ mais un ensemble infini de relations $S = \{s_1, s_2, \ldots, \}$ alors il existe un entier $n$ tel que $< X; s_1, \ldots, s_n >$ est une présentation de $G$.*

Démonstration: L'important est de noter que $gp_{F(X)}(R) = gp_{F(X)}(s_1, \ldots, s_n)$ car chaque élément de $R$ est un produit des conjugués d'un nombre fini d'éléments de $S$. $\square$

Suivant le livre de G. Baumslag, pour un sougroupe distingué $N \triangleleft G$ on définit $d_G(N) = min\{|X| \mid gp_G(X) = N\}$. et on note que:

**Lemme 3.6.** *Soit $G$ une groupe de présentation finie, et $H$ un groupe de type fini.*

*Si $G$ est isomorphe à $H/N$, alors $d_g(N) < \infty$.*

**Corollaire 3.7.** *Soit $H$ un groupe de type fini tel que son centre $Z(H)$ n'est pas de type fini.*

*Alors $G = H/Z(H)$ est un groupe sans présentation finie.*

exemple: Soit $H$ le sousgroupe de GL(3,$\mathbb{R}$), engendré par deux éléments :

$$H = gp\big(a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\big)$$

Demontrer qu'un élément qui est central dans $H$ a la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Regardant les éléments $a^r b a^{-r} b a^r b^{-1} a^{-r} b^{-1}$, déduire que $Z(H)$ est de type infini.

Il en suit que $H/Z(H)$ n'a aucune présentation finie.

## 4. Graphe de Cayley

**Définition 4.1.** *Soit $G$ un groupe et $X$ une partie génératrice (il y a un homomorphisme surjectif unique $\phi : F(X) \to G$.) Le graphe de Cayley de $G$ par rapport à $X$ (ou engendré par $X$), écrit $\Gamma_X(G)$ comporte:*
*un sommet $g$ pour chaque élément $g \in G$;*
*pour chaque $x \in X$ et chaque $g \in G$, il y a une arête orientée avec étiquette $x$, avec sommet initial (le sommet) $g$ et avec sommet terminal $g\phi(x)$.*

Exemples:
o) Le groupe cylique $Z_5 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ engeneré par la classe [1] a son graphe en forme de circle.
i) Le groupe (additive) $\mathbb{Z}$ engeneradé par l'élément 1 a comme graphe de Cayley la droite $\mathbb{R}$ composé d'un sommet pour chaque élément de $\mathbb{Z}$ et une arête de $n$ à $n+1$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.
ii) Prennant comme partie génératrice les éléments $3, 5$ le graphe est plus compliqué.
iii) Le groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ engendré par $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$ donne le graphe standard comme reseau dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, avce les arêtes horizantales etitquetés $x$ orientées vers la droite, et les arétes verticales étiquetés $y$ et orientées vers le haut.
iv) Soit $S_g$ la surface orientée de genre $g > 1$, avec groupe fondamental

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \mid \prod_{i=1}^{i=g} [a_i, b_i] \rangle \ .$$

Alors le graphe de Cayley $\Gamma_X(G)$ se plonge naturellement dans le plan hyperbolique. Soit $\Delta_g$ un polygone convexe de $4g$ cotés, avec angle $2\pi/2g$ aux coins. Le groupe engendré par las reflexiones dans les cotés de ce polygone contient $\pi_1(S_g)$ comme sousgroupe d'indice 2.

Exercice: Entendre cet exemple.

Etant donné un generateur $x$ dans $X$, et un sommet $g \in G$, il y a une arête, et une seule, avec origine $g$ et étiquette $x$. Il y a aussi une unique arête étiqueté $x$ et avec $g$ comme sommet final. On peut le considérer comme une arête avec origine $g$ étiqueté $x^{-1}$. Avec cette convention, pour chaque mot $w \in F(X)$, et chaque sommet $g \in G$, il y a un unique chemin dans $\Gamma_X(G)$ avec origine $g$ et étiquette $w$ (noter que $w$ peut très bien être un mot non–réduit).

Si $G$ est fini, $\Gamma_X(G)$ est de diamètre fini.

**Lemme 4.2.** *Le graphe de Cayley $\Gamma_X(G)$ est connexe par arcs si $X$ engendre et est locallement–fini si $X$ est fini.*

Un graphe, qui n'est qu'un complexe simplicial de dimension 1, a naturellement associé un espace topologique, identifiant chaque arête à intervalle $[0, 1]$, et identifiant les sommets initiaux et finaux 0 y 1 de l'intervalle, avec la topologie, on obtient un espace topologique. Cette réalisation topologique du graphe devient un espace métrique en assignant lingueur 1 à chaque arête, et avec distance entre deux points comme l'infinimum des longueurs des chemins entre les points. Noter que en gńérale il y plusieurs géodesiques entre chaque paire de points.

**Proposition 4.3.** *Le groupe $G$ agit sur $\Gamma_X(G)$ à gauche, par isométries, librement, transitivement sur les sommets.*

Plus spécifiquement, si on note le sommet correspondant à l'élément $g \in G$ par $s(g)$.

Pour décrire l'action, écrire $g \circ s(g') = s(gg')$.

Pour avoir une action sur $\Gamma_X(G)$ notons que l'arête $e$ entre $g'$ et $g'x$ s'envoit naturallement à l'arête entre $gg'$ et $(gg')x$.

Si $G$ est libre avec base $X$, alors $\Gamma_X(G)$ est un arbre regulier d'ordre $2 \mid X \mid$.

### Changement de partie génératrice finie

Soient $S, T$ deux parties génératrices finies pour $G$, $S = \{s_1, \dots, s_m\}$, $T = \{t_1, \dots, t_n\}$.

Pour chaque $i = 1, \dots, m$, il y a $w_i(t_1, \dots, t_n) = s_i$ dans $G$, et pour chaque $j = 1, \dots, n$, il y a $v_j(s_1, \dots, s_m)$.

