

Chapter 7

Produits d'espaces mesurés

7.1 Motivation

Au chapitre 1, on a introduit la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de \mathbb{R} (notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), ce qui nous a permis d'exprimer la notion de longueur d'une partie (borélienne) de \mathbb{R} . On peut se poser la question de savoir s'il existe une mesure sur une tribu convenable de \mathbb{R}^2 qui exprimerait la notion de surface (et une mesure sur une tribu convenable de \mathbb{R}^3 qui exprimerait la notion de volume...).

La question est donc : existe-t-il une mesure λ_2 sur une tribu de \mathbb{R}^2 contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) ? \quad (7.1)$$

La tribu T_2 , sur laquelle on veut définir λ_2 , doit donc contenir $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{A \times B, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ n'est pas une tribu. En effet, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par passage au complémentaire ni par union (par contre, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par intersection dénombrable). On définit alors T_2 comme la tribu engendrée par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, qu'on note $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On cherche alors une mesure $\lambda_2 : T_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On peut montrer l'existence et l'unicité de la mesure λ_2 (voir le théorème 7.1). On peut aussi montrer que la tribu T_2 est la tribu borélienne sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de \mathbb{R}^2 (voir la proposition 7.1).

Une autre question qu'on abordera dans ce chapitre concerne l'intégration des fonctions à plusieurs variables. Considérons par exemple une fonction f définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Sous quelles hypothèses (faciles à vérifier...) peut-on écrire :

$$\int \left(\int f(x, y) dy \right) dx = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy ? \quad (7.2)$$

Une réponse à cette question est apportée par le théorème de Fubini, que nous verrons dans ce chapitre.

On introduira aussi le produit de convolution de deux fonctions, qui sera utile, par exemple, pour démontrer des théorèmes de densité. Mais la convolution est une notion utile pour beaucoup d'autres raisons (elle est utile, par exemple, en théorie du signal).

7.2 Mesure produit

On rappelle ici qu'un espace mesuré (E, T, m) est σ -fini (on dit aussi que m est σ -finie) si il existe une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ t.q. $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $m(A_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est σ -fini (prendre, par exemple, $A_n = [-n, n]$). Il existe, par contre, des mesures non finies. L'exemple le plus simple sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ consiste à prendre $m(A) = \infty$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A \neq \emptyset$. Un exemple plus intéressant (intervenant pour certains problèmes) consiste à se donner un borélien non vide B de \mathbb{R} (B peut être, par exemple, réduit à un point) et à définir m_B par $m_B(A) = \infty$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B \neq \emptyset$ et $m_B(A) = 0$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B = \emptyset$.

Définition 7.1 (Tribu produit) Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) des espaces mesurables. On pose $E = E_1 \times E_2$. On appelle *tribu produit* la tribu sur E engendrée par $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2, A_1 \in T_1, A_2 \in T_2\}$. Cette tribu produit est notée $T_1 \otimes T_2$.

Un exemple fondamental est $(E_1, T_1) = (E_2, T_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On va montrer que, dans ce cas, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 7.1 (Tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)

Pour tout $N \geq 2$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

DÉMONSTRATION : La démonstration est faite pour $N = 2$ dans l'exercice 2.6 (corrigé 14). Elle s'adapte facilement pour traiter aussi le cas $N > 2$ (exercice 7.1). ■

Théorème 7.1 (Mesure produit)

Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) deux espaces mesurés σ -finis, $E = E_1 \times E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Alors, il existe une et une seule mesure m sur T vérifiant :

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2) \text{ pour tout } A_1 \in T_1, \text{ et } A_2 \in T_2 \text{ t.q. } m_1(A_1) < \infty \text{ et } m_2(A_2) < \infty. \quad (7.3)$$

Cette mesure est notée $m = m_1 \otimes m_2$. De plus, m est σ -finie.

DÉMONSTRATION :

Existence de m . On va construire une mesure m sur T vérifiant (7.3).

Soit $A \in T$. On va montrer, à l'étape 1, que, pour tout $x_1 \in E_1$, on a $1_A(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. On pourra donc poser $f_A(x_1) = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2$, pour tout $x_1 \in E_1$. L'application f_A sera donc une application de E_1 dans \mathbb{R}_+ . On va montrer, à l'étape 2, que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$. On posera alors $m(A) = \int f_A dm_1$. Enfin, il restera à l'étape 3 à montrer que m est bien une mesure vérifiant (7.3) et que m est σ -finie.

Étape 1. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x_1 \in E_1$, on note $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2; (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$, de sorte que $1_A(x_1, \cdot) = 1_{S(x_1, A)}$.

Soit $x_1 \in E_1$. On pose $\Theta = \{A \in \mathcal{P}(E); S(x_1, A) \in T_2\}$.

On remarque tout d'abord que $\Theta \supset T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a $S(x_1, A) = A_2$ si $x_1 \in A_1$ et $S(x_1, A) = \emptyset \in T_2$ si $x_1 \notin A_1$.

On remarque ensuite que Θ est une tribu. En effet :

- $\emptyset \in \Theta$ car $S(x_1, \emptyset) = \emptyset \in T_2$,

- Θ est stable par passage au complémentaire. En effet :
 $S(x_1, A^c) = (S(x_1, A))^c$ (c'est-à-dire $S(x_1, E \setminus A) = E_2 \setminus S(x_1, A)$). On a donc $S(x_1, A^c) \in T_2$ si $A \in \Theta$, ce qui prouve que $A^c \in \Theta$.
- Θ est stable par union dénombrable. Il suffit de remarquer que :
 $S(x_1, \cup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \in T_2$ si $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \Theta$.

Θ est donc une tribu contenant $T_1 \times T_2$, ceci prouve que Θ contient $T_1 \otimes T_2 = T$. On a donc $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $A \in T$.

Pour tout $A \in T$, on peut donc définir une application $f_A : E_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ en posant :

$$f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \int 1_{S(x_1, A)} dm_2 = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+, \text{ pour tout } x_1 \in E_1. \quad (7.4)$$

Étape 2. Dans cette étape, on démontre que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Cette étape est plus difficile que la précédente.

On note $\Sigma = \{A \in T; f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)\}$ et on va montrer que $\Sigma \supset T$ et donc que $\Sigma = T$.

On suppose d'abord que m_2 est finie.

Il est facile de voir que Σ contient $T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a alors $f_A = m_2(A_2)1_{A_1} \in \mathcal{E}_+(E_1, T_1) \subset \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On note maintenant \mathcal{A} l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ (\mathcal{A} s'appelle l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, voir l'exercice 7.2). Si $A \in \mathcal{A}$, il existe donc $(A^{(p)})_{p=1, \dots, n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^n A^{(p)}$. On a alors $f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \sum_{p=1}^n m_2(S(x_1, A^{(p)})) = \sum_{p=1}^n f_{A^{(p)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $A^{(p)} \in T_1 \times T_2 \subset \Sigma$. On a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma$.

On montre maintenant que Σ est une classe monotone, c'est-à-dire que :

$$(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma, A^{(n)} \subset A^{(n+1)} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma \quad (7.5)$$

et

$$(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma, A^{(n)} \supset A^{(n+1)} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma. \quad (7.6)$$

Pour montrer (7.5), soit $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ t.q. $A^{(n)} \subset A^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}$. Soit $x_1 \in E_1$. On a alors $(S(x_1, A^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \subset T_2$ (par l'étape 1, car $\Sigma \subset T$), $S(x_1, A^{(n)}) \subset S(x_1, A^{(n+1)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $S(x_1, \cup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)})$. On en déduit, par continuité croissante de m_2 , que $m_2(S(x_1, A)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$ et donc que $f_A = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_{A^{(n)}}$. Ce qui prouve que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $f_{A^{(n)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma$.

La démonstration de (7.6) est similaire, il faut utiliser la continuité décroissante de m_2 au lieu de la continuité croissante. C'est pour utiliser la continuité décroissante de m_2 qu'on a besoin de m_2 finie.

On a ainsi montré que Σ est une classe monotone contenant l'algèbre \mathcal{A} . On peut en déduire, cela fait l'objet de l'exercice 2.13 (corrigé 18), que Σ contient la tribu engendrée par \mathcal{A} et donc aussi la tribu engendrée par $T_1 \times T_2$ (car $T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A}$), c'est-à-dire que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. On a bien montré, finalement, que $\Sigma = T$.

Il reste maintenant à montrer que $\Sigma = T$ sans l'hypothèse m_2 finie. Comme m_2 est σ -finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la mesure $m_2^{(n)}$ par $m_2^{(n)}(A_2) = m_2(A_2 \cap F_n)$ pour tout $A_2 \in T_2$. La mesure $m_2^{(n)}$ est finie,

l'étape 1 et la première partie de l'étape 2 donne donc que, pour tout $A \in T$, $f_A^{(n)} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ où $f_A^{(n)}$ est définie par 7.4 avec $m_2^{(n)}$ au lieu de m_2 (c'est-à-dire $f_A^{(n)}(x_1) = m_2^{(n)}(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$). On conclut alors en remarquant que $f_A^{(n)} \uparrow f_A$ quand $n \rightarrow \infty$, ce qui donne que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On a donc montré que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Ceci nous permet de définir $m : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$m(A) = \int f_A dm_1, \text{ pour tout } A \in T. \quad (7.7)$$

Etape 3. Dans cette étape, on montre que m , définie par (7.7), est une mesure sur T et que m vérifie (7.3) et est σ -finie.

On montre d'abord que m est bien une mesure sur T :

1. $m(\emptyset) = 0$ car $f_\emptyset(x_1) = m_2(S(x_1, \emptyset)) = m_2(\emptyset) = 0$.
2. (σ -additivité de m) Soit $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A^{(n)} \cap A^{(m)} = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}$. Pour $x_1 \in E_1$, on a :

$$S(x_1, A) = \cup_{n \in \mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \text{ et } S(x_1, A^{(n)}) \cap S(x_1, A^{(m)}) = \emptyset \text{ si } n \neq m.$$

La σ -additivité de m_2 donne alors $m_2(S(x_1, A)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$, c'est-à-dire $f_A(x_1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_{A^{(n)}}(x_1)$. Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.1) donne alors:

$$m(A) = \int f_A dm_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_{A^{(n)}} dm_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A^{(n)}),$$

ce qui donne la σ -additivité de m .

On montre maintenant que m vérifie (7.3). Soient $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ t.q. $m_1(A_1) < \infty$ et $m_2(A_2) < \infty$. On pose $A = A_1 \times A_2$. On a alors $f_A = m_2(A_2)1_{A_1}$ et donc $m(A) = \int f_A dm_1 = m_2(A_2)m_1(A_1)$.

Il reste à vérifier que m est σ -finie. Comme m_1 et m_2 sont σ -finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on pose $C_{n,m} = B_1^{(n)} \times B_2^{(m)}$, de sorte que $E = \cup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} C_{n,m}$ et $m(C_{n,m}) = m_1(B_1^{(n)}) \times m_2(B_2^{(m)}) < \infty$. Comme \mathbb{N}^2 est dénombrable, on en déduit que m est σ -finie.

Unicité de m .

La partie "existence" de la démonstration donne une mesure m sur T vérifiant (7.3). La partie "unicité" du théorème peut se montrer avec la proposition 2.5, nous développons cette méthode ci-après, ou avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13) comme cela est expliqué dans la remarque 7.1.

Soit m et μ deux mesures sur T vérifiant (7.3). Pour montrer que $m = \mu$, on va appliquer la proposition 2.5. On pose :

$$\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2, A_1 \in T_1, A_2 \in T_2, m_1(A_1) < \infty, m_2(A_2) < \infty\}.$$

Comme m_1 et m_2 sont σ -finies, il est facile de montrer que tout élément de $T_1 \times T_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de \mathcal{C} . On en déduit que \mathcal{C} engendre T . Il est clair que \mathcal{C} est stable par intersection finie et, par (7.3), on a $m = \mu$ sur \mathcal{C} . Puis, comme m_1 et m_2 sont σ -finies, il existe deux suites

$(E_{1,n})_{n \in \mathbb{N}} \subset T_1$ et $(E_{2,n})_{n \in \mathbb{N}} \subset T_2$ d'éléments de T_1 et T_2 , disjoints deux à deux et t.q. $E_1 = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_{1,n}$, $E_2 = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_{2,n}$ et $m_i(E_{i,n}) < \infty$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose $F_{n,m} = E_{1,n} \times E_{2,m}$. La famille $(F_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de \mathcal{C} , disjoints deux à deux et t.q. $E = \cup_{n,m \in \mathbb{N}} F_{n,m}$ et $m(F_{n,m}) = m_1(E_{1,n})m_2(E_{2,m}) < \infty$. On peut alors utiliser la Proposition 2.5. Elle donne $m = \mu$ sur T et termine la démonstration du théorème. ■

Remarque 7.1 Comme cela a été dit, un autre moyen de montrer la partie "unicité" du théorème précédent est d'utiliser le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Supposons tout d'abord que m_1 et m_2 sont finies. On a alors (par (7.3)) :

$$m(E) = \mu(E) = m_1(E_1)m_2(E_2) < \infty.$$

La condition (7.3) donne également que $m = \mu$ sur $T_1 \times T_2$. On a alors aussi $m = \mu$ sur l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, notée \mathcal{A} (cette algèbre a été définie dans la partie "existence" de la démonstration). En effet, si $A \in \mathcal{A}$, il existe $(A^{(p)})_{p=1, \dots, n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^n A^{(p)}$. On a alors, par additivité de m et μ , $m(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A^{(n)}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A^{(n)}) = \mu(A)$.

On pose maintenant $\Sigma = \{A \in T; m(A) = \mu(A)\}$. On vient de montrer que $\Sigma \supset \mathcal{A}$. Il est d'autre part facile de voir que Σ est une classe monotone. En effet, les propriétés de continuité croissante et de continuité décroissante appliquées à m et μ permettent facilement de vérifier (7.5) et (7.6) (on utilise ici, pour montrer (7.6), que m et μ sont des mesures finies). Comme dans la partie "existence" de la démonstration, l'exercice 2.13 donne alors que Σ contient la tribu engendrée par \mathcal{A} et donc que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. Ce qui donne $\Sigma = T$ et donc $m = \mu$.

Dans le cas où m_1 et m_2 ne sont pas finies, mais σ -finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. On peut également supposer que $B_1^{(n)} \subset B_1^{(n+1)}$ et $B_2^{(n)} \subset B_2^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (il suffit, par exemple, de remplacer $B_i^{(n)}$ par $\cup_{p=0}^n B_i^{(p)}$). Par un raisonnement analogue à celui fait dans le cas où m_1 et m_2 sont finies, on peut montrer que $m = \mu$ sur $\{A \in T; A \subset B_1^{(n)} \times B_2^{(n)}\}$. On conclut alors, en utilisant la propriété de continuité croissante, que $m = \mu$ sur T . ■

Remarque 7.2 Dans le théorème précédente (théorème 7.1), on peut aussi remarquer que :

1. $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2) = \infty$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) \neq 0$ et $m_2(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) \neq 0$),
2. $m(A_1 \times A_2) = 0$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) = 0$ et $m_2(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) = 0$).

En effet, on suppose par exemple que $m_1(A_1) = 0$ et $m_2(A_2) = \infty$. Comme m_2 est σ -finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, par continuité croissante de m , $m(A_1 \times A_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_1 \times (A_2 \cap F_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_1(A_1)m_2(A_2 \cap F_n) = 0$ (on a d'ailleurs aussi $m_2(A_2 \cap F_n) \uparrow \infty$, ce qui permet de conclure si $0 < m_1(A_1) < \infty$ que $m(A_1 \times A_2) = \infty$). Les autres cas se traitent de manière analogue.

