Chapter 6

Les espaces L^p

6.1 Définitions et premières propriétés

6.1.1 Les espaces L^p, avec $1 \le p < +\infty$

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \le p < \infty$ et $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(E, T)$ (c'est-à-dire $f : E \to \mathbb{R}$, mesurable). On remarque que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$, car $|f|^p = \varphi \circ f$ où φ est la fonction continue (donc borélienne) définie par $\varphi(s) = |s|^p$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. La quantité $\int |f|^p dm$ est donc bien définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci va nous permette de définir les espaces de fonctions de puissance p-ième intégrable. On retrouve, pour $p = 1$, la définition de l'espace des fonctions intégrables.

Définition 6.1 (Les espaces $\mathcal{L}^p$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \le p < \infty$ et f une fonction définie de E dans $\mathbb{R}$, mesurable. (On a donc $|f|^p \in \mathcal{M}_+$.)*

1. *On dit que $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $\int |f|^p dm < \infty$. On pose alors :*

$$\|f\|_p = \Big(\int |f|^p dm \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.1}$$

2. *On dit que $f \notin \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $\int |f|^p dm = \infty$ et on pose alors $\|f\|_p = +\infty$.*

De manière analogue au cas $p = 1$ on quotiente les espaces $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence "= p.p." afin que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ définisse une norme sur l'espace vectoriel des classes d"equivalence (voir section 4.5).

Définition 6.2 (Les espaces L^p) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \le p < +\infty$.*

1. *On définit l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^p$ pour la relation d'équivalence (= pp). En l'absence d'ambiguïté on notera L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.*
2. *Soit $F \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On pose $\|F\|_p = \|f\|_p$ si $f \in F$. (Cette définition est cohérente car ne dépend pas du choix de f dans F. On rappelle aussi que $F = \tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^p; \, g = f \text{ p.p.}\}$.)*

Proposition 6.1 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \le p < +\infty$. Alors :*

1. *$\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

2. $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION :

1. • Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^p$. On a $\alpha f \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et $\int |\alpha f|^p dm = |\alpha|^p \int |f|^p dm < \infty$. Donc, $\alpha f \in \mathcal{L}^p$.
   • Soit $f, g \in \mathcal{L}^p$. On veut montrer que $f+g \in \mathcal{L}^p$. On sait que $f+g \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et on remarque que, pour tout $x \in E$,
   $$|f(x)+g(x)|^p \le 2^p|f(x)|^p + 2^p|g(x)|^p,$$
   et donc
   $$\int |f+g|^p dm \le 2^p \int |f|^p dm + 2^p \int |g|^p dm < \infty,$$
   ce qui montre que $f+g \in \mathcal{L}^p$.
2. La structure vectorielle de L^p s'obtient comme pour $p=1$. Soit $F, G \in L^p$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et $g \in G$ et on définit $\alpha F + \beta G$ comme étant la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$. Comme d'habitude, cette définition est cohérente car la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$ ne dépend pas des choix de f et g dans F et G.

■

On va montrer maintenant que $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur λ^p et une norme sur L^p.

Lemme 6.1 (Inégalité de Young) *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q \in \,]1, +\infty[$ *t.q.* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Alors :*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{6.2}$$

DÉMONSTRATION :
La fonction exponentielle $\theta \mapsto \exp(\theta)$ est convexe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a donc, pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$,
$$\exp(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) \le t\exp(\theta_1) + (1-t)\exp(\theta_2).$$
Soit $a, b > 0$ (les autres cas sont triviaux). On prend $t = \frac{1}{p}$ (de sorte que $(1-t) = \frac{1}{q}$), $\theta_1 = p\ln(a)$ et $\theta_2 = q\ln(b)$. On obtient bien $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

■

Lemme 6.2 (Inégalité de Hölder)
Soient (E,T,m) *un espace mesuré et* $p, q \in]1, +\infty[$ *t.q.* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Soient* $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *et* $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. *Alors,* $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *et*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.3}$$

Le même résultat est vrai avec L^p, L^q *et* L^1 *au lieu de* $\mathcal{L}^p$, $\mathcal{L}^q$ *et* $\mathcal{L}^1$.

DÉMONSTRATION :
On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$ car $f, g \in \mathcal{M}$ (voir la proposition 3.5).
L'inégalité de Young donne $|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ pour tout $x \in E$. On en déduit, en intégrant :

$$\int |fg|dm \leq \frac{1}{p}\int |f|^p dm + \frac{1}{q}\int |g|^q dm < \infty. \tag{6.4}$$

Donc, $fg \in \mathcal{L}^1$.
Pour montrer (6.3), on distingue maintenant 3 cas :

Cas 1. On suppose $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$. On a alors $f = 0$ p.p. ou $g = 0$ p.p.. On en déduit $fg = 0$ p.p., donc $\|fg\|_1 = 0$ et (6.3) est vraie.