Soient $g \in G$ t.q. $g = s_{i_1} \dots s_{i_p}$ avec $s_{i_j} \in S$, alors $g = w_{i_1}(t_1, \dots, t_n) w_{i_2}(t_1, \dots, t_n) \dots w_{i_p}(t_1, \dots, t_n)$.

Si $k = \max \ell_T(w_{i_j}(t_1, \dots, t_n))$ alors $\ell_T(g) \leq k\ell_S(g)$, et si $k' = \max \ell_S(v_{i_j}(s_1, \dots, s_n))$ alors $\ell_S(g) \leq k'\ell_T(g)$.

Donc

$$\frac{\ell_T(g)}{k} \leq \ell_S(g) \leq k'\ell_T(g)$$

et on a presque demontré qu'un changement de partie génératrice est une quasi–isométrie. Il suffit de remarquer que les points sur les arêtes sont a distance au plus 1 d'un sommet, et il faut ajouter une constante 1, pour finir la démonstration de:

**Proposition 4.4.** *Soient $S, T$ deux parties génératrices finies pour le groupe $G$. L'identité sur les sommets induit une quasi-isométrie entre $\Gamma_S(G)$ et $\Gamma_T(G)$.*

**Définition 4.5.** *Soit $X$ un espace métrique, $G$ un groupe agissant sur $X$.*

*On dit que l'action est* *propre* *si pour tout $x \in X$, et pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, on a $\{g \in G \mid B_r(x) \cap g \cdot B_r(x) \neq \emptyset\}$ est fini.*

*Dans ce cas on a un métrique induit sur $G/X$: $d(G \cdot x, G \cdot y) = d(x, G \cdot y)$, et la projection $p : X \to X/G$ est continue.*

**Proposition 4.6.** *Soient $\widetilde{Y}$ un espace metrique, localement connexe par arcs, simplement connexe, $G$ un groupe agissant sur $\widetilde{Y}$ par isometries, librement et proprement, et $y \in \widehat{Y}$.*
*Alors $p : \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}/G$ est un revêtement universel, et $G \cong \pi_1(\widetilde{Y}/G, \hat{y})$.*

Exemples: $\mathbb{Z}^n$ agit sur $\mathbb{E}^n$

**Lemme 4.7.** *Soit $X$ espace métrique, connexe, localement connexe par arcs, $x_0 \in X$. Si $G$ agit sur $X$ de façon propre et co–compacte par isométries, alors $G$ est de type fini.*

Démonstration: $X$ est connexe par arcs.
Prendre $R > 0$ tel que $B_{R/3}$ et ses translatés par $G$ couvre $X$ (c'est à dire, $X = \cup_{g \in G}\, g \cdot B_{R/3}(x)$).

Soit $A \subset G$ défini par $A = \{a \mid B_R(x_0) \cap a \cdot B_R(x_0) \neq \emptyset\}$; cet ensemble est fini, car l'action est propre.

On va montrer que $A$ est une partie génératrice pour $G$.

Soit $c : [0,1] \to X$ un chemin entre $x_0$ et $g \cdot x_0$.

Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = 1$ tels que $d(c(t_i), c(t_{i+1}) < R/3$.

Par choix de $R$, il existe $1 = g_0, g_1, \ldots, g_k = g$ tels que $d(c(t_i), g_i \cdot x_0) < R/3$. On a alors $d(g_i \cdot x_0, g_{i+1}(x_0)) < R$, et il existe $b_i \in A$ tels que $g_i \cdot b_i \cdot x_0 = g_{i+1} \cdot x_0$ — $b_i = {g_i}^{-1} g_{i+1}$.

On voit bien que $g = b_0 b_1 \ldots b_k$.

□

**Définition 4.8.** *On dit que l'espace métrique $X$ est un espace geodesique si pour tout $x, y \in X$, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ et $\ell(\gamma) = d(x,y)$ où $\ell(\gamma) = \sup \sum d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1}))$, sur toutes les partitions $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$ de l'intervalle $[0,1]$.*

Exemples: Une variété riemannienne et un graphe locallement fini. Milnor a utilisé cette idée dans le contexte de variétés pour voir que le graphe de Cayley modelise beaucoup de la géométrie de la variété.

**Lemme 4.9.** Lemme de Svarc–Milnor
*Si $X$ est un espace geodesique, et $G$ est un groupe qui y agit de façon proprement et par isometries, alors il existe une partie génératrice finie $A$ pour $G$ et l'application $\Gamma_A(G) \to X$, $g \to g \cdot x_0$ est une quasi–isométrie.*

Démonstration: Dans la démostration du lemme precedent, on peut supposer que la longueur du chemin $c$ est au plus $d(x_0, g \cdot x_0) + 1$, alors $k < d_X(x_0, g \cdot x_0) + 1)\frac{3}{R} + 1$

Donc, $d_A(1, g) < d_X(x_0, g \cdot x_0) + 1)\frac{3}{R} + 1$.

Si $g = a_1 a_2 \ldots a_k$ avec $k$ minimal, c'est à dire $k = d_A(1, g)$, alors

$$d_X(x_0, a_1 a_2 \ldots a_n \cdot x_0) \leq d(x_0, a_1 \cdot x_0) + d(a_1 \cdots x_0, a_1 a_2 \cdot x_0) \ldots d_X(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \cdot x_0, a_1 a_2 \ldots a_n \cdot x_0)$$

et posant $C = \max_{a \in A} d_X(x_0, a \cdot x_0)$, on a $d_X(x_0, g \cdot x_0) \leq C.d_A(1, g)$.

On a établi alors que
$$d_X(x_0, g\cdot x_0)\frac{1}{C} \leq d_A(1,g) \leq d_X(x_0, g\cdot x_0)+1)\frac{3}{R}+1\ .$$
□

Si l'on a un point qui a une orbite où l'action est libre, alors on peut prendre cette orbite comme les sommets d'un graphe de Cayley pour le groupe.