Définition 7.2 (Espace produit)

L'espace (E, T, m) , construit dans le théorème 7.1, s'appelle l'espace (mesuré) produit des espaces (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) .

Un exemple fondamental d'espace produit est l'espace $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ pour $N \geq 2$ que nous verrons dans la section 7.4.

7.3 Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini

Théorème 7.2 (Fubini-Tonelli) Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ -finis. On note (E, T, m) l'espace produit (donc, $T = T_1 \otimes T_2$ et $m = m_1 \otimes m_2$). Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive (i.e. T -mesurable positive). Alors :

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout $x_1 \in E_1$,

on pose

$$\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2 = \int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \text{ pour tout } x_1 \in E_1,$$

de sorte que $\varphi_f : E_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$,

2. $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$,
3. $\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \left(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1)$,
4. les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 et m_2 , de sorte que :

$$\int \left(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) = \int \left(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION : la démonstration se fait en plusieurs étapes.

Étape 1. Soit $f = 1_A$, $A \in T$. La partie “existence de m ” de la démonstration du théorème 7.1 donne alors que $\int f dm = m(A) = \int \varphi_f dm_1$.

Plus précisément, on a, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1, \cdot) = 1_A(x_1, \cdot) = 1_{S(x_1, A)}$, avec $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2; (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$ (comme dans la démonstration du théorème 7.1). L'étape 1 de la démonstration (de la partie existence) du théorème 7.1 donne que $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $x_1 \in E_1$, et donc $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Ceci donne le premier item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2 = m_2(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$. (Cette fonction φ_f était notée f_A dans la démonstration du théorème 7.1). L'étape 2 de la démonstration du théorème 7.1 donne que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$. Ceci donne le deuxième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2.

On a alors posé, dans la démonstration du théorème 7.1, $m(A) = \int \varphi_f dm_1$ et l'étape 3 a montré que m était une mesure sur T vérifiant (7.3) (et la seule mesure sur T vérifiant (7.3), d'après la partie “unicité” de la démonstration du théorème 7.1). Ceci donne le troisième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2.

Pour avoir le quatrième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2, il suffit de remarquer que l'on peut inverser les rôles de m_1 et m_2 dans la démonstration du théorème 7.2. On obtient ainsi que $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $x_2 \in E_2$. On pose alors $\psi_f(x_2) = \int f(\cdot, x_2) dm_1$. On obtient que $\psi_f \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Enfin, on pose $\tilde{m}(A) = \int \psi_f dm_2$ et on obtient que \tilde{m} est une mesure sur T vérifiant (7.3). La partie “unicité” de la démonstration du théorème 7.1 donne alors que $m = \tilde{m}$, ce qui est exactement le quatrième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.2.

Étape 2. On prend maintenant $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$. Il existe donc $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_1, \dots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$.

On a alors, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1, \cdot) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ car l'étape 1 donne $1_{A_i}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout i . Ce qui donne le premier item de la conclusion du théorème 7.2.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$. On a $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $\varphi_f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{A_i}}$ et que $\varphi_{1_{A_i}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout i (d'après l'étape 1). Ce qui donne le deuxième item de la conclusion du théorème 7.2.

Enfin, on utilise la linéarité de l'intégrale et l'étape 1 pour $f = 1_{A_i}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int f dm &= \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int \varphi_{1_{A_i}} dm_1 = \int \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{A_i}} \right) dm_1 \\ &= \int \left(\sum_{i=1}^n a_i \int 1_{A_i}(x_1, \cdot) dm_2 \right) dm_1(x_1) = \int \left(\int f(x_1, \cdot) dm_2 \right) dm_1(x_1) = \int \varphi_f dm_1. \end{aligned}$$

Ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.2.

Pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.2, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2 .

Etape 3. On peut enfin prendre $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$. Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+(E, T)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \rightarrow \infty$.

On a donc, pour tout $x_1 \in E_1$, $f_n(x_1, \cdot) \uparrow f(x_1, \cdot)$ quand $n \rightarrow \infty$. On en déduit que $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ car (d'après l'étape 2) $f_n(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui donne le premier item).

Le théorème de convergence monotone (pour m_2) donne que $\varphi_{f_n}(x_1) = \int f_n(x_1, \cdot) dm_2 \uparrow \int f(x_1, \cdot) dm_2 = \varphi_f(x_1)$ pour tout $x_1 \in E_1$. Donc, $\varphi_{f_n} \uparrow \varphi_f$. Comme $\varphi_{f_n} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ (d'après l'étape 2), on en déduit que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ (ce qui donne le deuxième item).

On applique maintenant le théorème de convergence monotone pour m_1 et pour m , ils donnent :

$$\int \varphi_{f_n} dm_1 \uparrow \int \varphi_f dm_1 \text{ et } \int f_n dm \uparrow \int f dm \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

L'étape 2 donne $\int f_n dm = \int \varphi_{f_n} dm_1$, on en déduit donc que $\int f dm = \int \varphi_f dm_1$. Ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.2.

Enfin, ici encore, pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.2, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2 . ■

Corollaire 7.1 Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ -finis. On note (E, T, m) l'espace produit. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -mesurable. Alors :

$$f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E, T, m) \iff \int \left(\int |f| dm_2 \right) dm_1 < +\infty \iff \int \left(\int |f| dm_1 \right) dm_2 < +\infty. \quad (7.8)$$

DÉMONSTRATION : Le corollaire découle immédiatement du théorème 7.2 appliqué à la fonction $|f| \in \mathcal{M}_+(E, T)$. Dans (7.8), la notation $(\int |f| dm_2) dm_1$ signifie :

$$\left(\int |f(x_1, x_2)| dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1).$$

La notation est similaire en inversant les rôles de m_1 et m_2 . ■

Voici une conséquence immédiate du théorème 7.2 pour la mesurabilité :

Proposition 7.2 Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables. On pose $E = E_1 \times E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Soit $f \in \mathcal{M}(E, T)$ (c'est-à-dire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, T -mesurable). Alors :

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, pour tout $x_2 \in E_2$.

DÉMONSTRATION : La démonstration est facile, il suffit de remarquer que $f = f^+ - f^-$ et que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E, T)$. Le premier item de la conclusion du théorème 7.2 donne alors, pour tout $x_1 \in E_1$, $f^+(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ et $f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Comme $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot)$, on en déduit que $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. En changeant les rôles de (E_1, T_1) et (E_2, T_2) , on montre aussi que $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, pour tout $x_2 \in E_2$. ■

Remarque 7.3 La réciproque de la proposition précédente est fautive. Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables, $E = E_1 \times E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, pour tout $x_2 \in E_2$.

Alors, f n'est pas forcément T -mesurable. Un exemple est donné dans l'exercice 7.4. Un cas particulier intéressant pour laquelle cette réciproque est vraie est donné par la proposition 7.3.

Proposition 7.3 Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables. On pose $E = E_1 \times E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Soient $F_1 \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$ et $F_2 \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. On définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in E$. Alors f est T -mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(E, T)$).

DÉMONSTRATION : On procède en 3 étapes.

Étape 1. On prend d'abord $F_1 = 1_{A_1}$ et $F_2 = 1_{A_2}$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$. On a alors $f = 1_{A_1 \times A_2} \in \mathcal{M}(E, T)$ car $A_1 \times A_2 \in T_1 \times T_2 \subset T_1 \otimes T_2 = T$.

Étape 2. On prend maintenant $F_1 \in \mathcal{E}(E_1, T_1)$ et $F_2 \in \mathcal{E}(E_2, T_2)$. Il existe alors $a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)} \in \mathbb{R}$, $A_1^{(1)}, \dots, A_n^{(1)} \in T_1$, $a_1^{(2)}, \dots, a_m^{(2)} \in \mathbb{R}$ et $A_1^{(2)}, \dots, A_m^{(2)} \in T_2$ t.q. :

$$F_1 = \sum_{i=1}^n a_i^{(1)} A_i^{(1)} \text{ et } A_i^{(1)} \cap A_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } i \neq k,$$

$$F_2 = \sum_{j=1}^m a_j^{(2)} A_j^{(2)} \text{ et } A_j^{(2)} \cap A_k^{(2)} = \emptyset \text{ si } j \neq k.$$

On a alors $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i^{(1)} a_j^{(2)} 1_{A_i^{(1)} \times A_j^{(2)}} \in \mathcal{E}(E, T) \subset \mathcal{M}(E, T)$.

Étape 3. On prend enfin $F_1 \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$ et $F_2 \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. Il existe $(F_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(E_1, T_1)$ et $(F_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(E_2, T_2)$ t.q. $F_n^{(1)}(x_1) \rightarrow F_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in E_1$ et $F_n^{(2)}(x_2) \rightarrow F_2(x_2)$ pour tout $x_2 \in E_2$. On en déduit que $f_n(x_1, x_2) = F_n^{(1)}(x_1)F_n^{(2)}(x_2) \rightarrow f(x_1, x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in E$ et donc que $f \in \mathcal{M}(E, T)$ car $f_n \in \mathcal{M}(E, T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (étape 2). ■

Théorème 7.3 (Fubini)

Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ -finis. On note (E, T, m) l'espace produit. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(E, T)$) et intégrable pour la mesure m , c'est-à-dire $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E, T, m)$. Alors :

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$,
on pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2$ pour $x_1 \in E_1$ t.q. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E_2, T_2, m_2)$. La fonction φ_f est donc définie p.p. sur E_1 (et à valeurs dans \mathbb{R}).
2. $\varphi_f \in L_{\mathbb{R}}^1(E_1, T_1, m_1)$ (au sens : il existe $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E_1, T_1, m_1)$ t.q. $f = g$ p.p.).
3. $\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \left(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1)$,
4. les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 et m_2 , de sorte que :

$$\int \left(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) = \int \left(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION : Comme $f \in \mathcal{M}(E, T)$, on a $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E, T)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.2) à f^+ et f^- . Il donne :

1. $f^+(x_1, \cdot), f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $\varphi_{f^+}, \varphi_{f^-} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ avec $\varphi_{f^\pm}(x_1) = \int f^\pm(x_1, \cdot) dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$.
3. $\int f^\pm dm = \int \varphi_{f^\pm} dm_1$.

Le premier item donne que $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$ (noter que f, f^+ et f^- sont à valeurs dans \mathbb{R}).

Comme $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$ (car $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E, T, m)$), le troisième item donne que $\varphi_{f^+} < \infty$ p.p. (sur E_1) et que $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p. (sur E_1). On a donc $f^+(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E_2, T_2, m_2)$ et $f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. On en déduit donc que $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. Ce qui donne le premier item de la conclusion.

La fonction φ_f est donc définie p.p. sur E_1 et on a $\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ p.p. (on a $\varphi_f(x_1) = \varphi_{f^+}(x_1) - \varphi_{f^-}(x_1)$ en tout point x_1 t.q. $\varphi_{f^+}(x_1) < \infty$ et $\varphi_{f^-}(x_1) < \infty$). Comme $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p., on peut trouver $A \in T_1$ t.q. $m_1(A) = 0$ et $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ sur $A^c = E_1 \setminus A$. En posant $g = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ sur A^c et $g = 0$ sur A , on a donc $g \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, $g = \varphi_f$ p.p. et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E_1, T_1, m_1)$ car $\int |g| dm_1 \leq \int \varphi_{f^+} dm_1 + \int \varphi_{f^-} dm_1 < \infty$. Ceci donne le deuxième item de la conclusion (le fait que φ_f appartienne à $L_{\mathbb{R}}^1(E_1, T_1, m_1)$) et donne aussi le troisième item car :

$$\int \varphi_f dm_1 = \int g dm_1 = \int \varphi_{f^+} dm_1 - \int \varphi_{f^-} dm_1 = \int f^+ dm - \int f^- dm = \int f dm.$$

Enfin, comme pour le théorème de Fubini-Tonelli, le quatrième item de la conclusion s'obtient en changeant les rôles de m_1 et m_2 . ■

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 7.2 Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ -finis, (E, T, m) l'espace produit et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -mesurable t.q. :

$$\int \left(\int |f(x_1, x_2)| dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) < +\infty$$

ou

$$\int \left(\int |f(x_1, x_2)| dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2) < +\infty.$$

Alors :

$$\int \left(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) = \int \left(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2). \quad (7.9)$$

(Toutes les intégrales ayant bien un sens.)

DÉMONSTRATION : Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème 7.3 et de l'équivalence (7.8). ■

Remarque 7.4 (contre-exemple lié au théorème de Fubini) On cherche ici à construire une fonction pour laquelle la conclusion du théorème de Fubini n'est pas vérifiée : soient a une fonction (continue) de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = a(x)$ si $x \geq 0$ et $x \leq y < 2x$, $f(x, y) = -a(x)$ si $x \geq 0$ et $2x \leq y < 3x$, $f(x, y) = 0$ si $x < 0$ ou $x \geq 0$ et $y \notin [x, 3x]$. On pose $b(x) = xa(x)$. On peut montrer que les hypothèses du théorème de Fubini ne sont vérifiées que si $b \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. En prenant par exemple $a(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, on montre que : $\int \left(\int f(x, y) dy \right) dx \neq \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy$ (voir l'exercice 7.5).

7.4 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de \mathbb{R}^N

On a déjà vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $N \geq 1$ (exercice 2.6 pour $N = 2$ et exercice 7.1). Le paragraphe précédent permet alors de définir la mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R}^N (c'est-à-dire sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, engendrée par les ouverts de \mathbb{R}^N) pour tout $N \geq 1$.

Définition 7.3 (Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)

1. La mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est la mesure $\lambda \otimes \lambda$, on la note λ_2 .
2. Par récurrence sur N , la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, est la mesure $\lambda_{N-1} \otimes \lambda$, on la note λ_N .

On note $L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on note $\int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x) dx$.

On donne maintenant quelques propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Il s'agit de propriétés élémentaires ou de généralisations simples de propriétés vues pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Les démonstrations seront proposées en exercices.

Proposition 7.4 (Propriétés élémentaires de λ_N)

Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. La mesure λ_N est σ -finie.
2. Soit $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$.

3. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Alors :

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i]) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i]) = \prod_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i).$$

4. Soit K un compact de \mathbb{R}^N (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Alors, $\lambda_N(K) < +\infty$.

5. Soit O un ouvert non vide de \mathbb{R}^N . Alors, $\lambda_N(O) > 0$.

6. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N -p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

7. $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. (En confondant f avec sa classe, on écrira donc souvent $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset L_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}^N)$.)

DÉMONSTRATION : Comme λ_N est une mesure produit, le fait que λ_N est σ -finie est (par récurrence sur N) une conséquence du théorème donnant l'existence (et l'unicité) de la mesure produit (théorème 7.1) car ce théorème donne que le produit de mesures σ -finies est σ -finie.

La démonstration des autres propriétés fait l'objet de l'exercice 7.10. ■

Une propriété très importante de λ_N est sa "régularité", c'est-à-dire que pour tout élément A de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de \mathbb{R}^N et F fermé de \mathbb{R}^N tels que

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda_N(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Cette propriété est une conséquence du fait que toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts, est régulière (proposition 7.5).

Proposition 7.5 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts)

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de \mathbb{R}^N . (Noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.) Alors :

1. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de \mathbb{R}^N et F fermé de \mathbb{R}^N tels que :

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon. \tag{7.10}$$

2. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a $m(A) = \inf\{m(O), O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.

DÉMONSTRATION : Cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.11. ■

On donne maintenant des généralisations au cas de λ_N de propriétés déjà vues pour λ .

Proposition 7.6 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) Pour tout $N \geq 1$, l'espace $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$).

DÉMONSTRATION : La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.12, elle découle essentiellement de la régularité de λ_N . Cette démonstration est très voisine de celle faite pour le cas $N = 1$, théorème 5.5. ■

Comme cela a déjà été dit après le théorème 5.5, le résultat de densité que nous venons d'énoncer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞ . On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 7.4 (Densité de C_c^∞ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) Soit $N \geq 1$ et μ sur une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Alors, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$).