Cas 2. On suppose $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. On a alors, avec (6.4),

$$\|fg\|_1 = \int |fg|dm \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\|g\|_q.$$

L'inégalité (6.3) est donc vraie.

Cas 3. On suppose $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$. On pose alors $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$, de sorte que $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$. Le cas 2 donne alors

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} = \|f_1g_1\|_{\leq}1.$$

Ce qui donne (6.3).

Dans le cas où $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on confond les classes f et g avec des répresentants, encore notés f et g. Le résultat précédent donne $fg \in \mathcal{L}^1$ et (6.3). On a alors $fg \in L^1$ au sens de la confusion habituelle, c'est-à-dire "il existe $h \in \mathcal{L}^1$ t.q. $fg = h$ p.p." (et fg ne dépend pas des représentants choisis), et (6.3) est vérifiée.

■

Lemme 6.3 (Inégalité de Minkowski) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Soient $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors, $f + g \in \mathcal{L}^p$ et :*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{6.5}$$

Le même résultat est vrai avec L^p au lieu de $\mathcal{L}^p$.

DÉMONSTRATION :
Le cas $p = 1$ à déjà été fait. On suppose donc $p > 1$. On a aussi déjà vu que $f + g \in \mathcal{L}^p$ (proposition 6.1). Il reste donc à montrer (6.5). On peut supposer que $\|f + g\|_p \neq 0$ (sinon (6.5) est trivial).
On remarque que

$$|f + g|^p \leq FH + GH, \tag{6.6}$$

avec $F = |f|$, $G = |g|$ et $H = |f + g|^{p-1}$.

On pose $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $F \in \mathcal{L}^p$, $G \in \mathcal{L}^p$ et $H \in \mathcal{L}^q$ (car $f + g \in \mathcal{L}^p$). On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder (6.3), elle donne

$$\|FH\|_1 \leq \|F\|_p \|H\|_q, \ \|GH\|_1 \leq \|G\|_p \|H\|_q.$$

On en déduit, avec (6.6),

$$\int |f+g|^p dm \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)(\int |f+g|^p dm)^{1-\frac{1}{p}},$$

D'où l'on déduit (6.5).

Il est clair que le lemme est vrai avec L^p au lieu de $\mathcal{L}^p$.

■

On en déduit la propriété suivante:

Proposition 6.2 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$.*

1. *L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$.*
2. *L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur L^p. L^p, muni de cette norme, est donc une espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) normé.*

Démonstration :

- On a bien $\|f\|_p \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^p$.
- On a déjà vu que $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}^p$.
- L'inégalité (6.5) donne $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p$.

L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est donc une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$. On remarque que, si $f \in \mathcal{L}^p$, on a

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.}.$$

Cette équivalence donne que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur L^p. ■

Remarque 6.1 On reprend ici la remarque 4.9. Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. On confondra dans la suite un élement F de L^p avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f \in F$. De manière plus générale, soit $A \subset E$ t.q. A^c soit négligeable (c'est-à-dire $A^c \subset B$ avec $B \in T$ et $m(B) = 0$). On dira qu'une fonction f, définie de A dans $\mathbb{R}$, est un élément de L^p si il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^p; \ h = g \text{ p.p. }\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^p; \ h = f \text{ p.p. }\}$.
Avec cette confusion, si f et g sont des élements de L^p, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Théorème 6.1 (Convergence dominée) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$ une suite t.q. :*

- *$f_n \to f$ pp,*

- $\exists \;\; F \in L^p$ *t.q.* $|f_n| \le F$ *pp*, $\forall \;\; n \in \mathbb{N}$ *;*

alors $f_n \to f$ *dans* L^p *(c.à.d* $\displaystyle\int |f_n - f|^p dm \to 0$ *quand* $n \to \infty$*).*

DÉMONSTRATION :
On se ramène au cas $p = 1$.

On peut choisir des représentants des f_n (encore notés f_n) de manière à ce que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in E$. On pose $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. On a donc $g \in \mathcal{M}$ et $g \le F$ p.p., ce qui montre que $g \in \mathcal{L}^p$. On a donc $f \in L^p$ (au sens $f = g$ p.p. avec $g \in \mathcal{L}^p$).
Puis, on remarque que

$$0 \le h_n = |f_n - f|^p \le (|f_n| + |f|)^p \le 2^p F^p \text{ p.p.},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $h_n \to 0$ p.p. quand $n \to \infty$. Comme $F^p \in L^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne $h_n \to 0$ dans L^1, c'est-à-dire $f_n \to f$ dans L^p.