Le travail de Milnor:

Croissance: Soit $V$ une variété riemannienne, $\widetilde{V}$ son revêtement universelle. Décrire la function $f(n) = vol(B_n)$ (on regarde volume dans $\widetilde{V}$) est–elle polynomial en $n$? exponentielle en $n$? La quasi–isométrie permet d'étudier la croissance du groupe.

Rappel: pour tout sousgroupe $K$ de $\pi_1(X, x_0)$, il existe un revêtement $p : \widetilde{X}_K \to X$ tel que $p_*(\pi_1(\widetilde{X}_K, \tilde{x})) = K$ pour un bon choix de $\tilde{x}$.

Si de plus $K$ est distingué, $\frac{\pi_1(X)}{K}$ opère sur $\widetilde{X}_K$.

Une fois qu'on a $F_n$ comme le $\pi_1$ d'un bouquet de $n$ cercles avec un point commun, on voit les autres groupes libres comme sous–groupes:

Démonstration: Les revetements existent pour tout sousgroupe quand l'espace $X$ est assez gentil.

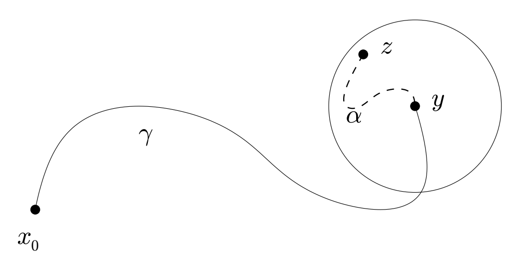
Considérer pour chaque $y \in X$ l'ensemble des chemins $\gamma : ([0,1], 0, 1) \to (X, x_0, y)$, et leurs classes d'homotopie relative aux bouts: c'est à dire $\gamma \equiv_K \gamma'$ s'il existe

$H : [0,1] \times [0,1] \to X$ t.q.:
- $H(t,0) = \gamma(t) \quad H(t,1) = \gamma'(t)$ pour tout $t$;
- $H(0,s) = x_0 \quad H(1,s) = y$ pour tout $s$;
- $[\gamma \cdot \gamma'] \in K$ comme lacet dans $\pi_1(X, x_0)$.

Poser $\tilde{X}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des chemins.

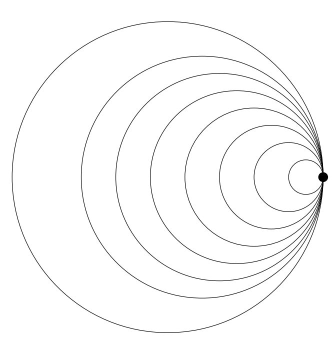
Il y a une application naturelle $p : \tilde{X} \to X$, $p([\gamma]) = p(1)$.

Il y a aussi une topologie: on veut relever les petits voisinages: soit $U$ un voisinage de $y$ qui est conexe par arcs, donc pour tout $z \in U$ on a un arc $\alpha$ dans $U$ de $y$ à $z$, de telle faḉn qu'on a $\gamma \cdot \alpha$ comme chemin de $x_0$ jusqu'à $z$.




Pour l'unicité, il faut que la classe de homotopie de $\alpha$ (rel bouts) est unique. Donc la condition de **semi-localement simplement connexe**: pour tout ouvert $V$ et tout $y \in V$, il existe un ouvert $U$ t.q. $y \in U \subset V$ et tout lacet dans $U$ est null-homotope dans $X$. Noter qu'on n'a pas besoin que la null-homotopie soit dans $U$.... la class d'équivalence de de $\gamma \cdot \alpha$ est caculé dans $X$ après tout.

Le boucle d'oreille de Hawaii n'est pas semi loc simp conn.

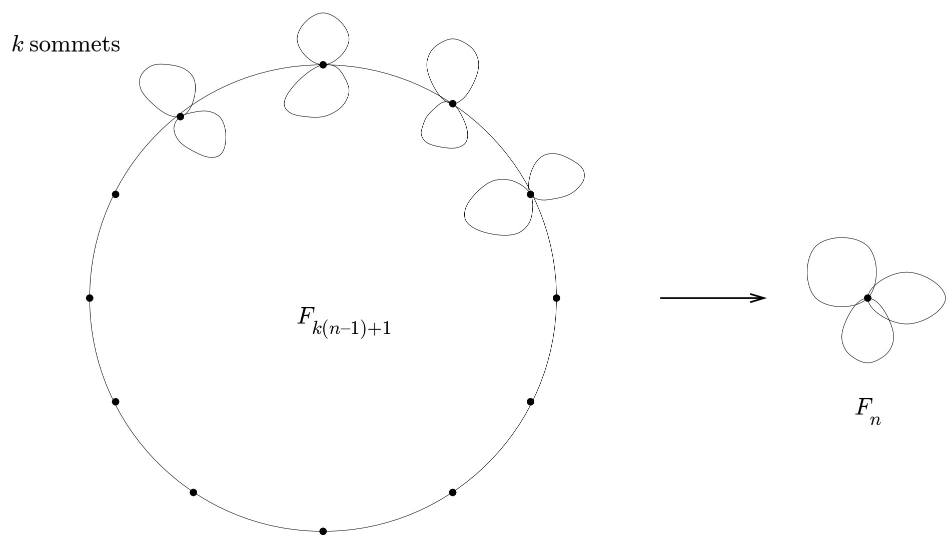


Donc topologie sur $\tilde{X}$ : comme base de la topologie prendre tout les ouverts qui sont simplement connexe dans $X$.

On voit que de tels voisinages se relevent par homeomorphisme, et on a un revêtement.