DÉMONSTRATION : La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 7.13. ■

Proposition 7.7 (Invariance par translation)

Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \dots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N). Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a alors $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$.

Pour $\alpha_i = 1$ pour tout i , cette propriété s'appelle "invariance par translation de λ_N ".

DÉMONSTRATION : Cette proposition a déjà été vue pour $N = 1$, proposition 2.9. La démonstration de la proposition 2.9 utilisait, par exemple, le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2 (et la régularité de λ). La démonstration proposée ici pour $N \geq 1$ utilise une récurrence sur N et la partie "unicité" du théorème 7.1 sur la mesure produit. Elle fait l'objet de l'exercice 7.14.

On peut aussi noter que la partie "unicité" du théorème 7.1 peut être faite (voir la remarque 7.1) avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Ce lemme pourrait aussi être utilisé pour démontrer la proposition 2.9 (au lieu du théorème de régularité et du fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints 2 à 2). ■

Proposition 7.8 (Changement de variables simple)

Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \dots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N). Alors :

1. Pour tout $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

2. Pour tout $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

DÉMONSTRATION : La démonstration est une conséquence simple de la proposition 7.7. Elle fait l'objet de l'exercice 7.15.

Noter aussi que $\prod_{i=1}^N |\alpha_i|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x . Cette matrice est notée $D\varphi(x)$, elle ne dépend pas de x pour les applications considérées dans cette proposition. Cette proposition sera généralisée au théorème 7.5. ■

7.5 Convolution

On rappelle que $L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et que, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\int f d\lambda_N = \int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x) dx$ (c'est-à-dire que dx signifie toujours $d\lambda_N(x)$).

On note aussi $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On souhaite définir la fonction "convoluée" de f et g , c'est-à-dire définir $f \star g$ par :

$$f \star g(x) = \int f(t)g(x-t)dt. \quad (7.11)$$

La définition de cette fonction nécessite les deux conditions suivantes :

1. Il faut que la définition ne dépende pas des représentants choisis pour f et g .
2. Il faut que, ayant choisi des représentants pour f et g , encore notés f et g , la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^N)$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $g(x-\cdot)f(\cdot) = h$ p.p."). Ceci n'est pas immédiat car, en général, le produit deux fonctions intégrables n'est pas une fonction intégrable.

La condition 1 est satisfaite, car, pour $x \in \mathbb{R}^N$, si f, f_1, g et g_1 sont des fonctions de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} , on a :

$$f = f_1 \text{ p.p.}, g = g_1 \text{ p.p.} \Rightarrow f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) \text{ p.p.} \quad (7.12)$$

(p.p. signifiant ici λ_N -p.p.) En effet, il suffit de remarquer que si $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p., il existe $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\lambda_N(A) = \lambda_N(B) = 0$, $f = f_1$ sur A^c et $g = g_1$ sur B^c . Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a alors $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ sur $A^c \cap B_x^c = (A \cup B_x)^c$ avec $B_x = \{x-z, z \in B\}$. On en déduit bien $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ p.p. car $\lambda_N(A \cup B_x) \leq \lambda_N(A) + \lambda_N(B_x) = \lambda_N(A) + \lambda_N(B) = 0$ (on utilise ici la propriété d'invariance par translation donnée dans la proposition 7.7).

On en déduit que, si f et f_1 [resp. g et g_1] sont des représentants d'un même élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $f(\cdot)g(x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et, si $f(\cdot)g(x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $\int f(t)g(x-t)dt = \int f_1(t)g_1(x-t)dt$.

On montre dans la proposition suivante que la condition 2 est satisfaite pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Proposition 7.9 (Convolution) *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (que l'on confond avec l'un de leurs représentants). Alors :*

- Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ (en la confondant avec sa classe). On pose donc : $f \star g(x) = \int f(t)g(x-t)dt$. La fonction $f \star g$ est donc définie p.p. sur \mathbb{R}^N .
- $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $f \star g = h$ p.p.").
- $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

DÉMONSTRATION : On donne la démonstration pour $N = 1$ (le cas $N > 1$ est similaire, en ayant d'abord montré que $\lambda_{2N} = \lambda_N \otimes \lambda_N$).

On choisit des représentants de f et g , de sorte que $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On souhaite appliquer le théorème de Fubini (théorème 7.3) à $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $H(x, y) = f(y)g(x-y)$, avec les espaces mesurés $(E_i, T_i, m_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $i = 1, 2$.

Comme λ est σ -finie, pour appliquer le théorème de Fubini, il suffit de vérifier que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurable et que $\int(\int |H(x, y)|dx)dy < \infty$.

On montre d'abord que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurable. On a $H = H_1 \circ \psi$ avec :

$$H_1 : (x, y) \mapsto f(x)g(y), \quad \psi : (x, y) \mapsto (y, x - y).$$

La fonction H_1 est mesurable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} (car f et g sont mesurables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on applique ici la proposition 7.3) et ψ est mesurable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 car continue (\mathbb{R} et \mathbb{R}^2 sont toujours munis de leur tribu borélienne). La fonction H est donc mesurable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} comme composée de fonctions mesurables. On peut maintenant calculer l'intégrale de $|H|$:

$$\int(\int |H(x, y)|dx)dy = \int(\int |f(y)g(x - y)|dx)dy = \int |f(y)|(\int |g(x - y)|dx)dy.$$

La proposition 7.8 donne $\int |g(x - y)|dx = \int |g(x)|dx = \|g\|_1$, Donc :

$$\int(\int |H(x, y)|dx)dy = \|g\|_1 \int |f(y)|dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Le théorème de Fubini peut donc s'appliquer. Il donne que $H(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $g(x - \cdot)f(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci montre bien que $f \star g$ est définie p.p.. Le théorème de Fubini donne alors aussi que $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ (au sens "il existe $h \in L^1(\mathbb{R})$ t.q. $f \star g = h$ p.p."). Enfin pour montrer que $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, il suffit de remarquer que :

$$\|f \star g\|_1 = \int | \int f(y)g(x - y)dy | dx \leq \int(\int |H(x, y)|dx)dy = \|g\|_1 \|f\|_1.$$

■

Remarque 7.5 On a vu précédemment que $L^1(\mathbb{R}^N)$ muni de l'addition (loi de composition interne), de la multiplication par un scalaire (loi de composition externe) et de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach. L'ajout de la convolution (loi de composition interne) confère à $L^1(\mathbb{R}^N)$ la structure d'algèbre de Banach.

On sait aussi que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de l'addition, de la multiplication interne, de la multiplication par un scalaire et de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ est aussi une algèbre de Banach. En fait, nous montrerons par la suite qu'il existe un isomorphisme d'algèbre, appelé transformation de Fourier, entre $L^1(\mathbb{R}^N)$ et son image (par cette transformation) dans $C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Remarque 7.6 On donne ici quelques propriétés supplémentaires de la convolution.

Soit $N \geq 1$. Pour $p \in [1, \infty]$, on pose $L^p(\mathbb{R}^N) = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda)$.

1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On a alors $f \star g = g \star f$ p.p.. Ceci découle de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue (propositions 7.7 et 7.8) et est démontré dans l'exercice 7.19.
2. Soit $1 < p < \infty$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f \star g$ est définie p.p. sur \mathbb{R}^N , $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. Cette propriété fait l'objet de l'exercice 7.21.
3. Soit $p, q \in [1, \infty]$ t.q. $(1/p) + (1/q) = 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f \star g$ est définie partout sur \mathbb{R}^N et $f \star g \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, voir l'exercice 8.6.

4. Soit $p \in [1, \infty]$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors, $f \star g$ est définie partout sur \mathbb{R}^N et $f \star g \in C_\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, voir l'exercice 7.20.
5. (Régularisation par convolution) Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ si $f1_K \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de \mathbb{R}^N . On suppose que $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $g \in C_c^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors, $f \star g$ est définie partout sur \mathbb{R}^N et $f \star g \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (voir l'exercice 7.20, noter que $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$).
6. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K , compact de \mathbb{R}^N t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Alors, la fonction $f \star g$ est aussi à support compact. Ceci fait partie de l'exercice 7.19.

La convolution est un outil très utile pour "régulariser" des fonctions. Elle est à la base de résultats de densité fondamentaux que nous verrons dans le chapitre suivant (densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $p < \infty$, par exemple).

Il est aussi intéressant de généraliser la convolution de fonctions en convolution de mesures. On commence par remarquer qu'un fonction f dans $L_{loc}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (voir la remarque 7.6) est entièrement déterminée par la mesure qu'elle induit sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire par la mesure m définie par $m = f\lambda_N$. Ceci est précisé dans le lemme suivant (en remarquant que $\int \varphi dm = \int \varphi f d\lambda_N$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$).

Lemme 7.1 Soit $N \geq 1$ et $f, g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ t.q. $\int f\varphi d\lambda_N = \int g\varphi d\lambda_N$, pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors, $f = g$ p.p..

DÉMONSTRATION : Soit $M \in \mathbb{N}^*$. On note B_M la boule (fermée) de centre 0 et rayon M dans \mathbb{R}^N et h_M la fonction définie par :

$$\begin{aligned} h_M(x) &= f(x) - g(x) \text{ si } x \in B_M \text{ et } |f(x) - g(x)| \leq M, \\ h_M(x) &= 0 \text{ si } x \in B_M \text{ ou } |f(x) - g(x)| > M, \\ h_M(x) &= 0 \text{ si } x \notin B_M. \end{aligned}$$

On a $h_M \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (car B_M est un compact de \mathbb{R}^N). Comme $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (théorème 5.5 pour $d = 1$ et théorème 7.6 pour $N \geq 1$), il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $\varphi_n \rightarrow h_M$ dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ quand $n \rightarrow \infty$. On peut aussi supposer (quitte à extraire une sous suite) que $\varphi_n \rightarrow h_M$ p.p. (théorème 6.2). Enfin, en remplaçant φ_n par $\max(\min(\varphi_n, M), -M)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_n &\in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ \varphi_n &\rightarrow h_M \text{ p.p.}, \\ |\varphi_n| &\leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, on a $\int (f - g)\varphi_n d\lambda_N = 0$. Le théorème de convergence dominée (la domination est par $M1_{B_M}|f - g|$) donne alors $\int h_M(f - g)d\lambda_N = 0$. En faisant maintenant tendre M vers l'infini, le théorème de convergence monotone donne $\int |f - g|d\lambda_N = 0$, et donc $f = g$ p.p. ■

Pour que la convolution de mesures soit une généralisation de la convolution de fonctions, on souhaite que $m \star \mu = (f \star g)\lambda_N$, lorsque $m = f\lambda_N$ et $g = g\lambda_N$ avec $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (et donc $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$). Noter que m, μ et $m \star \mu$ sont des mesures signées.

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. On pose $m = f\lambda_N$ et $g = g\lambda_N$. On a, pour tout φ borélienne bornée de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} (par exemple, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$),

$$\int (f \star g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy \right) \varphi(x)dx.$$

(On rappelle que dx désigne $d\lambda_N(x)$). En utilisant le théorème de Fubini (qui s'applique bien ici car $\int \int |f(x-y)g(y)\varphi(x)| dx dy \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1$), puis avec le changement de variable $z = x - y$ (pour y fixé) on obtient :

$$\int (f \star g) \varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi(x) dx \right) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(z+y) dz \right) g(y) dy.$$

On a donc :

$$\int (f \star g) \varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z+y) dm(z) \right) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi(y+z) d(m \otimes \mu)(z, y), \quad (7.13)$$

où la dernière égalité découle de la définition de $m \otimes \mu$. Plus précisément, si m et μ sont des mesures finies (c'est-à-dire des applications σ -additives de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ dans \mathbb{R}^+), la dernière égalité de 7.13 est donnée par le troisième item du théorème de Fubini (théorème 7.3). Si m et μ sont des mesures signées, on se ramène au cas précédent avec la décomposition de Hahn (proposition 2.6) qui donne $m = m^+ - m^-$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$. La mesure $m \otimes \mu$ est alors définie à partir de $m^\pm \otimes \mu^\pm$.

On est ainsi amené à définir $m \star \mu$ en utilisant le deuxième membre de (7.13) pour définir $\int \varphi d(m \star \mu)$.

Définition 7.4 Soit $N \geq 1$ et m, μ des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. On définit la mesure signée $m \star \mu$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ par :

$$m \star \mu(A) = \int_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})} 1_A(x+y) d(m \otimes \mu)(x, y) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

où $m \otimes \nu = m^+ \otimes \mu^+ + m^- \otimes \mu^- - m^- \otimes \mu^+ - m^+ \otimes \mu^-$ et m^\pm, μ^\pm sont données par la décomposition de Hahn de m et μ (proposition 2.6).

Le fait que $m \star \mu$ est une mesure signée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est facile (la σ -additivité de $m \star \mu$ découle, par exemple, du théorème de convergence dominée). On déduit de cette définition la proposition suivante.

Proposition 7.10 Soit $N \geq 1$ et m, μ des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. On a alors, pour tout φ borélienne bornée de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} (par exemple, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$) :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d(m \star \mu) = \int_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})} \varphi(x+y) d(m \otimes \mu)(x, y).$$

2. Si m et μ sont des probabilités, la mesure $m \star \mu$ est aussi une probabilité.

3. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, $m = f\lambda_N$ et $\mu = g\lambda_N$, on a $m \star \mu = (f \star g)\lambda_N$.

DÉMONSTRATION : Le premier item se démontre, comme souvent, en considérant des fonctions étagées, puis en écrivant φ comme limite de fonctions étagées (bornées par la borne supérieure de $|\varphi|$, exercice 7.23). Le deuxième item est immédiat en remarquant que $m \star \mu(A) \geq 0$ si m et μ sont des mesures (positives) et $m \star \mu(\mathbb{R}^N) = m(\mathbb{R}^N)\mu(\mathbb{R}^N)$. Enfin, le troisième item a été vu avant la proposition 7.10. ■

Remarque 7.7 Il aurait aussi été possible de définir $m \star \mu$ grâce au théorème de Riesz dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (théorème 5.4 pour $N \geq 1$). Si m, μ sont des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (ou, directement, des formes linéaires continues sur $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$). On définit, l'application L de $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} par :

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x+y) dm(x) d\mu(y), \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}). \quad (7.14)$$

L'application L est une forme linéaire continue sur $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Par le théorème de Riesz, il existe donc une unique mesure de Radon, notée τ (c'est la mesure convoluée de m et μ) t.q. :

$$L(\varphi) = \int \varphi(s) d\tau(s). \quad (7.15)$$

7.6 Formules de changement de variables

La proposition 7.8 donne un résultat sur les changements de variables "simples". On donne maintenant une généralisation dans le cas où les intégrales portent sur des ouverts bornés de \mathbb{R}^N .

Théorème 7.5 (Formules de changement de variables)

Soient $N \geq 1$, U et V des ouverts bornés de \mathbb{R}^N et φ un C^1 -difféomorphisme de U dans V (i.e. φ est une bijection de U dans V , $\varphi \in C^1(U, V)$ et $\varphi^{-1} \in C^1(V, U)$). On note $D\varphi(y)$ la matrice jacobienne de φ en y et $Det(D\varphi)$ la fonction $y \mapsto Det(D\varphi(y))$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Alors, $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{M}_+$ et :

$$\int_V f(x) dx = \int_U f(\varphi(y)) |Det(D\varphi(y))| dy.$$

2. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f1_V \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Alors, $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\int_V f(x) dx = \int_U f(\varphi(y)) |Det(D\varphi(y))| dy.$$

DÉMONSTRATION : Comme φ est de classe C^1 , il est facile de voir que $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U$ est mesurable si f est mesurable. La démonstration de l'item 1 du théorème n'est pas faite ici. Elle consiste à se ramener par un procédé de localisation au cas de changements de variables affines.

Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier. En effet, soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f1_V \in \mathcal{L}^1$. En appliquant le premier item à la fonction $|f| \in \mathcal{M}_+$, on obtient que $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1$. Puis en appliquant le premier item à f^+ et f^- et en faisant la différence, on obtient bien que $\int_V f(x) dx = \int_U f(\varphi(y)) |Det(D\varphi(y))| dy$. ■

Un exemple de changement de variables

On conclut cette section en donnant l'exemple des coordonnées polaires pour $N = 2$.

La fonction f appartient à $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$) et on veut calculer (par exemple) $\int_{B_1} f(x) dx$, où B_1 est la boule unité (ouverte) de \mathbb{R}^2 , en passant en coordonnée polaires.

On a donc $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$ si $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

On pose $L = \{(x_1, 0)^t, x_1 \in [0, 1]\}$ et on remarque que $\lambda_2(L) = \lambda([0, 1]) \times \lambda(\{0\}) = 0$. Donc, en posant $V = B_1 \setminus L$, on a :

$$\int_{B_1} f(x) dx = \int_{B_1 \setminus L} f(x) dx = \int_V f(x) dx (= \int_V f d\lambda_2).$$

On pose aussi $U =]0, 1[\times]0, 2\pi[$, de sorte que U et V sont de ouverts bornés de \mathbb{R}^2 . L'application $\varphi : (r, \theta)^t \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)^t$ est alors une bijection de U dans V . Elle est de classe C^1 et son inverse est de classe C^1 (φ et φ^{-1} sont même de classe C^∞). On peut calculer la matrice jacobienne de φ et son déterminant :

$$D\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad |Det(D\varphi(r, \theta))| = r.$$

On peut donc appliquer le théorème 7.5, il donne :

$$\int_{B_1} f(x) dx = \int_V f(x) dx = \int_U f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\lambda_2(r, \theta) = \int_{]0, 1[\times]0, 2\pi[} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\lambda_2(r, \theta)$$

En appliquant maintenant le théorème de Fubini-Tonelli pour évaluer la dernière intégrale (si $f \in \mathcal{L}^1$ au lieu de $f \in \mathcal{M}_+$, on raisonne d'abord sur $|f|$ puis on utilise le théorème de Fubini), on obtient :

$$\int_{B_1} f(x) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta \right) dr.$$

Si $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, c'est-à-dire si il existe ψ t.q. $f(x) = \psi(|x|)$, on obtient alors :

$$\int_{B_1} f(x) dx = 2\pi \int_0^1 \psi(r) r dr.$$

En particulier, on voit que $f 1_{B_1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0, 1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, avec g définie par $g(r) = r\psi(r)$ pour $r \in]0, 1[$.

Prenons toujours $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou bien $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$). Le raisonnement que nous venons de faire pour B_1 peut être fait pour $B_a = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < a\}$ avec $a > 0$. On obtient alors, pour tout $a > 0$:

$$\int_{B_a} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right) d\theta. \quad (7.16)$$

En prenant $a = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, dans (7.16), on obtient aussi, quand $n \rightarrow \infty$ (avec le théorème de convergence monotone si $f \in \mathcal{M}_+$ et en raisonnant avec f^\pm si $f \in \mathcal{L}^1$) :

$$\int f(x) dx = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right) d\theta. \quad (7.17)$$

7.7 Exercices

7.7.1 Mesure produit

Exercice 7.1 *Corrigé 138 page 448*

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. [S'inspirer de la démonstration faite pour $n = 2$ dans l'exercice 2.6.]

Exercice 7.2 *Corrigé 139 page 449*

Soient E_1, E_2 deux ensembles, T_1 une tribu sur E_1 et T_2 une tribu sur E_2 . On note $E = E_1 \times E_2$ et on rappelle que $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2, A_1 \in T_1, A_2 \in T_2\}$.

Montrer que l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ est égale à l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, A appartient à l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ si et seulement si il existe $(A^{(p)})_{p=1, \dots, n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^n A^{(p)}$.

Exercice 7.3 (Exemple de mesure produit) *Corrigé 140 page 450*

Soit m_1 et m_2 des mesures σ -finies, non nulles, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et t.q. $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, où $D = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $m_1 = \alpha \delta_a$ et $m_2 = \beta \delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a .

Exercice 7.4 (Fonction non borélienne dont les traces sont boréliennes) *Corrigé 141 page 451*

Pour $B \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(B)$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $(x_1, 0) \in B$. On pose $T = \{B \subset \mathbb{R}^2; t(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)^t$.

1. Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ t.q. $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $B = A \times \{0\}$.
 - (a) Montrer que $B \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
 - (b) On pose $f = 1_B \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} mais que les fonctions $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot; x_2)$ sont boréliennes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

7.7.2 Fubini-Tonelli et Fubini

Exercice 7.5 (Contre-exemple au théorème de Fubini) *Corrigé 142 page 451*

Soit $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \leq 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } y \notin]x, 3x[\\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad (7.18)$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurable.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, y) \in L^1$; on pose $\phi(y) = \int f(x, y) d\lambda(x)$. Montrer que $\phi \in L^1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, \cdot) \in L^1$; on pose $\psi(x) = \int f(x, y) d\lambda(y)$. Montrer que $\psi \in L^1$.
4. Montrer que $\int \phi d\lambda \neq \int \psi d\lambda$ (ϕ et ψ sont définies dans les questions précédentes).
5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?

Exercice 7.6 (Intégrale d'une fonction positive) *Corrigé 143 page 453*

Soit (E, T, m) un espace mesuré σ -fini, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On pose $F = 1_A$ avec $A = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times E; 0 < t < f(x)\}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$ -mesurable

2. Montrer que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) > t\}) dt$ et que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) \geq t\}) dt$. [Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Exercice 7.7 (Une caractérisation de L^p) *Corrigé 144 page 454*

On munit \mathbb{R} [resp. \mathbb{R}^2] de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$].

Soit f une application mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_y = \{x \in \mathbb{R}; |f(x)| > y\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $A_y = \emptyset$.

- Montrer que l'application $(x, y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est mesurable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . [On pourra commencer par montrer que $\{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2; |f(x)| > y\}$ est un borélien de \mathbb{R}^2 .]
Soit $p \in [1, \infty[$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $g_p(y) = |y|^{p-1} \lambda(A_y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$).
- (a) Montrer que l'application $(x, y)^t \mapsto |y|^{p-1} 1_{A_y}(x)$ est mesurable positive de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
(b) Montrer que g_p est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Exercice 7.8 (Mesure de boules de \mathbb{R}^2)

On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$. Montrer que $\lambda_2(\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}) = \pi R^2$ pour tout $R > 0$.

Exercice 7.9 (A propos de Fubini)

Soit, pour $n \geq 1$, $I_n = [1 - 1/n, 1 - 1/(n+1)[$; on pose $\varphi_n = n(n+1)\chi_{I_n}$ et $f(x, y) = \sum_{n \geq 1} (\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x))\varphi_n(y)$.

- Montrer que $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et mesurable,
- Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $[0, 1]$ et que, pour tout $y \in [0, 1]$, $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur $[0, 1]$,
- Montrer que $F : x \mapsto \int_{[0, 1]} f(x, y) dy$ et $G : y \mapsto \int_{[0, 1]} f(x, y) dx$ sont intégrables sur $[0, 1]$. Calculer alors $\int_{[0, 1]} F(x) dx$ et $\int_{[0, 1]} G(y) dy$. Peut-on appliquer à f le théorème de Fubini ?

7.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

Exercice 7.10 (Propriétés élémentaires de λ_N) *Corrigé 145 page 455*

Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

- Soit $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$.
- Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer que $\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i[)$.
- Soit K est un compact de \mathbb{R}^N (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Montrer que $\lambda_N(K) < +\infty$.
- Soit O un ouvert non vide de \mathbb{R}^N . Montrer que $\lambda_N(O) > 0$.
- Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N -p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

6. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Exercice 7.11 (Régularité de λ_N) *Corrigé 146 page 457*

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de \mathbb{R}^N . (noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.)

1. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe O ouvert de \mathbb{R}^N et F fermé de \mathbb{R}^N tels que :

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Dédurre de la question précédente que $m(A) = \inf\{m(O), O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.

[On pourra s'inspirer de la démonstration de la régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (théorème 2.3).]

Exercice 7.12 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$)

Soit $N \geq 1$. Montrer que l'espace $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$). [S'inspirer de la démonstration faite pour le cas $N = 1$, théorème 5.5.]

Exercice 7.13 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1) *Corrigé 147 page 459*

Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de \mathbb{R}^d . On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

- (p1) μ est finie sur les compacts de \mathbb{R}^d , c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de \mathbb{R}^d ,
- (p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (voir la proposition 7.5) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note \mathcal{L}_μ^1 l'espace $\mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}_\mu^1$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x .

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}_\mu^1$.
2. Soit K un compact de \mathbb{R}^d et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x, K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x - y|, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.
 - (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
 - (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . On suppose que $f \in \mathcal{L}_\mu^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}_\mu^1$ et $\varepsilon > 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.

(b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, avec $\varphi_n = \varphi \star \rho_n$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante, voir la définition 8.4.]

6. (Continuité en moyenne ?)

(a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

(b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}_\mu^1$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω , finie sur les sous ensembles compacts de Ω . Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L_\mathbb{R}^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 7.14 (Invariance par translation de λ_N) *Corrigé 148 page 460*

Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \dots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$, de sorte que φ est une bijection de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N .

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2. Montrer que $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. [On pourra faire une récurrence sur N : La proposition 2.9 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ . On suppose que le résultat est vrai pour λ_{N-1} (et pour toute famille $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \dots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$). On le démontre alors pour λ_N en posant $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$ et en montrant que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ égale à λ_N sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On utilise pour conclure la partie "unicité" du théorème 7.1 sur la mesure produit.]

Exercice 7.15 (Changement de variables simple) *Corrigé 149 page 462*

Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \dots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{E}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$. [Utiliser l'exercice 7.14.]

2. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

Exercice 7.16 (Primitives de fonctions L^p) *Corrigé 150 page 463*

Soit $p \in [1, \infty[$. On note $L^p = L_\mathbb{R}^p([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Soit $f, g \in L^p$. On définit F et G de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (= \int_{]0, x[} f d\lambda), \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt \quad (= \int_{]0, x[} g d\lambda), \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

1. Montrer que F et G sont des fonctions continues et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|F(y) - F(x)| \leq C|y - x|^{1-\frac{1}{p}}$ et $|G(y) - G(x)| \leq C|y - x|^{1-\frac{1}{p}}$, pour tous $x, y \in [0, 1]$, $x < y$.

2. On suppose $p > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Montrer que, pour tout $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$, où $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$ sont des intervalles de \mathbb{R} (indépendants de x) dont les longueurs tendent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. [Utiliser la question 1.]

3. On suppose $p > 2$. Montrer que $E = \{(F(x), G(x)); x \in [0, 1]\}$ est une partie négligeable de \mathbb{R}^2 (muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R}^2). [En utilisant une majoration convenable des longueurs de $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$, inclure E (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dans une partie de \mathbb{R}^2 dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.]

Exercice 7.17 (Lemme de Comparaison)

Soit φ une fonction décroissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+ , on définit l'application de $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par:

$$\Phi(A, B) = \int \int_{A \times B} \varphi(|x - y|) dx dy.$$

Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $a = \lambda(A)$, $b = \lambda(B)$ (λ est la mesure de Lebesgue) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ tels que $A \subset [\alpha, \beta]$ et $B \subset [\alpha, \beta]$. Montrer que

$$\Phi(A, B) \geq \Phi([\alpha, \alpha + a], [\beta - b, \beta]).$$

Exercice 7.18

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_\varphi(x) = \varphi(x, x)$.

1. Montrer que f_φ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurable.
2. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurables. Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2 -p.p. $\nRightarrow f_\varphi = f_\psi$ λ -p.p.. (λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dont on suppose l'existence).
3. Soient φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurables t.q. :
 - (a) $\varphi(x, \cdot)$ et $\psi(x, \cdot)$ sont continues p.p. en $x \in \mathbb{R}$
 - (b) $\varphi(\cdot, y)$ et $\psi(\cdot, y)$ sont mesurables pour tout $y \in \mathbb{R}$

(Ces fonctions sont dites de "Carathéodory".)

- (a) Montrer que φ et ψ sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -mesurables.
- (b) Montrer que $\varphi = \psi$ λ_2 -p.p. $\Rightarrow \varphi(x, \cdot) = \psi(x, \cdot)$ partout, p.p. en $x \in \mathbb{R}$. En déduire que si $\varphi = \psi$ λ_2 -p.p., alors $f_\varphi = f_\psi$ λ -p.p..

7.7.4 Convolution

Exercice 7.19 (Propriétés élémentaires de la convolution) Corrigé 151 page 464

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

1. Montrer que $f \star g = g \star f$ p.p.. [Utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et sa conséquence pour les changements de variables simples (propositions 7.7 et 7.8).]
2. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K , compact de \mathbb{R}^N , t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f \star g$ est alors aussi à support compact. [On désigne par $B(0, \alpha)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon α . Comme f et g sont à support compact, il existe a et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0, b)^c$. Montrer que $f \star g = 0$ p.p. sur $B(0, a + b)^c$.]

Exercice 7.20 (Convolution $L^p - C_c^\infty$) Corrigé 152 page 466

Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$) et $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On pourra se limiter au cas $N = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose alors

$$f \star \rho(x) = \int f(\cdot)\rho(x - \cdot)d\lambda_N.$$

2. Montrer que $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.
3. On suppose maintenant que f est à support compact, c'est à dire qu'il existe un compact de \mathbb{R} , noté K , t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c , montrer que $f \star \rho$ est aussi à support compact.

Exercice 7.21 (Inégalité de Young) Corrigé 153 page 467

Soient $1 < p < +\infty$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Montrer que $f \star g$ est définie p.p., $f \star g \in L^q_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $\|f \star g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. [Ecrire $\int (\int |f(x-y)g(y)|dy)^p dx = \int (\int |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|dy)^p dx$, avec $q = \frac{p}{p-1}$. Appliquer l'inégalité de Hölder puis le théorème de Fubini-Tonelli].

Exercice 7.22 (Itérations de convolution)

Soient $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in L^1$ t.q. $f = 0$ p.p. sur \mathbb{R}_- . On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f^{*n} par : $f^{*1} = f$ et $f^{*n} = f^{*(n-1)} \star f$ pour $n \geq 1$. Pour $\lambda \geq 0$, on pose : $g(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} |f(t)| dt$.

1. (a) Montrer que f^{*n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $f^{*n} = 0$ sur \mathbb{R}_- .
 (b) Montrer, par récurrence sur n , que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} |f^{*n}(t)| dt \leq (g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $n \geq 1$.
 (c) En déduire que $\int_0^x |f^{*n}(t)| dt \leq e^{\alpha x} (g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$.
2. Soit $h \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $h \star f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $h \star f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Remarquer de même que $h \star f^{*n} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose maintenant que, $h = 0$ sur \mathbb{R}_- ; montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h \star f^{*n}(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 7.23 Soient μ et ν des mesures sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit $\mu \star \nu$ par : $\mu \star \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+y) d\mu(x) d\nu(y)$.

1. Montrer que $\mu \star \nu$ est une mesure.
2. Montrer que si μ et ν sont des probabilités, alors $\mu \star \nu$ est une probabilité.
3. Montrer que si μ et ν sont des mesures de densités respectives f et g (par rapport à Lebesgue), alors $\mu \star \nu$ est une mesure de densité $f \star g$.