■

Théorème 6.2 (Réciproque partielle) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $1 \le p < \infty$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ *et* $f \in L^p$*. On suppose que* $f_n \to f$ *dans* L^p *quand* $n \to \infty$*. Alors il existe une sous-suite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *t.q. :*

- $f_{n_k} \to f$ *p.p. lorsque* $k \to +\infty$*,*
- $\exists \;\; F \in L^p$ *t.q.* $|f_{n_k}| \le F$ *p.p., pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *.*

DÉMONSTRATION :
Comme dans le cas $p = 1$, Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.3 (Séries absolument convergentes dans L^p)
Soient (E, T, m) *un espace mesuré,* $1 \le p < \infty$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$*. On suppose que* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$*.*
Alors :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ *pour presque tout* $x \in E$*. On pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *(la fonction* f *est donc définie p.p.).*
2. $f \in L^p$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^p$ *t.q.* $f = g$ *p.p.").*
3. $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ *p.p. et dans* L^p*, lorsque* $n \to +\infty$*. De plus, il existe* $F \in L^p$ *t.q.* $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \le F$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

DÉMONSTRATION : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n.
On pose, pour tout $x \in E$, $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|$. On a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Comme la suite est croissante, il existe $F \in \mathcal{M}_+$ t.q. $g_n \uparrow F$, quand $n \to \infty$. On a donc aussi $g_n^p \uparrow F^p$ quand $n \to \infty$ et le théorème de convergence monotone donne

$$\int g_n^p dm \to \int F^p dm, \text{ quand } n \to \infty. \tag{6.7}$$

On remarque maintenant que $\|g_n\|_p \le \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \le \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_p = A < \infty$. Donc $\|g_n\|_p^p \le A^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (6.7) donne alors

$$\int F^p dm \le A^p < \infty. \tag{6.8}$$

L'inégalité (6.8) donne que $F < \infty$ p.p.. Il existe donc $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $F(x) < \infty$ pour tout $x \in B^c$. Pour tout $x \in B^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est donc absolument convergente dans $\mathbb{R}$. Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$ et on peut définir, pour tout $x \in B^c$, $f(x) \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

La fonction f n'est pas forcément dans $\mathcal{M}$, mais elle est m-mesurable (voir la définition 4.3 page 80), il existe donc $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ p.p.. Puis, comme $g \le F$ p.p. (car $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \le g_n \le F$ p.p. et $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to g$ p.p.) on a, grâce à (6.7), $g \in \mathcal{L}^p$, ce qui donne bien $f \in L^p$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f = g$ p.p.")

Enfin, pour montrer le dernier item de la proposition, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p car $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ p.p. et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \le g_n \le F$ p.p. avec $\int F^p dm < \infty$. On obtient bien que $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ dans L^p. ■

Toute série absolument convergente de L^p est donc convergente dans L^p. On en déduit le résultat suivant:

Théorème 6.3 *Soient (E,T,m) un espace mesuré, et $1 \le p < \infty$. L'espace vectoriel normé $(L^p, \|.\|_p)$ est complet.*

On peut maintenant se demander si les espaces L^p sont des espaces de Hilbert. Ceci est vrai pour $p = 2$, et, en général, faux pour $p \neq 2$ (voir à ce propos l'exercice 6.31). Le cas de L^2 sera étudié en détail dans la section 6.2

En général, les espaces L^p, avec $1 < p < +\infty$, autres que L^2 ne sont pas des espaces de Hilbert, mais nous verrons ultérieurement (section 6.3 que ce sont des espaces de Banach réflexifs (c'est-à-dire que l'injection canonique entre l'espace et son bi-dual est une bijection). Les espaces L^1 et L^∞ (que nous verrons au paragraphe suivant) sont des espaces de Banach non réflexifs (sauf cas particuliers).

Remarque 6.2 Soient (E,T,m) un espace mesuré et $1 < p < \infty$. On peut aussi définir $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et $L^p_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ (avec $N > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexes ou réels). Le cas $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est particulièrement intéressant. Il sera muni d'une structure hilbertienne (voir le théorème 6.4).

6.1.2 L'espace L^∞

Définition 6.3 (L'espace $\mathcal{L}^\infty$) *Soient (E,T,m) un espace mesuré et f une fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) ;*

1. *on dit que f est essentiellement bornée, ou encore que $f \in \mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \le C$ p.p. ;*
2. *si $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ ; |f| \le C \text{ p.p.}\}$,*
3. *si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.*

Remarque 6.3 (Rappels sur la définition de l'inf. . .) Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. On rappelle que A est borné inférieurement si il existe un minorant de A, c'est-à-dire si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq \alpha$ pour tout $x \in A$. Si A est borné inférieurement, on définit la borne inférieure de A comme le plus grand des minorants : $\overline{x} = \inf\{A\} = \max\{\alpha; \alpha \leq x \text{ pour tout } x \in A\}$. Si A n'est pas borné inférieurement, on pose $\inf A = -\infty$. Dans les manipulations sur les inf (et sur les sup. . .) il est utile de connaître le résultat suivant :

$$\overline{x} = \inf A \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A; x_n \downarrow \overline{x} \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.9}$$

Ceci se démontre très facilement en écrivant :

1. Si A est non borné inférieurement, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in A$ t.q. $y_n \leq -n$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a donc $x_n \downarrow -\infty = \inf A$.