Pour le detalle, le chemin $\gamma$ se releve par $\gamma(t) \to \tilde{\gamma}(t) = [\gamma_t : [0,1] \to s \to \gamma(st)]$. On voit que, quand $\gamma$ est un lacet, $\tilde{\gamma}$ est un lacet si et seulement si dans $\pi_1(X, x_0)$, la classe de homotopie de $\gamma$ est dans $K$

□




Euler–Poincaré dit : $\chi(X) = 1 - n$ et $\chi(\widehat{X}_K) = k - kn = k\chi(X)$.

**Proposition 4.10.** *Soit $F$ un groupe libre de type fini. Un sous–groupe $N$ distingué est d'indice finie si et seulement si $N$ est de type fini.*

Démonstration: Si $N$ est d'indice finie, alors il est de type fini....on peut aussi voir que le revêtement associé est un revêtement fini, donc un graphe fini, dont le groupe fondamental est visiblement de type fini.

Maintenant supposons que $N$ est de type fini, et soit $v$ un sommet du graphe du revêtement $\widetilde{X}_N$. S'il n'y a pas $2n$ débuts d'arêtes au sommet $v$, alors soit ${x_i}^\epsilon$ une qui manque. Soit $w$ un mot qui est l'etiquette d'un lacet qui commence à $v$ — qui ne commence pas ${x_i}^\epsilon$ et ne finit pas ${x_i}^{-\epsilon}$. Soit $\gamma$ un mot sur un chemin du point de base jusqu'au sommet $v$.

Alors $\gamma w \gamma^{-1} \in N$, et comme $N$ est distingué, $\gamma {x_i}^\epsilon \gamma^{-1}(\gamma w \gamma^{-1})\gamma {x_i}^{-\epsilon}\gamma^{-1} \in N$, et donc $\gamma {x_i}^\epsilon w {x_i}^{-\epsilon}\gamma^{-1} \in N$, contredisant le fait qu'il n'y a pas d'arête ${x_i}^\epsilon$ à $v$. □

**Théorème 4.11.** Marshall Hall

*Soit $F$ un groupe libre, $w \in F$.*

*Il existe un sous–groupe $F'$ d'indice finie dans $F$ tel que $w$ est un générateur libre de $F'$.*

Démonstration: Suivant une idée de Stallings : re–numerotez les indices, t.q. $F = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle * \langle x_{n+1}, \ldots\rangle$ t.q. $w \in \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$. Il suffit alors de montrer le théorème pour les groupes libres de type fini.

Faisant un exemple : $w = aba^2b^{-1}a^3 \in \langle a, b\rangle$

Ecrire le mot $w$ sur un graphe en forme de cercle, et ensuite ajouter des arêtes pour obtenir un graphe regulier qui est un revêtement du graphe du bouquet de $n$ cercles. Le mot $w$ peut alors etre inclus dans une base pour le groupe fondamental.

□

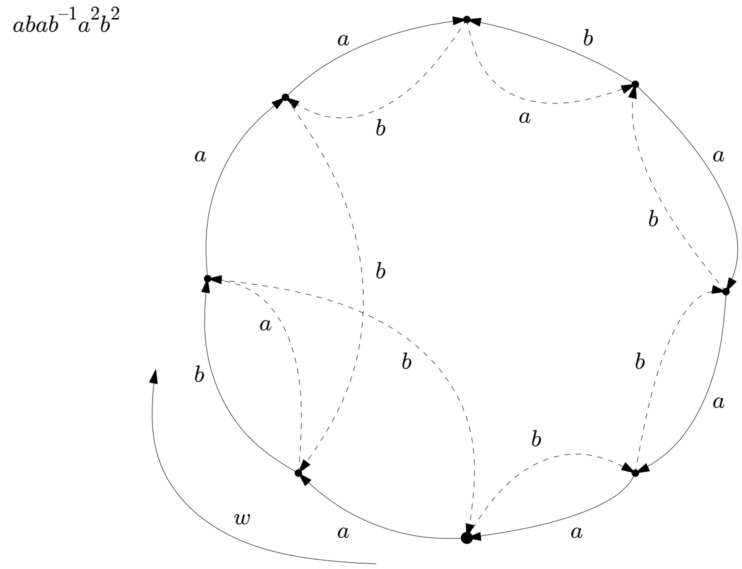



FIGURE 1. Completer le graphe pour le rendre regulier et donc un revêtement

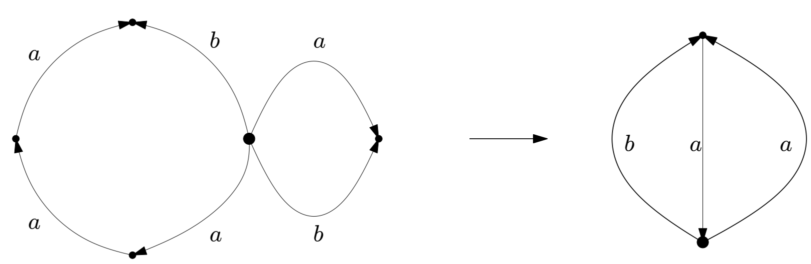
En fait Stallings décrit une méthode pour trouver une base pour un sous–groupe de type fini d'un groupe libre.

Soit $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subset F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, et considérer le sous–groupe $\langle B \rangle$ engendré par $B$. On a dit que ce sous–groupe est libre: comment trouver une base? Nielsen a demontré qu'un algorithme existe pour trouver une base.

La version de Stallings:

exemple: $\{ab^{-1}, a^3b^{-1}\}$ (on pourrait aussi ajouter l'élément $abab$ par exemple.

Ecrire les mots sur des cercles qui ont un sommet en commun. Quand deux arêtes sort d'un même sommet avec même ettiquete, on identifie les arêtes, et les sommets terminaux. Même chose pour les arêtes qui entre dans un même sommet avec même etiquette. Continuer à faire ceci jusquà ce qu'il est impossible.