7.7.5 Changement de variables

Exercice 7.24 (Fonction Gamma)

Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$. On pourra utiliser $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, \infty[$ et que $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt$, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 7.25 (Calcul d'un volume)

Calculer le volume de E où $E = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3; z \geq 4xy\}$.

Exercice 7.26 Corrigé 154 page 468

1. Vérifier que si $n \geq 1$ $\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n \left(\int_0^\infty e^{-xt} dt \right) \sin x dx$.
2. Calculer $F_n(t) = \int_0^n e^{-xt} \sin x dx$ ($t \geq 0$).
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty F_n(t) dt$. (F_n est définie à la question précédente.)
4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7.27 (Coordonnées polaires) Corrigé 155 page 470

1. Calculer $\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ (on rappelle que $dx dy$ désigne $d\lambda_2(x, y)$). [On pourra utiliser le passage en coordonnées polaires.]
2. Calculer $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx$.

Exercice 7.28

Soient $\Omega = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + 4y^2 < 4, x > 0, y > 0\}$, $G = \{(x, y) \in \Omega \mid y < x\}$, $\Omega' = \{(x', y') \mid 1 < x' < 4, 0 < y'\}$ et $G' = \Omega' \cap \{y' < 1\}$.

1. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ tel que $T(G) = G'$.
2. Soit $f(x, y) = \frac{x^2 - 4y^2}{4x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$. Montrer que f est borélienne sur \mathbb{R}^2 , intégrable sur G et calculer son intégrale. f est-elle intégrable sur Ω ?

Exercice 7.29 (Sur volume de la boule unité dans \mathbb{R}^N)

On note C_N le volume de la boule unité dans \mathbb{R}^N . Montrer que, si $\rho > 0$ et $B^N(\rho)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon ρ dans \mathbb{R}^N , on a $\lambda_N(B^N(\rho)) = \rho^N C_N$. En déduire la relation de récurrence suivante: $C_{N+1} = C_N \int_0^1 (1-u)^{N/2} u^{-1/2} du$.

Exercice 7.30 (Sur volume de la boule unité dans \mathbb{R}^N , suite)

On appelle fonction eulérienne de première espèce la fonction $B :]0, \infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$.

1. Montrer que B est bien définie et C^1 sur $]0, \infty[^2$.
2. Montrer que $B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)^{2p-1} \cos(\varphi)^{2q-1} d\varphi = \int_0^\infty \frac{2u^{2p-1}}{(1+u^2)^{p+q}} du$. En déduire $B(1/2, 1/2)$.
3. Montrer que $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ [on pourra calculer $\Gamma(p)\Gamma(q)$ en introduisant le difféomorphisme $\varphi(t, v) = (tv, t(1-v))$]. En déduire $\Gamma(1/2)$.
4. Calculer, en fonction de Γ , les constantes C_N de l'exercice précédent.

Exercice 7.31 (Cordonnées polaires dans \mathbb{R}^N) *Corrigé 156 page 471*

On note S^{N-1} la sphère de centre 0 et rayon 1 dans \mathbb{R}^N (i.e. $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = 1\}$, où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne usuelle). Pour $A \subset S^{N-1}$, on pose $\tilde{A} = \{tx, t \in [0, 1], x \in A\}$.

Montrer que si A est un borélien de S^{N-1} , alors \tilde{A} est un borélien de \mathbb{R}^N .

On définit alors, quand A est un borélien de S^{N-1} , $\sigma(A) = N\lambda_N(\tilde{A})$. Montrer que σ définit une mesure sur les borélien de S^{N-1} .

Montrer que, pour tout $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi) d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1} d\rho.$$

Trouver alors les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x \rightarrow |x|^\alpha$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^N \setminus B_1$ ou sur B_1 , avec $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 1\}$.

Exercice 7.32 (Changement de variables $W^{1,1}$ croissant) *Corrigé 157 page 473*

Soit $f \in \mathcal{L}_R^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ p.p.. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. (On rappelle que, pour $a < b$, $\int_a^b f(t) dt$ désigne $\int 1_{]a,b[} f d\lambda$.)

1. Montrer que $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que φ est strictement croissante.

On note I_m l'image de φ (I_m est donc un intervalle dont les bornes sont 0 et $\int f d\lambda$) et on note $\psi : I_m \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction inverse de φ (ψ est donc continue de I_m dans \mathbb{R}).

On rappelle que si I est un intervalle de \mathbb{R} et $\mathcal{B}(I)$ est sa tribu borélienne, on a $\mathcal{B}(I) = \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $A \subset \mathbb{R}$, on note $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\}$. Pour $A \subset I_m$, on note $\psi(A) = \{\psi(x), x \in A\}$.

2. Montrer que $\{\varphi(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(I_m)$ et que $\{\psi(A), A \in \mathcal{B}(I_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Montrer que $\lambda(\varphi(I)) = \int_I f d\lambda$.
4. Soit O un ouvert de \mathbb{R} . Montrer que $\lambda(\varphi(O)) = \int_O f d\lambda$. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$O \text{ ouvert, } \lambda(O) \leq \delta \Rightarrow \lambda(\varphi(O)) \leq \varepsilon.$$

5. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(\varphi(A)) = \int_A f d\lambda$. [On pourra, par exemple, utiliser la régularité de λ et la question précédente.]
6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$.

(a) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $g = 1_B$. Montrer que :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t) dt = \int_a^b g(\varphi(s)) f(s) ds. \quad (7.19)$$

[Prendre $A = \psi(B \cap I_m) \cap]a, b[$ et utiliser la question précédente.]

(b) Montrer que (7.19) est encore vraie pour $g \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis pour $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(c) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que $g1_{]a, \varphi(b)[} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer $g \circ \varphi f 1_{]a, b[} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (7.19) est vraie.

NB: On peut montrer que φ est dérivable p.p. et que $\varphi' = f$ p.p.. La formule (7.19) est alors la formule habituelle de changement de variable. Noter aussi que la fonction φ , restreinte à l'intervalle $]a, b[$, appartient à un espace appelé $W^{1,1}(]a, b[)$ (ce qui explique le titre de l'exercice).

Chapter 8

Densité, séparabilité, et compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$

Tout ce chapitre est consacré aux espaces $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ où Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne de Ω , λ_N désigne la restriction à $\mathcal{B}(\Omega)$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (aussi notée λ_N) et $1 \leq p \leq \infty$.

On notera toujours $L^p(\Omega) = L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$.

8.1 Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega)$

8.1.1 Densité des fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

Définition 8.1 Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et f une fonction définie de Ω dans \mathbb{R} . On dit que f est à support compact (dans Ω) si il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $f = 0$ sur $\Omega \setminus K$.

On note souvent $\text{supp}(f)$ l'adhérence dans Ω de l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $f(x) \neq 0$. On peut montrer que f est à support compact si et seulement si $\text{supp}(f)$ est compact.

Définition 8.2 Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et f une fonction définie de Ω dans \mathbb{R} . On dit que $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ si

1. f est de classe C^∞ (de Ω dans \mathbb{R}).
2. f est à support compact (dans Ω).

On note aussi $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarque 8.1 Si $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$, la fonction f définie par $f(x) = x(x - 1)$ est de classe C^∞ sur Ω , mais elle n'est pas à support compact. En effet, il n'existe pas de compact inclus dans $]0, 1[$ t.q. f soit nulle en dehors de ce compact.

Par contre, si f est de classe C^∞ sur $]0, 1[$ et si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x \in]0, \varepsilon[$ et pour $x \in]1 - \varepsilon, 1[$, alors $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Théorème 8.1 (Densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$) Soient $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N (par exemple, $\Omega = \mathbb{R}^N$). Alors :

$C_c(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}) \text{ t.q. } \|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon. \quad (8.1)$$

DÉMONSTRATION : La démonstration de ce résultat est faite dans l'exercice 6.4 pour le cas $\Omega = \mathbb{R}$. La généralisation donnée ici se démontre de manière très voisine (grâce au résultat de régularité, proposition 7.5), voir l'exercice 8.1. ■

Une conséquence importante du théorème 8.1 est la "continuité en moyenne" que l'on donne maintenant.

Théorème 8.2 (Continuité en moyenne) Soient $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$, et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors, $\|f(\cdot + h) - f\|_p \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, c'est-à-dire :

$$\int |f(x+h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION : La démonstration est ici encore très similaire à la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.4, elle est proposée dans l'exercice 8.2. ■

Remarque 8.2 (Attention à L^∞ !) Les deux résultats précédents sont faux dans L^∞ . Considérer par exemple le cas $N = 1$ et la fonction $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$, en confondant f avec sa classe). On peut montrer que (voir l'exercice 8.3) :

1. $\forall \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.
2. $\forall h > 0, \|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$.

8.1.2 Régularisation par convolution

Si $a \in \mathbb{R}_+$, on note B_a la boule fermée de centre 0 et de rayon a de \mathbb{R}^N .

Définition 8.3 (L^1_{loc})

Soient $N \geq 1$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On définit que f est "localement intégrable sur Ω " si $f1_K \in L^1(\Omega)$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ t.q. $f = g$ p.p. sur K ") pour tout compact $K \in \Omega$.

On note $L^1_{loc}(\Omega) (= L^1_{loc}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N))$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω .

Remarque 8.3 Soient $N \geq 1$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on a $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ (ceci est une conséquence immédiate du résultat d'inclusion entre les espaces L^p , proposition 6.8).

Définition 8.4 (Famille régularisante) Soit $N \geq 1$ et soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\{x \in \mathbb{R}^N; \rho(x) \neq 0\} \subset B_1$ et $\int \rho(x) dx = 1$. On appelle famille régularisante (ou famille de noyaux régularisants) la famille de fonctions $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ définie par : $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 8.4 Dans la définition précédente, il est facile de vérifier que $\{x \in \mathbb{R}^N; \rho_n(x) \neq 0\} \subset B_{\frac{1}{n}}$ et $\int \rho_n(x) dx = 1$

Il existe bien des fonctions vérifiant les propriétés demandées pour ρ dans la définition 8.4. Pour $N = 1$, par exemple, il suffit de prendre $\rho(x) = \alpha \exp(\frac{1}{x^2-1})$ pour $x \in]-1, 1[$ et $\rho(x) = 0$ pour $x \notin]-1, 1[$, avec $\alpha > 0$ choisi pour avoir $\int \rho(x) dx = 1$.

Lemme 8.1 Soient $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f \star \rho_n$ est définie partout sur \mathbb{R}^N et $f \star \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. De plus, si il existe $a > 0$ t.q. $f = 0$ p.p. sur B_a^c , on a alors $f \star \rho_n = 0$ sur $B_{a+\frac{1}{n}}^c$ ($f \star \rho_n$ est donc à support compact).

DÉMONSTRATION : La démonstration du fait que $f \star \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est donnée dans l'exercice 7.20. La seconde partie est donnée dans les exercices 7.20 et 7.19. L'indication de la seconde question de l'exercice 7.19 donne le support indiqué ici pour $f \star \rho_n$. ■

Proposition 8.1 Soient $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f \star \rho_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

DÉMONSTRATION : La démonstration est une conséquence du théorème de continuité en moyenne (théorème 8.2).

On choisit un représentant de f , encore noté f . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = f \star \rho_n$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$f_n(x) - f(x) = \int f(x-y)\rho_n(y)dy - f(x) \int \rho_n(y)dy = \int (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)dy,$$

et donc :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq \left(\int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy \right)^p.$$

Pour $p > 1$, on utilise l'inégalité de Hölder en écrivant $\rho_n = \rho_n^{\frac{1}{q}} \rho_n^{\frac{1}{q}}$ (avec $q = p/(p-1)$) et on obtient (ce qui est aussi immédiatement vrai pour $p = 1$) :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy \left(\int \rho_n(y)dy \right)^{\frac{p}{q}} = \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy. \quad (8.2)$$

On remarque maintenant que l'application $(x, y)^t \mapsto (f(y) - f(x))$ est mesurable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} (munis de leur tribu borélienne), ceci est une conséquence (par exemple) de la proposition 7.3 et de la mesurabilité de la somme d'applications mesurables. L'application $(x, y)^t \mapsto (x, x-y)$ est mesurable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 (car continue). Par composition, l'application $(x, y)^t \mapsto (f(x-y) - f(x))$ est donc mesurable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . On en déduit, en utilisant une nouvelle fois la mesurabilité de la composée d'applications mesurables (et du produit d'applications mesurables), que $(x, y)^t \mapsto |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)$ est mesurable (positive) de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour déduire de (8.2) que :

$$\int |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \int \left(\int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy \right) dx = \int \left(\int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dx \right) dy = \int_{B_{\frac{1}{n}}^c} \|f(\cdot - y) - f\|_p^p \rho_n(y)dy. \quad (8.3)$$

On utilise maintenant le théorème 8.2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}^N, |h| \leq \eta \Rightarrow \|f(\cdot - h) - f\|_p \leq \varepsilon.$$

On déduit donc de (8.3) que :

$$\frac{1}{n} \leq \eta \Rightarrow \|f_n - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Le deux résultats précédents permettent de démontrer le théorème de densité suivant :

Théorème 8.3 Soient $N \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

DÉMONSTRATION : La démonstration proposée ici utilise une méthode dite de “troncature et régularisation”.

Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on dit que f est “à support compact” si il existe K compact de \mathbb{R}^N t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c . On note A l’ensemble des $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ à support compact.

Étape 1. On montre dans cette étape que A est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f1_{B_n}$. Comme $f_n \rightarrow f$ p.p. quand $n \rightarrow \infty$ et $|f_n| \leq |f|$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p (on utilise ici le fait que $p < \infty$). Il donne que $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow \infty$. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, on a bien montré la densité de A dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Étape 2. Soit maintenant $f \in A$. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer qu’il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow \infty$. Or cette suite est donné avec $f_n = f \star \rho_n$ où $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille régularisante. En effet, le lemme 8.1 donne que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et la proposition 8.1 donne que $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow \infty$. ■

On rappelle (remarque 8.2) que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (et donc aussi $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$) n’est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Il est intéressant aussi de remarquer que le théorème précédent (théorème 8.3) est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), finie sur les compacts. Toutefois la démonstration donnée ici doit alors être modifiée. Ceci est fait dans l’exercice 7.13 pour $p = 1$ (et la généralisation pour traiter tous les cas $p \in [1, \infty[$ est assez simple).

8.1.3 Densité de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

On a aussi un résultat de densité pour les fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^N .

Théorème 8.4 (Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$) Soient $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Alors, $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

DÉMONSTRATION : Pour $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, on pose $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N; d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. On remarque d’abord (en utilisant, comme pour le théorème précédent, le théorème de convergence dominée dans L^p) que $f1_{K_n} \rightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$. On peut donc choisir $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\|f - f_{n_0}\|_p \leq \varepsilon$.

On pose maintenant $g = f_{n_0}$. On peut considérer que $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a $g = 0$ p.p. sur K^c avec $K = K_{n_0}$. En prenant une famille régularisante, $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, le lemme 8.1 et la proposition 8.1 donnent que $g \star \rho_n \rightarrow g$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \rightarrow \infty$ et $(g \star \rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Il suffit alors de remarquer que la restriction de $g \star \rho_n$ à Ω est à support compact dans Ω dès que $n > n_0$ pour conclure la démonstration. ■

Ici aussi, le théorème 8.4 est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de Ω , finie sur les compacts. La démonstration donnée ici doit alors être modifiée (voir l’exercice 7.13).

8.2 Séparabilité de $L^p(\Omega)$

Proposition 8.2 Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Alors, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

DÉMONSTRATION : La démonstration est l'objet de l'exercice 8.4 (et de 6.5 pour le cas $\Omega = \mathbb{R}$). ■

Les espaces du type L^∞ ne sont, en général, pas séparables. L'exercice 8.5 montre que, par exemple, $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ n'est pas séparable.