2. Si A est borné inférieurement, soit $\overline{x} = \inf A$. Alors, $\overline{x} + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de A et donc, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $y_n \in A$ tel que $\overline{x} \leq y_n \leq \overline{x} + \frac{1}{n}$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a clairement: $x_n \to \overline{x}$ lorsque $n \to +\infty$.

Le petit lemme suivant (dont la démonstration est immédiate en écrivant la définition de $\|f\|_\infty$, voir l'exercice corrigé 4.32) est parfois bien utile.

Lemme 6.4 Si $f \in \mathcal{L}^\infty$, alors $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p..

DÉMONSTRATION :
Voir l'exercice corrigé 4.32. ∎

On a égalité entre le sup essentiel et le sup pour les fonctions continues:

Proposition 6.4 *Si* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *alors* $\|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty$.

DÉMONSTRATION :
On distingue 2 cas:
Cas 1. On suppose ici que $|f|$ est non bornée, c'est-à-dire $\|f\|_u = \infty$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Comme $|f|$ est non bornée, il existe $x \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(x)| > \alpha$. Par continuité de f, il existe alors $\varepsilon > 0$ t.q. $|f(y)| > \alpha$ pour tout $y \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. On a donc $\{|f| > \alpha\} \supset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ et donc $\lambda(\{|f| > \alpha\}) \geq 2\varepsilon$. Donc, $|f|$ n'est pas inférieure ou égale à α p.p.. On a donc $\{C \in \mathbb{R}_+; |f| \leq C \text{ p.p.}\} = \emptyset$, donc $\|f\|_\infty = \infty = \|f\|_u$.

Cas 2. On suppose maintenant que $\|f\|_u < \infty$. On a $|f(x)| \leq \|f\|_u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|_u$. D'autre part, on sait que $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p.. On a donc $\lambda\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$. Or $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est ouvert (car f est continue), c'est donc un ouvert de mesure nulle, on a donc $\{|f| > \|f\|_\infty\} = \emptyset$ (la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide est toujours strictement positive). Ce qui prouve $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $\|f\|_u \leq \|f\|_\infty$.
On obtient bien finalement $\|f\|_u = \|f\|_\infty$. ∎

Définition 6.4 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_\mathbb{R}(E, T, m)$.

1. *On définit* $L^\infty = L^\infty_\mathbb{R}(E, T, m)$ *comme l'ensemble des classes d'équivalence sur* $\mathcal{L}^\infty$ *pour la relation d'équivalence "= p.p.".*

2. *Soit* $F \in L^\infty$. *On pose* $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ *avec* $f \in F$, *de sorte que* $F = \{g \in \mathcal{L}^\infty; g = f \text{ p.p.}\}$. *(Cette définition est cohérente car* $\|f\|_\infty$ *ne dépend pas du choix de* f *dans* F.*)*

Proposition 6.5 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_\mathbb{R}(E, T, m)$ *et* $L^\infty = L^\infty_\mathbb{R}(E, T, m)$*. Alors :*

1. $\mathcal{L}^\infty$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et l'application définie de* $\mathcal{L}^\infty$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f \mapsto \|f\|_\infty$ *est une semi-norme sur* $\mathcal{L}^\infty$*.*

2. L^∞ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et l'application définie de* L^∞ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f \mapsto \|f\|_\infty$ *est une norme sur* $\mathcal{L}^\infty$*.* L^∞ *est donc un espace e.v.n. (réel).*

Démonstration :

1. • Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^\infty$, il est clair que $\alpha f \in \mathcal{L}^\infty$ et que $\|\alpha f\|_=|\alpha|\|f\|_\infty$.
   • Soit $f, g \in \mathcal{L}^\infty$. Comme $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., on montre facilement que $|f+g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ p.p.. Ce qui prouve que $(f+g) \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

   On a bien montré que $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et comme $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty$, l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty$.