On finit avec un graphe fini, dont le groupe fondamental, avec les etiquettes, est $\langle B \rangle$. Donc il suffit de prendre un arbre maximal dans le graphe et on obtient une base pour $\langle B \rangle$.

On peut aussi completer ce graphe à un graphe regulier comme avant pour montrer que $F$ contient un sous–groupe $F'$ fini de la forme $F' = \langle B \rangle * U$.

On peut aussi trouver un graphe pour trouver une base pour $\langle B \rangle \cap \langle B' \rangle$.

## 5. Les groupes hyperboliques

**Définition 5.1.** *Soit $G$ un groupe et $X$ un ensmble de generateurs de $G$ (il y a un homomorphisme surjective unique $\phi : F(X) \to G$.) Le graphe de Cayley de $G$ par rapport à $X$ , denoté $\Gamma_X(G)$ a*

*un sommet $g$ pour chaque élément $g \in G$;*

*pour chaque $x \in X$ et chaque $g \in G$, il y a une arête orientée et etiquetée $x$, d'origine (le sommet) $g$ et terminale $g\phi(x)$.*

exemple:
i) Le groupe (additif) $\mathbb{Z}$ engendré par 1 donne comme graphe de Cayley le droite $\mathbb{R}$ composé d'un sommet pour chaque élément de $\mathbb{Z}$ et un arête de $n$ à $n+1$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.
ii) Si on prends comme partie génératrice les éléments $3, 5$ le graphe est plus compliqué.
iii) Le groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ engendré par $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$ donne un graphe qu'on peut visualiser comme le reseau standard dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, avec les arêtes horizantales etiquetées $x$ et orientées vers le droite, et les arêtes verticales etiquetées $y$ et orientées vers le haut.
iv) Soit $S_g$ le surface orientable de genre $g > 1$, avec groupe fondamentale

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \mid \prod_{i=1}^{i=g} [a_i, b_i] \rangle \ .$$

Alors le graphe de Cayley $\Gamma_X(G)$ se plonge naturellement dans le plan hyperbolique. Soit $\Delta_g$ un polygone convexe de $4g$ côtés, avec angle $2\pi/2g$ aux coins. Le groupe engendré par les reflections dans les côtés de ce polygone contient $\pi_1(S_g)$ comme sousgroupe d'indice 2.

Exercice: Comprendre cet exemple.

Donné un générateur $x$ dans $X$, et un sommet $g \in G$, il y a une, et une seule, arête avec origine $g$, etiqueté $x$. Il y a aussi une, et une seule, arête avec etiquete $x$ avec $g$ comme sommet terminale. Cette dernière on peut la penser comme arête avec origine $g$, et etiquete $x^{-1}$. Avec cette convention, donné un mot $w \in F(X)$, et un sommet $g \in G$, il y a un, et un seul chemin dans $\Gamma_X(G)$ avec origine $g$, etiqueté $w$.

**Lemme 5.2.** *Le graphe de Cayley $\Gamma_X(G)$ est connexe par arcs.*

*Il est locallement–fini si $X$ est fini.*

**Définition 5.3.** *Le graphe de Cayley devient un espace métrique si on donne longeur 1 a chaque arête, et la distance entre deux somets $x, y$ est la longeur minimale d'un chemin qui les relient Un tel chemin s'appelle un géodésique, et on le note $[x, y]$. Attention: en générale il y a plus qu'un géodésique entre des paires des points.*

Le groupe $G$ agit sur $\Gamma_X(G)$:

pour essayer d'être claire, notons le sommet aqui correspond à l'élément $g \in G$ par $s(g)$ ('sommet de $g$).

Pour décrire l'action on définit

$g \circ s(g') = s(gg')$. Pour que ça soit une action sur $\Gamma_X(G)$ il faut noter que l'arête $e$ entre $g'$ et $g'x$ est envoyé naturellement à l'arête entre $gg'$ et $(gg')x$.

Exercice: Montrer que cette action est par isomètries.

**Définition 5.4.** *Trois arcs géodésique $[x, y]$, $[y, z]$ et $[x, z]$ forment un triangle géodésique.*

*Un triangle est géodésique si $\delta$–mince si chaque côté se trouve dans un $\delta$–voisinage des deux autres: c'est à dire:*

$[x, y] \subset N_\delta([y, z] \cup [x, z])$ $[y, z] \subset N_\delta([x, y] \cup [x, z])$ *et* $[x, z] \subset N_\delta([x, y] \cup [y, z])$, *où $N_r(Q)$ denote le $r$–voisinage du sousensemble $Q$.*

**Le graphe $\Gamma_X(G)$ est $\delta$–hyperbolique si tout triangle géodésique est $\delta$–mince.**

Quelques autre définitions qui sont équivalents: bigskip

**Définition 5.5.** *Soit $xyz$ un triangle géodésique. Soient $x' \in [y, z], y' \in [x, z], z' \in [x, y]$ des sommets. Le minsize du triangle est*

$$minsize(xyz) \;=\; inf\ diam\{x'\, y'\, ,\, z'\,\} = inf\ \max\{\ d(x', y'), d(y', z'), d(x', z')\}\ ,$$

*où on prend l'$inf$ sur tout triplet de points sur les trois côtés.*

*Si tout triangle géodésique est $\delta$–mince, alors tout triangle géodésique a $minsize \;\leq\; 2\delta$.*

Une autre definition passe par les applications sur les tripodes.

**Définition 5.6.** *Soit $xyz$ un triangle géodésique dans $\Gamma_X(G)$.*

*Soit $\Delta' = x'y'z'$ un triangle dans le plan euclidien dont les côtés ont les longeurs corresponent aux longeurs des côtés de $\Delta = xyz$. Soit $S$ le cercle inscrit de $\Delta'$. On ecrasant ce cercle, on obtient une application de $\Delta'$ sur un tripode, et composant avec l'application naturelle de $\Delta$ sur $\Delta'$, on obtient une application $t_\Delta$ de $\Delta$ sur son tripode.*

*Un triangle géodésique est $\delta$–fin si l'application sur les tripodes a des fibres de diamètre au plus $\delta$.*

Noter que si un triangle est $\delta$–fin, il est $\delta$–mince.