8.3 Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est (séquentiellement) compact si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge. Notons que cette notion de compacité "séquentielle" est équivalente à la notion de compacité "de Borel-Lebesgue" (i.e. de tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini) dès que E est un espace métrique (ce qui est notre cas, car E est un espace vectoriel normé).

Une partie A de E est dite relativement compacte si son adhérence est compacte (ou encore si il existe un compact K de E tel que $A \subset K$).

Dans le cas où E est un espace de dimension finie, A est compacte si et seulement si A est fermée bornée, et A est relativement compacte si et seulement si A est bornée.

Ces deux caractérisations sont fausses si $\dim(E) = +\infty$. On sait par le théorème de Riesz que la boule unité fermée d'un evn E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

On s'intéresse ici au cas $E = L^p(\Omega)$ (Ω ouvert non vide de \mathbb{R}^N), espace vectoriel normé de dimension infinie, et on voudrait caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ? Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée). La deuxième condition est, pour $1 \leq p < +\infty$ et Ω bornée, que la partie soit équicontinue en moyenne, au sens précisé dans le théorème suivant :

Théorème 8.5 (Kolmogorov) Soit $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq p < +\infty$; on considère ici l'espace mesuré $(E, T, m) = (\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Soit $A \subset L^p(\Omega)$; A est relativement compacte si et seulement si :

1. Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|f\|_p \leq C$ pour tout $f \in A$,
2. la partie A est équicontinue en moyenne, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$\text{pour tout } f \in A, |h| \leq \delta \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_p \leq \varepsilon,$$

3. la partie A est "équi-petite" à l'infini, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$, t.q.

$$\int_{B_a^c} |\tilde{f}|^p dm \leq \varepsilon \text{ pour tout } f \in A,$$

où \tilde{f} est la prolongée de f par 0 en dehors de Ω .

La démonstration de ce théorème se fait en utilisant la densité de l'espace de fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$, et le théorème d'Ascoli, que nous rappelons ici :

Théorème 8.6 (Ascoli) Soient K une partie compacte de \mathbb{R} et A une partie de l'espace vectoriel $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; A est relativement compacte si et seulement si A est bornée et uniformément équicontinue, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x, y \in K, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \forall f \in A$.

Corollaire 8.1 Soient $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), 1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. On suppose que la famille $A = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 du théorème de Kolmogorov. On peut alors extraire de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite, notée $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^p(\Omega)$ t.q. $f_{\varphi(n)} \rightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$.

8.4 Propriété de compacité faible

On a introduit au chapitre 6 la convergence faible \star dans le dual d'un espace de Banach. On a une propriété de compacité très utile lorsque l'espace de Banach considéré est séparable :

Proposition 8.3 (Compacité faible- \star séquentielle des bornés du dual d'un séparable)

Soit F un espace de Banach séparable et F' son dual topologique ; soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de F' ; alors il existe une sous-suite $(T_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $T \in F'$ t.q. la sous-suite $(T_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers T dans F' pour la topologie faible \star (i.e. $T_{n_k}(u) \rightarrow T(u)$ (dans \mathbb{R}) pour tout élément u de F .)

DÉMONSTRATION : procédé diagonal...

Cette propriété s'applique donc aux suites bornées de $L^\infty(\Omega)$; en effet, grâce au théorème 6.9 et à la proposition 8.2), l'espace $L^\infty(\Omega)$ peut être identifié au dual de l'espace $L^1(\Omega)$, qui est un espace séparable (Ω est ici un borélien de \mathbb{R}^N). On a donc, par exemple, le résultat suivant :

Proposition 8.4 (Compacité faible \star séquentielle des bornés de L^∞)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_\infty \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous suite, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour la topologie faible \star .

Dans le cas $p \in]1, +\infty[$, on peut écrire une propriété de compacité faible :

Proposition 8.5 (Compacité faible séquentielle des bornés de L^p)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda), p \in]1, +\infty[$, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_p \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous suite, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $u_n \rightarrow u$ dans L^p pour la topologie faible, c'est-à-dire t.q. $\int (u_n v - uv) dm \rightarrow 0$ pour tout $v \in L^q$, où $q = \frac{p}{p-1}$.

8.5 Exercices

Exercice 8.1 (Densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$)

Soient, $N \geq 1, p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Montrer que $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$. [Reprendre la démonstration de l'exercice 6.4 qui traite le cas $\Omega = \mathbb{R}$. Utiliser le résultat de régularité, proposition 7.5.]

Exercice 8.2 (Continuité en moyenne)

Soient $N \geq 1, p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_p \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. [Reprendre la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.4]

Exercice 8.3 (Non densité de C_c dans L^∞) Corrigé 158 page 475

On considère $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), en confondant f avec sa classe).

1. Montrer que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 8.4 (Séparabilité de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$) Corrigé 159 page 475

Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

On pourra se limiter au cas $\Omega = \mathbb{R}$ et raisonner ainsi : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $q = 0, 1, \dots, 2n^2 - 1$, on note: $I_q^n = [-n + \frac{q}{n}, -n + \frac{q+1}{n}[$. On pose : $A_n = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f|_{I_q^n} = r, \text{ où } r \in \mathbb{Q}, \text{ et } f = 0 \text{ sur } [-n, n]^c\}$. On pose $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.
2. Montrer que, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.
3. Conclure par la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}, \cdot)$ (théorème 8.1).

Exercice 8.5 (Non séparabilité de $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) Corrigé 160 page 476

On note B l'ensemble des f appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = 0$ p.p. sur $]n, n+1[$ ou $f = 1$ p.p. sur $]n, n+1[$.

1. Montrer que B est non dénombrable. [Construire une injection de l'ensemble des parties de \mathbb{N} dans B .]
2. Soit A une partie dense de $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que pour tout $f \in B$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{4}$. En déduire qu'on peut construire une application injective de B dans A .
3. Montrer que $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ n'est pas séparable.

Exercice 8.6 (Convolution $L^p - L^q$) Corrigé 161 page 477

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$.
 - (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot)g(x - \cdot)$ est intégrable.
On peut donc définir $(f \star g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que $|(f \star g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - (c) Montrer que $f \star g$ est continue sur \mathbb{R} .
2. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.
 - (a) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer qu'on peut définir $F \star G$ sur \mathbb{R} en posant $F \star G = f \star g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. [Il suffit donc de démontrer que $f \star g$ ne dépend pas du choix de f dans F et g dans G .]
 - (b) Montrer que l'application $(F, G) \mapsto F \star G$ est bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de la norme de la convergence uniforme).

(c) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer que $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire que la fonction $F \star G$ est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et que $(F \star G)(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$).

3. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $(f \star g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \star g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Soit $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$. Montrer que $(F \star G)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en posant $F \star G = f \star g$, avec $f \in F$ et $g \in G$.

(c) L'application $(F, G) \mapsto F \star G$ est-elle continue de $L^1 \times L^\infty$ dans C_b ?

(d) A-t-on $F \star G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$?

Exercice 8.7 (Caractérisation d'une fonction par son action sur C_c^∞) *Corrigé 162 page 480*

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R}^d et que l'élément d'intégration par rapport à λ_d est noté dx (au lieu de $d\lambda_d(x)$). On rappelle aussi que $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne dans \mathbb{R}^d . On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. :

- $\rho(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \geq 1$,
- $\rho(x) \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\int \rho(x) dx = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note ρ_n la fonction définie par $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$, de sorte que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de noyaux régularisants (voir le chapitre 8 du cours).

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $f \star \rho_n(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que $f \star \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(c) Montrer que $f = 0$ p.p..

2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ (c'est-à-dire que g est une fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} t.q. $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ pour tout compact K de Ω).

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. (La fonction φ est prolongée par 0 hors de Ω .)

On suppose maintenant que $\int g(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Ω_n l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $|x - y| > \frac{1}{n}$ pour tout $y \in \Omega^c$. Montrer $g \star \rho_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \Omega_n$ et que $g \star \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

(c) Soit K un compact de Ω , montrer que $g1_K = 0$ p.p.. En déduire que $g = 0$ p.p. sur Ω .

Exercice 8.8 (Théorème de compacité dans L^1) *Corrigé 163 page 482*

On pose $L^1(]0, 1]) = L^1_{\mathbb{R}}(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1]), \lambda)$ et $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou sa trace sur $\mathcal{B}(]0, 1])$). Pour $f \in L^1(]0, 1[)$, on identifie f avec l'un de ses représentants et on note \tilde{f} la fonction définie par $\tilde{f} = f$ sur $]0, 1[$ et $\tilde{f} = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus]0, 1[$.

Soit \mathcal{A} une partie de $L^1(]0, 1])$.

On rappelle que \mathcal{A} est relativement compacte dans $L^1(]0, 1])$ si et seulement si \mathcal{A} est précompacte (c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathcal{A} \subset \cup_{i=1}^p B(f_i, \varepsilon)$, où $B(f, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $L^1(]0, 1])$ de centre f et de rayon ε).

Partie I (condition suffisante). On suppose, dans cette partie, que \mathcal{A} est relativement compacte dans $L^1(]0, 1])$.

1. Montrer que \mathcal{A} est une partie bornée de $L^1(]0, 1])$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}, |h| \leq \alpha, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon. \quad (8.4)$$

Partie II (condition nécessaire). On suppose, dans cette partie, que \mathcal{A} une partie bornée de $L^1(]0, 1])$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ vérifiant (8.4).

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ et $\int \rho(x) dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ si $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f} \star \rho_n - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon. \quad (8.5)$$

[On pourra remarquer que $\tilde{f} \star \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)) \rho(y) dy$.]

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathcal{A}$, on note f_n la restriction à $[0, 1]$ de la fonction $\tilde{f} \star \rho_n$.
 - (a) Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de n , ρ et de la borne de \mathcal{A} dans $L^1(]0, 1])$ t.q. :

$$\begin{aligned} x \in [0, 1], f \in \mathcal{A} &\Rightarrow |f_n(x)| \leq C_1, \\ x, y \in [0, 1], f \in \mathcal{A} &\Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq C_2|x - y|. \end{aligned}$$

En déduire que l'ensemble $\{f_n, f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ [Utiliser le théorème d'Ascoli.]

- (b) Montrer que l'ensemble $\{f_n, f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0, 1])$.
3. Montrer que la partie \mathcal{A} est relativement compacte dans $L^1(]0, 1])$.

Chapter 9

Vecteurs aléatoires

9.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 9.1 (Vecteur aléatoire) Soit $d \geq 1$ et (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. On appelle vecteur aléatoire (souvent noté v.a.) de dimension d une application mesurable de Ω dans \mathbb{R}^d (où \mathbb{R}^d est muni de la tribu borélienne).

Noter que la notation “v.a.” signifie indifféremment “variable(s) aléatoire(s)” ou “vecteur(s) aléatoire(s)”.

Proposition 9.1 Soit $d > 1$ et (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Soit X une application de Ω dans \mathbb{R}^d . On note X_1, \dots, X_d les composantes de X (de sorte de $X = (X_1, \dots, X_d)^t$). On note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X (et $\sigma(X_i)$, pour $i = 1, \dots, d$ la tribu engendrée par X_i). On a alors :

1. $\sigma(X)$ est la plus petite tribu contenant les tribus $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_d)$.
2. X est un v.a. si et seulement si X_i est, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, une v.a.r..

DÉMONSTRATION : On rappelle que $\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ et que, pour tout i , $\sigma(X_i) = \{X_i^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On note $\mathcal{C} = \{\prod_{i=1}^d A_i, A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ pour tout } i\}$. On rappelle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (voir l'exercice 7.10) et que \mathcal{C} engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (c'est même encore vrai si on se limite à prendre pour A_i des intervalles, ouverts, voir l'exercice 2.7).

On note T la plus petite tribu contenant les tribus $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_d)$. Soit $i \in \{1, \dots, d\}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En prenant $B = \prod_{j=1}^d A_j$ avec $A_j = \mathbb{R}$ si $j \neq i$ et $A_i = A$, on a $X^{-1}(B) \in \sigma(X)$ (car $B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) et $X^{-1}(B) = X_i^{-1}(A)$. On en déduit $X_i^{-1}(A) \in \sigma(X)$ et donc $\sigma(X_i) \subset \sigma(X)$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. Comme $\sigma(X)$ est une tribu, on a donc $T \subset \sigma(X)$.

Pour montrer l'inclusion inverse (c'est-à-dire $T \supset \sigma(X)$). On remarque que, si $B \in \mathcal{C}$ on a $B = \prod_{i=1}^d A_i$ avec des A_i appartenant à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc $X^{-1}(B) = \cap_{i=1}^d X_i^{-1}(A_i) \in T$ (car $X_i^{-1}(A_i) \in \sigma(X_i) \subset T$). Or, il est facile de voir que $\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \text{ t.q. } X^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu. Cette tribu contient \mathcal{C} , elle contient donc la tribu engendrée par \mathcal{C} , c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On vient donc de montrer que $\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \text{ t.q. } X^{-1}(B) \in T\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire que $X^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ou encore que $\sigma(X) \subset T$. On a bien, finalement, $\sigma(X) = T$, ce qui donne le premier item de la proposition.

Le deuxième item est un conséquence facile du premier. En effet, si X est un v.a., on a pour tout i , $\sigma(X_i) \subset \sigma(X) \subset \mathcal{A}$ et donc X_i est une v.a.r.. Réciproquement; si X_i est, pour tout i , une v.a.r., on a

$\sigma(X_i) \subset \mathcal{A}$ pour tout i . Comme \mathcal{A} est une tribu, on a donc $\mathcal{A} \supset T$ et comme $T = \sigma(X)$ on en déduit que X est un v.a. ■

La démonstration de la proposition 9.1 n'utilise pas vraiment le fait que les X_i soient des applications à valeurs dans \mathbb{R} . Elle se généralise donc facilement au cas où les X_i sont des applications à valeurs dans \mathbb{R}^{d_i} .

Proposition 9.2 Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $d_1, \dots, d_p \in \mathbb{N}^*$. soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable et, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, X_i une application de Ω dans \mathbb{R}^{d_i} . On note $X = (X_1, \dots, X_d)^t$, de sorte que X est une application de Ω dans \mathbb{R}^d avec $d = d_1 + \dots + d_p$. Soit $d \geq 1$ et (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Soit X une application de Ω dans \mathbb{R}^d . On note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X (et $\sigma(X_i)$, pour $i = 1, \dots, p$ la tribu engendrée par X_i). On a alors :

1. $\sigma(X)$ est la plus petite tribu contenant les tribus $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_p)$.
2. X est un v.a. (de dimension d) si et seulement si X_i est, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, un v.a. (de dimension d_i).

Définition 9.2 (Loi d'un v.a.) Soit (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d . On appelle loi de probabilité de X , et on note cette loi P_X ou p_X , la probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ image par X de p (c'est-à-dire $P_X(A) = p(X^{-1}(A))$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$). Si (X_1, \dots, X_d) sont les composantes de X , La probabilité p_X est aussi appelée loi conjointe de (X_1, \dots, X_d) .

Un exemple important est la loi normale multidimensionnelle.

Définition 9.3 (Loi normale multidimensionnelle) Soit (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d . Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice (à coefficients réels, de taille $d \times d$) s.d.p. (c'est-à-dire symétrique définie positive). Le v.a. X a pour loi $\mathcal{N}(m, D)$ (loi normale de paramètre m et D) si $P_X = f \lambda_d$ avec :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det(D)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^t D^{-1}(x-m)\right) \quad \lambda_d\text{-p.p. en } x \in \mathbb{R}^d.$$

Si D est seulement semi-définie positive (c'est-à-dire $Du \cdot u \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$), au lieu d'être définie positive (c'est-à-dire $Du \cdot u > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $u \neq 0$), la loi normale $\mathcal{N}(0, D)$ est aussi définie, voir la proposition 9.9, mais ce n'est pas une loi de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue), voir l'exercice 10.9 (et l'exercice 9.14 qui donne un exemple de loi normale bidimensionnelle qui n'est pas de densité).