2. la structure vectorielle de L^∞ s'obtient comme celle de L^p ($p < \infty$) et le fait que $f \mapsto \|f\|_\infty$ soit une norme découle du fait que
$$f = 0 \text{ p.p. } \Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0.$$

■

Proposition 6.6 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. L'espace* $L^\infty_\mathbb{R}(E, T, m)$ *est un espace de Banach (réel), c'est-à-dire un e.v.n. complet.*

Démonstration :
On sait déjà que L^∞ est un e.v.n.. Le fait qu'il soit complet est la conséquence du fait que toute série absolument convergente dans L^∞ est convergente dans L^∞. Ce qui est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.7 (Séries absolument convergentes dans L^∞)
Soient (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_\mathbb{R}(E, T, m)$*. On suppose que* $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$*. Alors :*

1. *Il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} |f_k| < C$ *p.p..*

2. *La série de terme général* $f_n(x)$ *est, pour presque tout* $x \in E$*, absolument convergente dans* $\mathbb{R}$*. On définit, pour presque tout* x*,* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$*.*

3. *On a* $f \in L^\infty$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^\infty$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$*.*

Démonstration : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. Comme $|f_n| \le \|f_n\|_\infty$ p.p., il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|f_n| \le \|f_n\|_\infty$ sur A_n^c. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$. On a $m(A) = 0$ (par σ-sous additivité de m) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A^c$, $|f_n(x)| \le \|f_n\|_\infty$.
Pour tout $x \in A^c$, on a donc
$$\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty \le \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = C < \infty. \tag{6.10}$$

Comme $m(A) = 0$, ceci montre le premier item.

Pour tout $x \in A^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. On pose donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \in \mathbb{R}.$$

f est donc définie p.p., elle est m-mesurable (voir la définition 4.3) car limite p.p. de fonctions mesurables. Il existe donc $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ p.p. et (6.10) donne $|g| \le C$ p.p.. On a donc $g \in \mathcal{L}^\infty$ et donc $f \in L^\infty$ (au sens “il existe $g \in \mathcal{L}^\infty$ t.q. $f = g$ p.p.”).

Il reste à montrer que $\sum_{k=0}^{n} f_k \to f$ dans L^∞.
On remarque que, pour tout $x \in A^c$,

$$|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Comme $m(A) = 0$, on en déduit

$$\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \le \sup_{x\in A^c} |\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

et donc $\sum_{k=0}^{n} f_k \to f$ dans L^∞, quand $n \to \infty$. ■

La proposition 6.7 permet de montrer que L^∞ est complet (théorème 6.6). Elle permet aussi de montrer ce que nous avons appelé précédemment (dans le cas $p < \infty$) “réciproque partielle du théorème de convergence dominée”. Il est important par contre de savoir que le théorème de convergence dominée peut être faux dans L^∞, comme le montre la remarque suivante.

Remarque 6.4 (Sur la convergence dominée. . .) Attention : le résultat de convergence dominée qu'on a démontré pour les suites de fonctions de L^p, $1 \le p < +\infty$, est faux pour les suites de fonctions de L^∞. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple suivant : $(E, T, m) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$, pour $n \in \mathbb{N}$. On a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ et

$$\begin{aligned} &f_n \to 0 \text{ p.p. , quand } n \to \infty,\\ &f_n \le 1_{[0,1]} \text{ p.p., pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ 1_{[0,1]} \in L^\infty_{\mathbb{R}}([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda).\end{aligned}$$

Pourtant, $\|f_n\|_\infty = 1 \not\to 0$, quand $n \to \infty$.

Par contre, le résultat de réciproque partielle de la convergence dominée est vrai, comme conséquence du résultat que toute suite absolument convergente dans $\mathcal{L}^\infty$ est convergente (dans L^∞, proposition 6.7). La démonstration est similaire à la démonstration du théorème 4.7.

Remarque 6.5 Soit (E, T, m) un espace mesuré. On peut aussi définir $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et $L^\infty_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ (avec $N > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexe ou réels).

6.1.3 Quelques propriétés des espaces $L^p, 1 \le p \le +\infty$

Proposition 6.8 (Comparaison entre les espaces L^p)
Soit (E,T,m) un espace mesuré fini, i.e. $m(E) < +\infty$. Soient $p,q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \le p < q \le +\infty$. Alors, $L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m) \subset L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. De plus, il existe C, ne dépendant que de p,q et $m(E)$, t.q. $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (ceci montre que l'injection de L^q dans L^p est continue).

Démonstration :
On distingue les cas $q < \infty$ et $q = \infty$.

Cas $q < \infty$. On suppose ici que $1 \le p < q < +\infty$.

Soit $f \in L^q$. On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour tout $x \in E$, on a $|f(x)|^p \le |f(x)|^q$ si $|f(x)| \ge 1$. On a donc $|f(x)|^p \le |f(x)|^q + 1$, pour tout $x \in E$. Ce qui donne, par monotonie de l'intégrale,

$$\int |f|^p dm \le m(E) + \int |f|^q dm < \infty, \tag{6.11}$$

et donc que $f \in L^p$. On a ainsi montré $L^q \subset L^p$.