**Proposition 5.7.** *Dans un graphe où tous les triangles sont $\delta$–minces, ils sont aussi sont $4\delta$–fins.*

**Proposition 5.8.** *Un groupe hyperbolique a une présentation finie, et le problème des mots est résoluble.*

On peut mettre une 'foliation' sur un triangle géodésique.

**Corollaire 5.9.** *Il n'y a qu' un nombre fini de classes de conjugation d'éléments d'ordre finie.*

*Pour $a \in G$, il existe une constante $C_a$ telle que les géodésiques pour les puissances $a^i$ se trouvent dans une $C_a$ voisinage de l'ensemble des sommets $\{a^n\}$.*

**Proposition 5.10.** *Un groupe hyperbolique n'a pas de sousgroupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

**Définition 5.11.** *Soit $\langle X \mid R\rangle$ une présentation finie du groupe $G$. Soit $w \in F(X)$ un mot réduit tel que $\overline{w} =_G 1$, c'est à dire, $w \in gp_F(R)$. Il existe alors des mots $p_i \in F(X)$, et des éléments $r_i \in R$, et $\epsilon_i = \pm 1$ tels ques*

$$w = \prod_{i=1}^{N} p_i r_i^{\epsilon_i} p_i^{-1} \quad dans \quad F(X).$$

*S'il y a une constante $K$ telle que pour tout tel $w$, il y a un de ces produits avec $N < K\ell(w)$, on dit que $G$ satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire. En générale, s'il y a une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $N < f(\ell(w))$, on dit que $f$ est une application isopérimétrique pour la présentation.*

Le resultat étonnant de Gromov est:

**Théorème 5.12.** *Un groupe est hyperbolique si et seulement si il satisfait un inégalité isopérimétrique linéaire.*

Exercice difficile: un groupe hyperbolique a un algorithme de Dehn.

**Proposition 5.13.** *Dans un groupe hyperbolique le problème des mots est résoluble.*
*Dans un groupe hyperbolique le problème de conjugation est résoluble.*

**Définition 5.14.** Quasi–isométries et quasi–géodésiques
*Soient $\lambda > 1$ est $\epsilon \geq 0$ des constantes, et $X, Y$ des espaces métriques.*
*Une application $f : X \to Y$ est une $(\lambda, \epsilon)$–quasi–isométrie si pour tout paire de points $x, x' \in X$ on a*

$$\frac{1}{\lambda} d(f(x), f(x')) - \epsilon \leq d_X(x, x') \leq \lambda d_Y(f(x), f(x')) + \epsilon.$$

*S'il existe aussi une une constante $C$ telle que pour chaque $y \in Y$, il existe un sommet $x(y)$ de $Y$ tel que $d(f(x(y)), y) < C$ (si $f$ est 'presque surjective') alors on dit que $X$ et $Y$ sont quasi–isométriques.*
*Un chemin $\alpha : [a, b] \to \Gamma_S(G)$ est un $(\lambda, \epsilon)$–quasigeodesic such that for all points $t, t' \in [a, b]$*

$$\frac{1}{\lambda} d(\alpha(t), \alpha(t')) - \epsilon \leq |t - t'| \leq \lambda d(\alpha(t), \alpha(t')) + \epsilon.$$

Il est très important de noter qu'une quasi–isométrie peut très bien ne pas être continue:
<u>Exemple essentielle</u>: l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ où $f(r) = [r]$ (la partie entière) est une $(1, 1)$–quasi–isométrie. L'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est une $(1, 0)$–quasi–isométrie.

**Proposition 5.15.** *Si les ensembles finis $X$ et $Y$ sont des parties génératrices pour $G$, alors les graphes $\Gamma_X(G)$ et $\Gamma_Y(G)$ sont quasi–isométriques.*

**Proposition 5.16.** *Un quasi–géodésique est proche à tout géodésique reliant les points terminaux.*

**Théorème 5.17.** *Etre hyperbolique est indépendant de la présentation finie choisie.*

**Lemme 5.18.** *Supposons que $\Gamma_X(G)$ est $\delta$–hyperbolique.*
*Soit $g \in G$ minimal dans sa classe de conjugaison et de longeur au moins $2\delta + 1$.*
*Alors $\ell(g^n) > n$ et tout géodésique representant une puissance $g^n$ est contenu dans une $3\delta$–voisinage de l'ensemble $\{g^i \mid i > 0\}$.*

**Corollaire 5.19.** *Pour chaque $g \in G$, il existe une constante $k > 0$ tel que tout géodésique pour $g^i$ se trouve dans une $k$–voisinage de l'ensemble $\{g^i \mid i > 0\}$.*

**Corollaire 5.20.** *Soit $a \in G$ un élément d'ordre infini.*
*Si $b \in G$ commute avec $a$, alors il existe $p, q \geq 0$ avec $q \neq 0$ t.q. $a^p = b^q$.*

Soit $G$ un groupe uniformement $\delta$–hyperbolique.

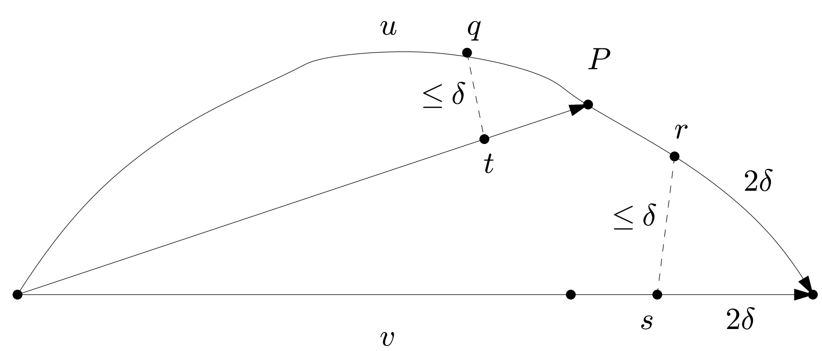
**Proposition 5.21.** *Un $4\delta$–géodésique local $u$ est à distance au plus $3\delta$ du géodésique $v$ correspondant.*

**Lemme 5.22.** *Si $r, s$ sont a distance $2\delta$ du fin de $u, v$, alors $d(r, s) \leq \delta$.*

Démonstration: Si les deux sont de longueur au plus $4\delta$, c'est vrai.