Nous verrons dans la section 9.3 que si X est un v.a. suivant une loi normale multidimensionnelle, X est un v.a. gaussien. L'extension de la définition de la loi normale multidimensionnelle au cas D non inversible permettra alors de dire que les v.a. gaussiens sont exactement ceux qui suivent une loi normale multidimensionnelle (proposition 9.9).

Le fait que les composantes du v.a. X suivent une loi normale ne donne pas que X suit une loi normale multidimensionnelle (voir, par exemple, l'exercice 10.10). Mais, si les composantes du v.a. X suivent une loi normale et sont indépendantes, le v.a. X suit alors une loi normale multidimensionnelle (cf. l'exercice 9.11 ou l'exercice 10.10).

Définition 9.4 (i-ème projecteur) Soit $d \geq 1$. On appelle i -ème projecteur de \mathbb{R}^d l'application π_i , de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , qui a un vecteur de \mathbb{R}^d fait correspondre sa i -ème composante dans la base canonique de \mathbb{R}^d .

Définition 9.5 (Probabilité marginale) Soit (Ω, \mathcal{A}, p) espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un vecteur aléatoire de dimension d . On appelle i -ème probabilité marginale du vecteur aléatoire X la mesure image de p_X par le i -ème projecteur π_i . La remarque suivante montre que cette probabilité marginale est en fait la loi de X_i notée p_{X_i} .

Remarque 9.1 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) espace probabilisé, $d \geq 1$ et $X = (X_1, \dots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d . On note q_i la i -ème probabilité marginale du vecteur aléatoire X . Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, par définition de la loi marginale, on a :

$$q_i(B) = p_X(\pi_i^{-1}(B)) = p(X^{-1}(\pi_i^{-1}(B))).$$

Comme $X_i = \pi_i \circ X$, on a donc :

$$q_i(B) = p(X_i^{-1}(B)).$$

La probabilité q_i est donc aussi la loi de la variable aléatoire X_i .

Remarque 9.2 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) espace probabilisé, $d > 1$ et $X = (X_1, \dots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d . La connaissance de p_X entraîne la connaissance des p_{X_i} . La réciproque est en général fausse.

On définit la densité d'une loi de manière analogue au cas scalaire.

Définition 9.6 (Loi de densité) Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ ($N \geq 1$), on dit que p est une probabilité de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) s'il existe $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ t.q. $p = f \lambda_N$.

De même que dans le cas scalaire, on a un théorème qui permet de calculer des intégrales par rapport à la loi image :

Théorème 9.1 (Loi image) Soit $d \geq 1$, (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé, X un v.a. de dimension d et p_X la loi de X . Soit φ une application borélienne de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . On a alors :

1. $\varphi \circ X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ si et seulement si $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), p_X)$,
2. L'égalité

$$\int_{\Omega} \varphi \circ X dp(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) dp_X(s),$$

est vrai si φ prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+ , ou si φ est bornée ou encore si $\varphi \circ X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, p)$. (On rappelle que $\varphi \circ X$ est en général notée $\varphi(X)$).

Définition 9.7 (Fonction de répartition)

Soit $d \geq 1$, (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé, $X = (X_1, \dots, X_d)^t$ un v.a. de dimension d et p_X la loi de X . On appelle fonction de répartition du vecteur aléatoire X la fonction définie de \mathbb{R}^d dans $[0, 1]$ par : $F_X(t_1, \dots, t_d) = p([X_1 \leq t_1, \dots, X_d \leq t_d])$.

Proposition 9.3 Soit $d \geq 1$, (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé et X un v.a. de dimension d de fonction de répartition F_X . Alors :

1. $0 \leq F_X(t) \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$;
2. Si $t, t' \in \mathbb{R}^d$, $t \leq t'$ (i.e. $t_i \leq t'_i$, pour tout $i = 1, \dots, d$), $F_X(t) \leq F_X(t')$;
3. F_X est continue à droite en tout point ;

4. $F_X(t_1, \dots, t_d) \rightarrow 1$ lorsque $(t_1, \dots, t_d) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)$;
5. $F_X(t_1, \dots, t_d) \rightarrow 0$ lorsque $t_i \rightarrow -\infty$ (à i fixé).

DÉMONSTRATION : La démonstration découle facilement des propriétés d'une mesure (monotonie, continuité croissante et continuité décroissante). ■

Proposition 9.4 Soit $d \geq 1$, (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé et X un v.a. de dimension d de fonction de répartition F_X . Si $F_X \in C^d(\mathbb{R}^d, [0, 1])$, alors p_X est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) et cette densité, notée f_X , vérifie

$$f_X = \frac{\partial^d F_X}{\partial x_1 \dots \partial x_d} \lambda_{d-p.p..} \quad (9.1)$$

DÉMONSTRATION : On suppose que $d = 1$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la définition de F_X donne $p_X([a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$. Mais, comme F_X est de classe C_1 , on a $F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b F'_X(t) dt$. En notant m la mesure de densité F'_X par rapport à λ , on a donc $P_X([a, b]) = m([a, b])$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ce qui est suffisant pour dire que $P_X = m$ (en utilisant, par exemple, la proposition 2.5).

Pour $d > 1$, on note m la mesure de densité $\partial^d F_X / \partial x_1 \dots \partial x_d$ par rapport à λ_d . Un raisonnement voisin du précédent donne $m(\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]) = P_X(\prod_{i=1}^d [a_i, b_i])$ pour tout $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, d$. On en déduit $m = P_X$ avec la proposition 2.5. ■

Définition 9.8 (Espérance) Soit (Ω, \mathcal{A}, p) espace probabilisé, $d > 1$ et $X = (X_1, \dots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d . On suppose que $E(|X_i|) < \infty$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. L'espérance de X , notée $E(X)$, est alors le vecteur de \mathbb{R}^d dont les composantes sont les espérances des X_i , c'est-à-dire $E(X) = (E(X_1), \dots, E(X_d))^t$.

Remarque 9.3 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) espace probabilisé, $d > 1$ et $X = (X_1, \dots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d t.q. $E(|X_i|) < \infty$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. L'application $u \cdot X$ (qui à $\omega \in \Omega$ associe $u \cdot X(\omega)$), on rappelle que $\xi \cdot \eta$ est le produit scalaire canonique de ξ et η dans \mathbb{R}^d) est une v.a.r. intégrable et il est clair que $E(u \cdot X) = u \cdot E(X)$. L'application $u \mapsto E(u \cdot X)$ est donc l'application linéaire sur \mathbb{R}^d représentée par $E(X)$.

Définition 9.9 (Variance, covariance) Soit (Ω, \mathcal{A}, p) espace probabilisé, $d > 1$ et $X = (X_1, \dots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d . On suppose que $E(X_i^2) < \infty$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. On définit alors la matrice de covariance de X , notée $Cov(X)$, comme la matrice dont le coefficient i, j est donné par :

$$Cov(X)_{i,j} = E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))) \text{ pour tout } i, j \in \{1, \dots, d\}.$$

On a donc $C_{i,i} = Var(X_i)$ et $C_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$ (noter d'ailleurs que $Cov(X_i, X_i) = Var(X_i)$). Enfin, on peut aussi noter que $Cov(X)$ est l'espérance de la matrice $(X - E(X))(X - E(X))^t$.

Remarque 9.4 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) espace probabilisé, $d > 1$ et $X = (X_1, \dots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d t.q. $E(X_i^2) < \infty$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a donc $E((u \cdot X)^2) < \infty$ et il est facile de voir (voir l'exercice 9.8) que $Var(u \cdot X) = u^t Cov(X) u$. La matrice $Cov(X)$ est donc la matrice de la forme quadratique $u \mapsto Var(u \cdot X)$, définie sur \mathbb{R}^d . Cette matrice est donc symétrique et semi-définie positive. On peut aussi noter que, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$, on a $u^t Cov(X) v = E((u \cdot X)(v \cdot X))$.

9.2 Indépendance

Définition 9.10 Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $d_1, \dots, d_p \in \mathbb{N}^*$. soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable et, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, X_i un v.a. de dimension d_i . Les v.a. X_1, \dots, X_p sont dits indépendants si les tribus $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_p)$ (engendrées par X_1, \dots, X_p) sont indépendantes (cf définition 2.24, p. 38)

La proposition suivante donne des “opérations” possibles sur l’indépendance.

Proposition 9.5 Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $d_1, \dots, d_p \in \mathbb{N}^*$. soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable et, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, X_i un v.a. de dimension d_i . On suppose que les v.a. X_1, \dots, X_p sont indépendants. On se donne maintenant une suite strictement croissante p_0, \dots, p_q ($q \geq 2$) t.q. $1 = p_0 < \dots < p_q = p + 1$ et, pour $i \in \{1, \dots, q\}$, on note Y_i le v.a. $(X_{p_{i-1}}, \dots, X_{p_i-1})^t$, qui est donc un v.a. de dimension $r_i = d_{p_{i-1}} + \dots + d_{p_i-1}$. On a alors

1. Les v.a. Y_1, \dots, Y_q sont indépendantes,
2. Si φ_i est, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, une application borélienne de \mathbb{R}^{r_i} dans \mathbb{R}^{s_i} (avec $s_i \in \mathbb{N}^*$), les v.a. $\varphi_1(Y_1), \dots, \varphi_q(Y_q)$ sont indépendants.

DÉMONSTRATION : le premier item est une conséquence immédiate de la proposition 2.11 (sur l’indépendance de tribus) et de la proposition 9.2. Le second item est une conséquence immédiate du premier car $\sigma(\varphi_i(Y_i)) \subset \sigma(Y_i)$ pour tout i . ■

Remarque 9.5 Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable et X, Y deux v.a. (pas nécessairement de même dimension). La proposition 9.5 montre que si X et Y sont indépendants, toute composante de X est indépendante de toute composante de Y . Réciproquement, si toute composante de X est indépendante de toute composante de Y , on en déduit que X et Y sont indépendants. Ceci est encore une conséquence simple de la proposition 2.11.

On donne maintenant une généralisation de la proposition 4.10.

Proposition 9.6 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé, $n \geq 2$ et X_1, \dots, X_n des v.a. indépendants, de dimension $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, une fonction borélienne, notée φ_i , de \mathbb{R}^{d_i} dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a alors :

$$E\left(\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^n E(\varphi_i(X_i)). \quad (9.2)$$

(En convenant qu’un produit de termes est nul si l’un des termes est nul.)

2. Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, φ_i une fonction borélienne de \mathbb{R}^{d_i} dans \mathbb{R} . On suppose que $\varphi(X_i)$ est intégrable pour tout $i = 1, \dots, n$. La v.a.r. $\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)$ est alors intégrable et l’égalité (9.2) est vraie.
3. Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, φ_i une fonction borélienne bornée de \mathbb{R}^{d_i} dans \mathbb{R} . Alors, l’égalité (9.2) est vraie.

N.B. Comme dans la proposition 4.10, l’item 3 est donc une CNS pour que les v.a. X_1, \dots, X_n soient indépendants.

DÉMONSTRATION : La démonstration suit pas à pas celle de la proposition 4.10, sans difficulté supplémentaire. ■

Remarque 9.6 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisable. La proposition 9.6 donne aussi des résultats quand les fonctions φ_i sont à la valeurs dans \mathbb{R}^{r_i} avec $r_i \neq 1$. Par exemple, soit X, Y sont deux v.a. indépendants de dimensions d . On suppose X et Y intégrables (c'est-à-dire $E(|X|) < \infty$ et $E(|Y|) < \infty$). La v.a.r. $X \cdot Y$ est alors intégrable et $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Plus généralement, soit X est un v.a. de dimension d , Y est un v.a. de dimension \bar{d} , X, Y indépendants. On suppose que φ est une fonction borélienne de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^r et ψ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^{\bar{d}}$ dans \mathbb{R}^r t.q. $\varphi \circ X$ et $\psi \circ Y$ soient intégrables. On a alors $\varphi \circ X \cdot \psi \circ Y$ intégrable et $E(\varphi \circ X \cdot \psi \circ Y) = E(\varphi \circ X) \cdot E(\psi \circ Y)$. Enfin, si X_1, \dots, X_n sont des v.a. indépendants de dimension d ($d \geq 1$), la formule donnée dans la proposition 6.26 se généralise et donne :

$$\text{Cov}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i).$$

Pour le montrer, il suffit de traiter le cas $n = 2$ (qui est traité dans l'exercice 9.9) et de faire une récurrence sur n .

On donne maintenant la généralisation de la proposition 4.12.

Proposition 9.7 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé, $n \geq 2$ et X_1, \dots, X_n des v.a. indépendants, de dimension $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}^*$. Ces v.a. sont indépendants si et seulement si on a, pour tout famille $\{\varphi_i, i = 1, \dots, n\}$ t.q. $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}^{d_i}, \mathbb{R})$ pour tout i ,

$$E\left(\prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^n E(\varphi_i(X_i)), \quad (9.3)$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

DÉMONSTRATION : Ici encore, la démonstration suit pas à pas celle de la proposition 4.12, sans difficulté supplémentaire. ■

Théorème 9.2 (Loi d'un couple de v.a. indépendantes) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

1. Soit X, Y deux v.a.r.. Les v.a. X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du v.a. $(X, Y)^t$ (ou du couple (X, Y)) est $P_{(X, Y)^t} = P_X \otimes P_Y$.
2. Soit X_1, \dots, X_n ($n \geq 2$) n v.a. de dimension $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}^*$. On pose $Z = (X_1, \dots, X_n)^t$ (Z est donc un v.a. de dimension $d_1 + \dots + d_n$). Les v.a. X_1, \dots, X_n sont indépendantes si et seulement si la loi du v.a. Z est $P_Z = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$.

DÉMONSTRATION : La démonstration du premier item fait partie de l'exercice 9.10. le second item est une généralisation assez simple (en faisant, par exemple, une récurrence sur n pour se ramener au cas $n = 2$). ■

On utilise souvent en théorie des probabilités une suite (finie ou infinie) de v.a.r. indépendantes ayant des lois prescrites. Le théorème suivant montre qu'il existe effectivement un espace de probabilité et une suite de v.a.r.i. sur cet espace ayant des lois prescrites.

Théorème 9.3 (Existence de v.a.r.i. de lois prescrites) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a alors :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un espace probabilisé, noté (Ω, \mathcal{A}, P) , et une suite finie de v.a.r. indépendantes, notées X_1, \dots, X_n t.q. $P_{X_k} = p_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
2. Il existe un espace probabilisé, noté (Ω, \mathcal{A}, P) , et une suite de v.a.r. indépendantes, notée $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ t.q. $P_{X_n} = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

DÉMONSTRATION : Nous démontrons ici le premier item. Le second (plus difficile) sera admis. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un raisonnement par récurrence utilisant le théorème d'existence (et unicité) de la mesure produit (théorème 7.1) permet de construire une mesure p sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant, pour toute famille A_1, \dots, A_n de boréliens de \mathbb{R} :

$$p\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n p_i(A_i).$$

On a donc $p = p_1 \otimes \dots \otimes p_n$.

On prend alors $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), p)$ et, pour tout $i = 1, \dots, n$, X_i est l'application qui à $\omega \in \mathbb{R}^n$ associe sa i -ième composante. Enfin, on note $X = (X_1, \dots, X_n)^t$, de sorte que X est un v.a. de dimension n .