On veut montrer maintenant qu'il existe C, ne dépendant que de p,q et $m(E)$, t.q., pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$,

$$\|f\|_p \le C\|f\|_q. \tag{6.12}$$

En utilisant (6.11), on remarque que (6.12) est vraie avec $C = (m(E)+1)^{\frac{1}{p}}$, si $\|f\|_q = 1$. Ceci est suffisant pour dire que (6.12) est vraie avec $C = (m(E)+1)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $f \in L^q$. En effet, (6.12) est trivialement vraie pour $\|f\|_q = 0$ (car on a alors $f = 0$ p.p. et $\|f\|_p = 0$). Puis, si $\|f\|_q > 0$, on pose $f_1 = \frac{f}{\|f\|_q}$ de sorte que $\|f_1\|_q = 1$. On peut donc utiliser (6.12) avec f_1. On obtient $\frac{1}{\|f\|_q}\|f\|_p = \|f_1\|_p \le C$, ce qui donne bien $\|f\|_p \le C\|f\|_q$.

On a donc montré (6.12) avec un C ne dépendant que p et $m(E)$ (et non de q). Toutefois, le meilleur C possible dans (6.12) dépend de p,q et $m(E)$. Ce meilleur C peut être obtenu en utilisant l'inégalité de Hölder généralisée (proposition 6.9). Elle donne $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ (voir la remarque 6.6).

Cas $q = \infty$. On suppose ici que $1 \le p < q = +\infty$.

Soit $f \in L^\infty$. On choisit un représentant de f, encore noté f. On a $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p.. On en déduit $|f|^p \le \|f\|_\infty^p$ p.p. et donc

$$\int |f|^p dm \le m(E)\|f\|_\infty^p < \infty.$$

Ce qui donne $f \in L^p$ et $\|f\|_p \le C\|f\|_\infty$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p}}$.

On voit ici qu'on a obtenu le meilleur C possible (si $m(E) > 0$) car $\|f\|_p = (m(E))^{\frac{1}{p}} = (m(E))^{\frac{1}{p}}\|f\|_\infty$ si $f = 1_E$. ■

Proposition 6.9 (Inégalité de Hölder généralisée)
Soient (E,T,m) un espace mesuré et $p,q,r \in [1,+\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Soient $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Alors, $fg \in L^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q. \tag{6.13}$$

DÉMONSTRATION : Comme d'habitude, on confond un élément de L^s ($s = p$, q ou r) avec un de ses représentants. On travaille donc avec $\mathcal{L}^s$ au lieu de L^s. On suppose donc que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ et on veut montrer que $fg \in \mathcal{L}^r$ et que (6.13) est vraie. On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$.

Ici encore, on distingue plusieurs cas.

Cas 1. On suppose ici $1 \leq p, q, r < \infty$.

On pose $f_1 = |f|^r$ et $g_1 = |g|^r$ de sorte que $f_1 \in \mathcal{L}^{\frac{p}{r}}$ et $g_1 \in \mathcal{L}^{\frac{q}{r}}$. Comme $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, on peut appliquer le lemme 6.2 (donnant l'inégalité de Hölder) avec f_1, g_1 (au lieu de f, g) et $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ (au lieu de p, q). Il donne que $f_1 g_1 \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_1 g_1\|_1 \leq \|f_1\|_{\frac{p}{r}} \|g_1\|_{\frac{q}{r}}$. On en déduit que $fg \in L^r$ et

$$\int |fg|^r dm \leq (\int |f|^p dm)^{\frac{r}{p}} (\int |g|^q dm)^{\frac{r}{q}},$$

ce qui donne (6.13)

Cas 2. On suppose ici $q = \infty$ et $r = p < \infty$.

Comme $|g| \leq \|g\|_\infty$ p.p., On a $|fg|^p \leq |f|^p \|g\|_\infty^p$ p.p. et donc

$$\int |fg|^p dm \leq \|g\|_\infty^p \int |f|^p dm,$$

ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^p$ et (6.13).

Cas 3. On suppose ici $p = q = r = \infty$.

Comme $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \leq \|g\|_\infty$ p.p., on a $|fg| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ p.p., ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^\infty$ et (6.13). ■

Remarque 6.6

1. Par une récurrence facile sur $n \in \mathbb{N}^\star$, on peut encore généraliser la proposition 6.9. Soient (E, T, m) un espace mesuré, $p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$ et $r \in [1, \infty]$ t.q. $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $f_i \in L^{p_i}_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors, $\prod_{i=1}^n f_i \in L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\| \prod_{i=1}^n f_i \|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}$.

2. L'inégalité (6.13) permet aussi de trouver le meilleur C possible dans la proposition 6.8 (Inégalité (6.12)) :

   Soit (E, T, m) un espace mesuré fini. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \leq p < q < +\infty$. Soit $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Comme $1 \leq p < q < \infty$, il existe $r \in [1, \infty[$ t.q. $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. On peut alors utiliser la proposition 6.9 avec $f \in L^q$ et $1_E \in L^r$. Elle donne que $f \in L^p$ et $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. Cette valeur de C est la meilleure possible (si $m(E) > 0$) dans (6.12) car si $f = 1_E$ on obtient $\|f\|_p \leq (m(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$.