Supposant vrai pour tout $4\delta$ géodésique local $u$ t.q. $\ell(u) \leq N$.

Soit $u$ t.q. $N < \ell(u) < N + 4\delta$.

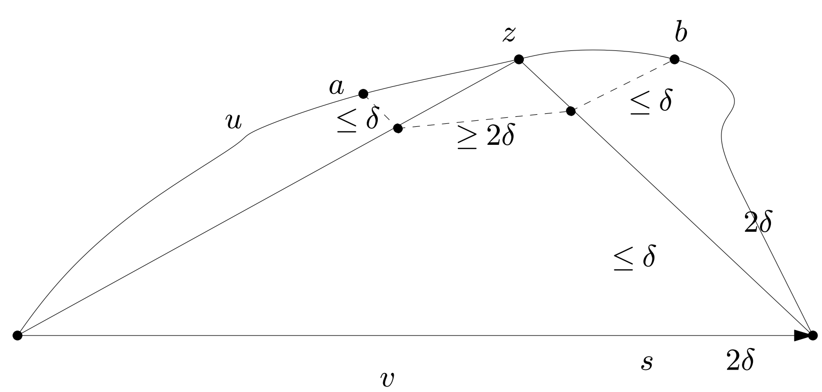



Soit $P$ le point sur $u$ a distance $4\delta$ de la fin: alors $d(P, r) = 2\delta$ et choisir $q$ sur $u$ a distance $2\delta$ avant $P$, $t$ le point sur le géodésique à $P$ à distance $2\delta$. Donc $d(t, q) \leq \delta$ [ar hypothese de recurrence. Dans le triangle géodésique, si $d(t, r) \leq \delta$ on a $d(q, r) \leq 2\delta$, contredisant la condition de $4\delta$ géodésique local. Donc $t$ est a distance $\leq \delta$ du géodésique $v$, et $d(r, s) \leq \delta$. □

Maintenant on montre la proposition:

Soit $z$ un point sur le géodésique local $u$ a distance plus que $2\delta$ des buts, et soient $a, b$ points sur $u$ a distance $2\delta$ de $u$, de chaque coté. Soient $v_1$ ( $v_2$) un géodésique entre 1 (resp. $\overline{v}$) et $z$.

Par le lemme, $a$ et $b$ sont à distance au plus $\delta$ des points $a', b'$ sur $v_1$ et $v_2$, à distance $2\delta$ de $z$. Si $d(a', b') \leq \delta$ alors $d(a, b) \leq 3\delta$, contre le fait que nous avons un $4\delta$ géodésique local. Donc $a'$ et $b'$ sont a distance au plus $\delta$ de $v$, et $z$ est à distance au plus $3\delta$ de $v$.




**Théorème 5.23.** *$G$ possède une presentation de Dehn: c'est à dire: soit $R$ l'ensemble de relations de longueur $\leq 8\delta$ dans les générateurs $X$. Si $w \in F(X)$ et $w = 1$ dans $G$, alors soit $w$ est le mot vide, soit il existe un relation $r \in R$, $r = r_1 r_2$ avec $\ell(r_1) < \ell(r_2) \leq 4\delta$, et $w = w_1 r_2 w_2$ comme mot réduit dans $F(X)$.*

Démonstration: Un mot $w$ non–trivial devient un mot $4\delta$ géodésique local quand on remplace les sousmots type $r_2$ par des sousmots de type $r_1^{-1}$. Un $4\delta$ géodésique qui sort de la boule de rayon $3\delta$ ne revient pas au point 1, et donc represente un élément non–trivial du groupe. □

**Proposition 5.24.** *Le langage des géodésiques est rationel.*

Démonstration:

$$\mathcal{A} = \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1} = \mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_q\}$$

avec $a_0 = e$.

Soit $B_k(1)$ la boule de rayon $k$ dans $\Gamma_X(G)$.

On trouve un automate qui n'accepte que les mots géodésiques:

L'ensemble d'états est la collection de tous les sous–ensembles de $B_k(1)$, ainsi qu'un état non–accepte $N$.

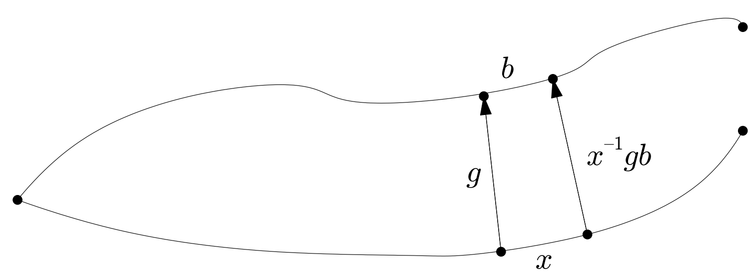
L'état initial est $\{1\}$.

Pour $x \in \mathcal{A}$, poser pour la fonction changement d'état:
$\tau(S, x) = N$ si $\overline{x} \in S$.

Sinon, poser $\tau(S, x) = \{\overline{x^{-1}ga} \mid g \in S, a \in \mathcal{A} \cup \{a_0\}\} \cap B_k(1)$. L'idée est que l'ensemble $S$ est l'ensemble de sommets du graphe de Cayley qui sont atteignable par un géodésique qui fini a coté du géodésique étudié.