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, on a $X(\omega) = \omega$, ceci prouve que $P_X = P$. Puis, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $X(\omega) = \omega_i$ (où ω_i désigne la i -ième composante de ω). On en déduit que $P_{X_i} = p_i$. Enfin, comme $p = p_1 \otimes \dots \otimes p_n$, on a aussi $P_X = p_{X_1} \otimes \dots \otimes p_{X_n}$. Le théorème 9.2 donne donc que les v.a.r. X_1, \dots, X_n sont indépendantes. ■

On s'intéresse maintenant à la somme de v.a.i.

Proposition 9.8 (Loi de la somme de v.a. indépendantes) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X, Y deux v.a. indépendants de dimension d . Alors, $p_{X+Y} = p_X \star p_Y$.

DÉMONSTRATION : Soit φ une fonction borélienne bornée de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . Comme X et Y sont indépendants, on a $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$ (par le théorème 9.2) et donc :

$$\int_{\Omega} \varphi(X+Y) dP = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi(x+y) dP_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y) dP_X(x) dP_Y(y).$$

La définition de la convolution de mesure donne (voir la définition 7.4 et la proposition 7.10) :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y) dP_X(x) dP_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z) d(P_X \star P_Y)(z).$$

On en déduit que $\int_{\Omega} \varphi(X+Y) dP = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z) d(P_X \star P_Y)(z)$, c'est-à-dire $P_{X+Y} = P_X \star P_Y$. ■

9.3 Vecteurs gaussiens, théorème central limite

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On rappelle que la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la probabilité (sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) de densité f avec, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Pour introduire les vecteurs gaussiens, il est utile de définir aussi la loi normale $\mathcal{N}(m, 0)$. Cette loi normale est la probabilité (sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) δ_m (appelée “mesure de Dirac au point m ”). Comme elle vérifie, pour tout fonction φ borélienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $\int \varphi d\delta_m = \varphi(m)$, il est facile de vérifier que $\mathcal{N}(m, 0)$ est la limite étroite, quand $\sigma \rightarrow 0$, $\sigma > 0$, de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Définition 9.11 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d . le v.a. X est un v.a. gaussien si et seulement si $u \cdot X$ est, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, une v.a.r. gaussienne.

Remarque 9.7 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé, $d > 1$ et X un v.a. de dimension d . On suppose que chaque composante de X est une v.a.r. gaussienne. Alors, le vecteur X n’est pas nécessairement gaussien. Mais, si les composantes de X sont indépendantes, le vecteur X est alors un v.a. gaussien. On peut aussi montrer que si X est un v.a. gaussien et que les composantes de X sont indépendantes deux à deux (ou si on a seulement $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout i, j t.q. $i \neq j$), alors les composantes de X sont indépendantes (voir l’exercice 10.10 pour tous ces résultats).

Les v.a. gaussiens sont les vecteurs qui suivent un loi normale multidimensionnelle, dont la définition et donnée dans la définition 9.3, à condition d’étendre convenablement la définition 9.3 au cas D non inversible. C’est l’objectif de la proposition suivante.

Proposition 9.9 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d .

1. Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice s.d.p. (de taille $d \times d$). Si $X \sim \mathcal{N}(m, D)$, où $\mathcal{N}(m, D)$ est définie par la définition 9.3, alors X est un vecteur gaussien.
2. Si X est un vecteur gaussien. On pose $m = E(X)$ et $D = \text{Cov}(X)$. Alors, la loi de X ne dépend que de D . Si D est inversible on a $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ (où $\mathcal{N}(m, D)$ est définie par la définition 9.3).

Ceci permet de définir $\mathcal{N}(m, D)$ dans le cas où D est seulement symétrique semi-définie positive (et $m \in \mathbb{R}^d$). On définit $\mathcal{N}(m, D)$ comme étant la loi d’un vecteur gaussien de dimension d t.q. $m = E(X)$ et $D = \text{Cov}(X)$ (on peut montrer qu’un tel vecteur existe).

DÉMONSTRATION : Le premier item est démontré dans l’exercice 10.8 et le deuxième item est démontré dans l’exercice 10.9. ■

On termine ce paragraphe en donnant, sans démonstration, le théorème central limite pour une suite de v.a.i.

Théorème 9.4 Soit (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de dimension d i.i.d.. On suppose que $E(|X_1|^2) < \infty$. On pose $E(X_1) = m$, $D = \text{Cov}(X_1)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - m).$$

La suite $(P_{Y_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge alors étroitement vers la loi normale multidimensionnelle $\mathcal{N}(0, D)$. (Voir la définition 9.3 et la proposition 9.9 pour la définition de cette loi normale multidimensionnelle.)

9.4 Exercices

9.4.1 Définition, propriétés élémentaires

Exercice 9.1 Soient (E, T) un espace mesurable et $(f_k)_{k=1, \dots, N}$ une famille de fonctions mesurables de (E, T) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'application f définie de E dans \mathbb{R}^N par : $(x, \dots, x) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$ est mesurable.

Exercice 9.2 On reprend les hypothèses de l'exercice 4.37. Soit Y la longévité moyenne des 1000 ouvrières nées le 7 mai. Déterminer une valeur $x > 0$ pour laquelle on a une probabilité inférieure à 10^{-2} que $|Y - 45| > x$.

Exercice 9.3 (Problème de Buffon) On reprend les hypothèses de l'exercice 4.38. On suppose maintenant que $\ell = \frac{d}{2}$. On lance n fois l'aiguille: quelle est la loi de la variable aléatoire Z_n , qui représente le nombre de rencontres au cours des n lancers.

Soit F_n la fréquence des rencontres au cours des n lancers; estimer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff, le nombre de lancers permettant d'obtenir $|F - \frac{1}{\pi}| \leq 0.05$ avec une probabilité d'au moins 0.99.

Exercice 9.4

On va montrer ici que la connaissance des lois de probabilité marginales ne détermine pas forcément la loi de probabilité. On considère pour cela l'espace probabilisable $(E, T) = (]0, 1[\times]0, 1[, \mathcal{B}(\mathbb{R})_2)$ et on note λ_N la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, et $\delta_{(a,b)}$ la mesure de Dirac en (a, b) . Soit p une probabilité sur (E, T) , on note p_1 et p_2 ses probabilités marginales.

1. Soit $(a, b) \in E$. Montrer que $p = \delta_{(a,b)}$ si et seulement si $p_1 = \delta_a$ et $p_2 = \delta_b$.
2. Soit $p = \lambda_2$ sur (E, T) . Montrer que $p_1 = p_2 = \lambda_1$ (sur $(]0, 1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$).
3. On pose $D = \{(t, 1-t), t \in]0, 1[\}$, et on définit l'application $f :]0, 1[$ dans D par $f(t) = (t, 1-t)$.
 - (a) Montrer que f est mesurable.
 - (b) On définit la probabilité p sur (E, T) par : $p(D^c) = 0$ et $p(A) = \lambda(f^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})_2$, $A \subset D$. Montrer que $p_1 = p_2 = \lambda_1$ et conclure.

Exercice 9.5 On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y qui ont pour loi de probabilité conjointe la loi dans le plan \mathbb{R}^2 de densité $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2})$ par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 , σ étant un nombre réel donné. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = \max(|X|, |Y|)$?

Exercice 9.6 Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires d'un espace probabilisé (E, T, p) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ suivant des lois de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement, montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. (On rappelle que la loi de Poisson est donnée par $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$, où δ_k désigne la mesure de Dirac en k).

Exercice 9.7

1. Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. :
 - (H1) la série de terme général $\|f_n\|_2^2$ converge dans \mathbb{R} .

(H2) $(f_n, f_m)_{L^2} = 0 \forall n, m; n \neq m$.

- (a) Montrer que la série de terme général f_n converge dans L^2 vers une fonction $F \in L^2$.
- (b) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_q = \{y \in E, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m, n, m > n > N \text{ et } |\sum_{p=n}^m f_p(y)| \geq \frac{1}{q}\}$. Montrer que $m(A_q) = 0$. En déduire que la série de terme général f_n converge vers F presque partout.

2. Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes sur (Ω, T) . On note σ_n^2 la variance de la v.a.r. X_n , et on suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n^2 < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$. Montrer que la suite de v.a.r. S_n converge presque sûrement vers une v.a.r. S de variance finie, et que $\sigma^2(S_n - S) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 9.8 (Matrice des moments d'ordre deux et matrice de covariance) *Corrigé 164 page 484*

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace de probabilité. Soit X un vecteur aléatoire de dimension d ($d \geq 1$), dont toutes les coordonnées (notées $X_i, i = 1, \dots, d$) sont supposées être de carré intégrable. La matrice des moments d'ordre 2 du v.a. X est la matrice $E(XX^t)$, dont le terme (i, j) est le réel $E(X_i X_j)$, et on rappelle que la matrice de covariance de X , notée $\text{Cov}(X)$, est la matrice $E((X - E(X))(X - E(X))^t) = E(XX^t) - E(X)E(X)^t$, dont le terme (i, j) est la covariance des v.a.r. X_i et X_j . (La notation X^t désigne le transposé du vecteur X .)

1. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, montrer que $u^t E(XX^t) u = E((u \cdot X)^2)$ et que $u^t \text{Cov}(X) u = \text{Var}(u \cdot X)$ (On rappelle que $u \cdot X = \sum_{i=1}^d u_i X_i = u^t X$).
2. Montrer que les matrices $E(XX^t)$ et $\text{Cov}(X)$ sont symétriques et semi-définies positives.
3. Montrer que si A est une matrice $k \times d$ et b un vecteur de \mathbb{R}^k , $Y = AX + b$, alors $E(Y) = AE(X) + b$ et $\text{Cov}(Y) = A\text{Cov}(X)A^t$.
4. Montrer que si $\text{Cov}(X)$ n'est pas inversible, alors le v.a. X prend p.s. ses valeurs dans un sous-espace affine de \mathbb{R}^d de dimension (inférieure ou) égale à $d-1$, et que la loi de X n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d , notée $_d$ (i.e. cette loi n'est pas à densité dans \mathbb{R}^d).
5. Montrer que si trois points x, y et z de \mathbb{R}^2 ne sont pas alignés, tout v. a. X de dimension 2 tel que $P(X = x) > 0, P(X = y) > 0$ et $P(X = z) > 0$ a une matrice de covariance non dégénérée.

9.4.2 Indépendance

Exercice 9.9 (Covariance d'une somme de v.a.i.) *Corrigé 165 page 485*

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace de probabilité et X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants de dimension d ($d \geq 1$). Montrer que $\text{Cov}(X + Y) = \text{Cov}(X) + \text{Cov}(Y)$.

Exercice 9.10 (Loi d'un couple de v.a. indépendantes) *Corrigé 166 page 485*

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilités et X, Y deux v.a.r..

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) est $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$.

2. On suppose que X et Y ont des densités par rapport à λ : $P_X = f\lambda$ et $P_Y = g\lambda$, avec $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et positives p.p.). Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) a pour densité la fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ par rapport à λ_2 .

Exercice 9.11 (V.a. suivant une loi normale multidimensionnelle) *Corrigé 167 page 486*

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilités et $X = (X_1, \dots, X_d)$ ($d > 1$) un v.a. de dimension d . On suppose que les X_i sont des v.a.r. indépendantes et que $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, avec $m_i \in \mathbb{R}$ et $\sigma_i > 0$ pour tout i . Montrer que X suit une loi normale multidimensionnelle et donner m et D t.q. $X \sim \mathcal{N}(m, D)$.

Exercice 9.12 (Somme de v.a. indépendantes et convolution) *Corrigé 168 page 487*

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilités et X, Y deux v.a.r. indépendantes.

1. On suppose que la loi de X a une densité, notée f , par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que la loi de $X + Y$ a aussi une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) et l'exprimer en fonction de f et de la loi de Y .
2. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ ($m, \mu, s, \sigma \in \mathbb{R}$). Montrer que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + m, \sigma^2 + s^2)$ (le signe “ \sim ” signifie “a pour loi”).

Exercice 9.13 (Calcul de π) *Corrigé 169 page 488*

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que toutes ces v.a. sont indépendantes (dans leur ensemble). On pose pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = 1 \text{ si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \text{ et } X_n = 0 \text{ sinon,}$$

et

$$Z_n = 4 \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n .
2. Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers π .
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Tchebychev, donner, en fonction de α et ε , une valeur de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow P[|Z_n - \pi| \geq \varepsilon] \leq \alpha.$$

9.4.3 Vecteurs gaussiens, théorème central limite

Exercice 9.14 (Loi du couple (X, X) si X suit une loi normale) *Corrigé 170 page 489*

1. Soit A un borélien de \mathbb{R}^2 . On pose $T(A) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (x, x)^t \in A\}$. Montrer que $T(A)$ est un borélien de \mathbb{R} . On pose $m(A) = \lambda(T(A))$ (où λ est mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

On a ainsi défini une application m de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

2. Montrer que l'application m (définie ci dessus) est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et que pour toute application φ borélienne positive de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) dm(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx.$$

3. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace de probabilité. et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- (a) On pose $Z = (X, X)^t$. Montrer que le v.a. Z est un vecteur gaussien et donner, pour $a \in \mathbb{R}^2$, la loi de $a \cdot Z$ (en fonction de a).
- (b) Montrer la loi du v.a. $(X, X)^t$ a une densité par rapport à la mesure m définie dans les questions précédentes et donner cette densité. En déduire que la loi du v.a. $(X, X)^t$ n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

N.B. la loi de $(X, X)^t$ est une loi normale bidimensionnelle car le vecteur $(X, X)^t$ est gaussien (voir la proposition 9.9) mais ce n'est pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 9.15 (Exercice préliminaire à l'espérance conditionnelle pour un v.a. gaussien)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(X, Y)^t$ un v.a. gaussien de dimension 2, On note a l'espérance de X , b l'espérance de Y et D la matrice de covariance du v.a. $(X, Y)^t$ (on a donc $D_{1,1} = \text{Var}(X)$, $D_{2,2} = \text{Var}(Y)$ et $D_{1,2} = D_{2,1} = \text{Cov}(X, Y)$). On suppose que $\text{Var}(Y) > 0$.

1. Calculer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (en fonction de a, b et D) de manière à avoir $E[X] = E[\alpha + \beta Y]$ et $E[XY] = E[(\alpha + \beta Y)Y]$.

Avec α et β ainsi déterminés, on définit la fonction affine l de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $l(s) = \alpha + \beta s$ pour $s \in \mathbb{R}$ et on définit la v.a.r. Z par $Z = X - l(Y)$.

2. Montrer que $(Z, Y)^t$ est un v.a. gaussien. Montrer que $E(Z) = 0$ et $\text{Cov}(Z, Y) = 0$.
On admet ici que le fait que $(Z, Y)^t$ soit un v.a. gaussien et que $\text{Cov}(Z, Y) = 0$ permet de montrer que Z et Y sont des v.a.r. indépendantes [Ceci sera démontré au chapitre 10].
3. Soit φ une fonction borélienne bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que

$$\int_{\Omega} X\varphi(Y)dP = \int_{\Omega} l(Y)\varphi(Y)dP.$$

(Au chapitre 11, nous verrons que ceci montre que l'espérance conditionnelle de X sachant Y est égale p.s. à $l(Y)$.)

4. Calculer (en fonction de D) $\text{Var}(Z)$.

Dans la suite, on note $\sigma = \text{Var}(Z)$ et, pour $a \in \mathbb{R}$ on note μ_a la loi normale $\mathcal{N}(a, \sigma)$.

5. Soit f une fonction borélienne bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(a) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_a$.

- (a) Montrer que ψ est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
(b) Soit φ une fonction borélienne bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que

$$\int_{\Omega} f(X)\varphi(Y)dP = \int_{\Omega} \psi(l(Y))\varphi(Y)dP.$$

(Au chapitre 11, nous verrons que ceci montre que l'espérance conditionnelle de $f(X)$ sachant Y est égale p.s. à $\psi(l(Y))$.)