Remarque 6.7 Les espaces $L^p, p \in]0, 1[$ (que l'on peut définir comme dans le cas $1 \leq p < \infty$) sont des espaces vectoriels, mais l'application $f \mapsto \Big(\int |f|^p dm\Big)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme sur L^p si $p \in]0, 1[$ (sauf cas particulier).

Remarque 6.8 Soient (E,T,m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}(E,T)$. L'ensemble $J = \{p \in [1,+\infty], f \in \mathcal{L}^p\}$ est un intervalle de $[1,+\infty]$. L'application définie de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $p \mapsto \|f\|_p$ est continue, voir à ce propos l'exercice 4.32, et dans le cas particulier des fonctions continues à support compact, l'exercice 6.10. En particulier, lorsque $p \in J$, $p \to +\infty$ on a $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$. On en déduit le résultat suivant : si il existe $p_0 < +\infty$ tel que $f \in \mathcal{L}^p$ pour tout p tel que $p_0 \le p < +\infty$, et si il existe C t.q. $\|f\|_p \le C$, pour tout $p \in [p_0,+\infty[$, alors $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \le C$.

6.2 Analyse hilbertienne et espace L^2

6.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 6.5 (Produit scalaire)

1. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle "produit scalaire sur H" une application de $H \times H \to \mathbb{R}$, notée $(\cdot/\cdot)$ (ou $(\cdot/\cdot)_H$) t.q.*

   ps1 : $(u/u) > 0$ *pour tout* $u \in H \setminus \{0\}$,

   ps2 : $(u/v) = (v/u)$ *pour tout* $u, v \in H$,

   ps3 : $u \mapsto (u/v)$ *est une application linéaire de H dans $\mathbb{R}$, pour tout $v \in H$.*

2. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle "produit scalaire sur H" une application de $H \times H \to \mathbb{C}$, notée $(\cdot/\cdot)$ (ou $(\cdot/\cdot)_H$) t.q.*

   ps1 : $(u/u) \in \mathbb{R}_+^\star$ *pour tout* $u \in H \setminus \{0\}$,

   ps2 : $(u/v) = \overline{(v/u)}$ *pour tout* $u, v \in H$,

   ps3 : $u \mapsto (u/v)$ *est une application linéaire de H dans $\mathbb{R}$, pour tout $v \in H$.*

Remarque 6.9 (Exemple fondamental) Soit (E,T,m) un espace mesuré.

1. On prend $H = L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. H est un e.v. sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si $f,g \in L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (lemme 6.2 pour $p = q = 2$). L'application $(f,g) \mapsto \int fg dm$ est un produit scalaire sur H.

2. On prend $H = L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ (voir le théorème 6.4 ci après). H est un e.v. sur $\mathbb{C}$. En utilisant le lemme 6.2, on montre facilement que $f\overline{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si $f,g \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ (lemme 6.2 pour $p = q = 2$). L'application $(f,g) \mapsto \int f\overline{g} dm$ est un produit scalaire sur H.

Proposition 6.10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

1. *Soit H un e.v. sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot/\cdot)$. Alors :*

$$(u/v)^2 \le (u/u)(v/v), \text{ pour tout } u, v \in H. \tag{6.14}$$

   De plus, $(u/v)^2 = (u/u)(v/v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

2. *Soit H un e.v. sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot/\cdot)$. Alors :*

$$|(u/v)|^2 \le (u/u)(v/v), \text{ pour tout } u, v \in H. \tag{6.15}$$

   De plus, $|(u/v)|^2 = (u/u)(v/v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

Démonstration :

1. On suppose ici $K = \mathbb{R}$. Soit $u, v \in H$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $p(\alpha) = (u + \alpha v / u + \alpha v) = (v/v)\alpha^2 + 2\alpha(u/v) + (u/u)$. Comme $p(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = (u/v)^2 - (v/v)(u/u) \leq 0$, ce qui donne (6.14).

   On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.14).

   Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.14) (et u et v sont colinéaires).

   Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, on a égalité dans (6.14) (c'est-à-dire $\Delta = 0$) si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $p(\alpha) = 0$. Donc, on a égalité dans (6.14) si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $u = -\alpha v$. On en déduit bien que $(u/v)^2 = (u/u)(v/v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

2. On suppose maintenant $K = \mathbb{C}$. Soit $u, v \in H$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ on pose $p(\alpha) = (u + \alpha v / u + \alpha v) = \alpha\overline{\alpha}(v/v) + \alpha(v/u) + \overline{\alpha}(u/v) + (u/u)$. On choisit de prendre $\alpha = \beta(u/v)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. On pose donc, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\beta) = p(\beta(u/v)) = \beta^2|(u/v)|^2(v/v) + 2\beta|(u/v)|^2 + (u/u)$. Ici encore, comme $\varphi(\beta) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = |(u/v)|^4 - |(u/v)|^2(v/v)(u/u) \leq 0$, ce qui donne (6.15).