Tous les états sont des états acceptant, sauf $N$, et l'élément neutre 1 est dans tous les états (sauf $N$).

Soit $L$ le langage de cet automate.




<u>Assertion 1</u> Aucun mot géodesique n'est rejeté
Soit $w = x_1 \ldots x_n$ un mot rejeté.

Soit $S_j$ l'état de l'automate après avoir lu les $j$ premiers lettres de $w$.

Supposer que $S_m \neq N = S_{m+1}$. Alors $x_{m+1} \in S_m$.

Mais ceci implique qu'on a $b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{A} \cup \{a_0\}$ tels que $\overline{x_m^{-1} \ldots x_1^{-1} b_1 \ldots b_m} = \overline{x}_{m+1}$. Donc $x_1 \ldots x_{m+1}$ **n'est pas** géodesique, et $w$ non plus.

<u>Assertion 2</u> Tout mot accepté est géodesique.

Montrons par récurrence.

Le mot vide est accepté, et tous les mots de longueur 1 (sauf si un générateur est égal à 1 dans $G$.

Hypothèse de récurrence: Pour tout mot accepé, tout segment initial de longueur $< n$ est géodésique.

Soit $w = vay \in L$ avec $\ell(v) = n - 1$ et $a \in \mathcal{A}$. Supposer que $va$ n'est pas géodésique.

Il existe alors $v' \in L$ tel que $\overline{va} = \overline{v'}$, et $\ell(v') < \ell(va) = n$. De plus, comme $v$ est geodesic, $\ell(v') = n - 1$ ou $\ell(v') = n - 2$. Comme $v$ et $v'$ sont uniformement $k$ proches, pour chaque $t$ on a $v(t)^{-1} v'(t) \in B_k(t)$.

Si $\ell(v') = \ell(v) = n-1$, alors $\overline{a}$ est dans l'état (le sous–ensemble de $B_k(1)$) atteint après avoir lu les $n-1$ premiers lettres de $v$, et donc le mot $w$ n'est pas accepté.

Si $\ell(v') = n-2$, alors $v \in B_k(1)$, et $g = v_{n-2}^{-1} v'_{n-2} \in B_k(1)$. et $g \in S_{n-2}$, l'état de l'automate après avoir lu les premiers $n-2$ lettres de $v$. Soit $b$ le dernier lettre de $v$: donc $g = v_{n-2}^{-1} v'_{n-2} = ba(a^{-1}v^{-1}v') = ba$. Comme l'automate accepte le mot $va$, $\overline{b^{-1}ga^{-1}} = 1$ est dans l'état suivant $S_{n-1}$. Donc $\overline{b^{-1}ga_0} = \overline{a}$ est aussi dans l'état $S_{n-1}$, et $w$ n'est pas accepté.

□

**Théorème 5.25.** *Dans un groupe hyperbolique le problème de conjugaison est résoluble.*

**Définition 5.26.** *Soit $\langle X \mid R\rangle$ une présentation finie. Soit $R^C$ est fermé pour les inverses et les conjugées cycliques (c'est à dire, $r \in R$, alors $r^{-1} \in R^C$ et $r^{\pm 1} = uv \implies vu \in R^C$).*
*Un mot $p \in F(X)$ est un* **morceau** *si $\exists r_1, r_2 \in R^C$, $r_1 \neq r_2$ dans $F(X)$, et $r_1 = p{r_1}', r_2 = p{r_2}'$ (comme des mots réduits dans $F(X)$).*
*On dit que la présentation satisfait la condition (de petite simplification) $C(\frac{1}{n})$ si pour tout morceau $p$ et toute relation $r$ qui commence avec le mot $p$, on a $\ell_X(p) < \ell_X(r)/n$.*

Exemple : Dans $\langle a, b \mid a^4, b^5\rangle$ il n'y pas de morceau.
Dans $\langle a, b \mid aba^2b^3a^4b^5\rangle$, $a$, $ab$, $aba$, $a^2b^3$ sont exemples de morceaux.
Groupes des surfaces:
$\langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}\rangle$ les uniques morceaux sont les lettres et leurs inverses.
$\langle a, b, c, d, e, f \mid [a, b][c, d][e, f]\rangle$ égale.

Noter que $C(\frac{1}{n}) \implies C(\frac{1}{n-1})$ pour tout $n > 1$.

**Proposition 5.27.** *Sea $\langle X \mid R\rangle$ une présentation finie qui satisfait la condition $C(\frac{1}{6})$. Alors la presentation $\langle X \mid R^C\rangle$ est une présentation de Dehn — c'est à dire, tout mot non–vide qui est égal à 1 dans le groupe contient plus que la moitié d'une relation.*

*Le groupe présenté est alors hyperbolique.*

## References

[1] B. Baumslag et B. Chandler, "Theorie des Groupes", Schaum.
[2] G. Baumslag, "Topics in Combinatorial Group Theory" Birkhauser, 1993.
[3] Collins et H. Zieschang, dans Encyclopedia of Mathematical Science, vol 58, "Algèbre", Russia.
[4] M. Coornaert, T. Delzant, et A. Papadopoulos, "Géométrie et Théorie des groupes", Lecture Notes in Mathematics #1441, Springer–Verlag.
[5] E. Ghys and P. de la Harpe, editors, "Sur les groupes hyperboliques d'aprés Mikhael Gromov" Birkhauser, 1990.
[6] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in "Essays on group theory", MSRI Publications No. 8, edited by S. Gersten, Springer-Verlag, 1987
[7] J. G. Hocking et G. S. Young "Topology", Dover,1988.
[8] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, "Combinatorial Group Theory" Springer-Verlag, Berlin-Heidleberg-New York,1977.
[9] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, "Combinatorial Group Theory", Wiley, New York, 1966 (réédité par Dover).
[rotman] Rotman, "Introduction to the Theory of Groups", Allyn/Bacon.