   On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.15)

   Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.15) (et u et v sont colinéaires).

   On suppose maintenant $u \neq 0$ et $v \neq 0$. On remarque d'abord que, si $(u/v) = 0$, on n'a pas égalité dans (6.15) et u et v ne sont pas colinéaires. On suppose donc maintenant que $(u/v) \neq 0$. On a alors égalité dans (6.15) si et seulement si $\Delta = 0$ et donc si et seulement si il existe $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(\beta) = 0$. Donc, on a égalité dans (6.15) si et seulement si il existe $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $u = -\beta(u/v)v$, et donc si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $u = -\alpha v$.

   Finalement, on en déduit bien que $|(u/v)|^2 = (u/u)(v/v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

■

Proposition 6.11 (Norme induite par un produit scalaire)
Soit H un e.v. sur K, avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot/\cdot)$. Pour tout $u \in H$, on pose $\|u\|_H = \sqrt{(u/u)}$. Alors, $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H. On l'appelle norme induite par le produit scalaire $(\cdot/\cdot)$.

Démonstration :

- Il est clair que $\|u\|_H \in \mathbb{R}_+$ pour tout $u \in H$ et que
$$\|u\|_H = 0 \Leftrightarrow (u/u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$
- On a bien $\|\alpha u\|_H = |\alpha|\|u\|_H$ pour tout $\alpha \in K$ et tout $u \in H$.
- Enfin, pour montrer l'inégalité triangulaire, soit $u, v \in H$. On a $\|u + v\|_H^2 = (u + v/u + v) = (u/u) + (v/v) + (u/v) + (v/u)$. Comme, par (6.14) ou (6.15), $|(u/v)| \leq \sqrt{(u/u)}\sqrt{(v/v)} = \|u\|_H\|v\|_H$, on en déduit $\|u + v\|_H^2 \leq (\|u\|_H + \|v\|_H)^2$. Donc,
$$\|u + v\|_H \leq \|u\|_H + \|v\|_H.$$

$\blacksquare$

Définition 6.6 (espace de Hilbert)

1. *Un espace préhilbertien (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) normé dont la norme est induite par un produit scalaire.*
2. *Un espace de Hilbert (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) normé complet dont la norme est induite par un produit scalaire. C'est donc un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

Théorème 6.4 (L'espace L^2) *Soit (E,T,m) un espace mesuré.*

1. *L'espace $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace de Hilbert (réel) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*
$$(f/g)_2 = \int fg \quad dm. \tag{6.16}$$
2. (a) *Soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{C}$ (donc $|f| \in \mathcal{M}_+$). On dit que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si $|f|^2 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Pour $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\||f|^2\|_1}$. Alors, $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$.*

   (b) *On appelle $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ quotienté par la relation d'équivalence "= p.p.". Pour $F \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, on pose $\|F\|_2 = \|f\|_2$ avec $f \in F$ (noter que $\|f\|_2$ ne dépend pas du choix de f dans F). Alors $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, muni de $\|\cdot\|_2$, est un espace de Banach (complexe).*

   (c) *L'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace de Hilbert (complexe) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*
$$(f/g)_2 = \int f\overline{g} \quad dm. \tag{6.17}$$

Démonstration :

1. On sait déjà que $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach (réel). Le lemme 6.2 pour $p=q=2$ donne que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si $f,g \in L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On peut donc poser $(f/g)_2 = \int fgdm$. Il est facile de voir que $(\cdot/\cdot)_2$ est un produit scalaire et que la norme induite par ce produit scalaire est bien la norme $\|\cdot\|_2$.
2. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable. On rappelle (section 4.10) que les fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (i.e. appartiennent â $\mathcal{M}$). On a donc bien $|f| \in \mathcal{M}_+$ et $|f|^2 = (\Re(f))^2 + (\Im(f))^2 \in \mathcal{M}_+$.

   Comme $|f|^2 = (\Re(f))^2 + (\Im(f))^2 \in \mathcal{M}_+$, on remarque aussi que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si et seulement si $\Re(f)$, $\Im(f) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Comme $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est un e.v. (sur $\mathbb{R}$), il est aors immédiat de voir que $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est un e.v. sur $\mathbb{C}$.

   On quotiente maintenant $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ par la relation "= p.p.". On obtient ainsi l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ que l'on munit facilement d'une structure vectorielle sur $\mathbb{C}$. L'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est donc un e.v. sur $\mathbb{C}$.

En utilisant le lemme 6.2, on montre facilement que $f\overline{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si $f,g \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ (on utilise le fait que les parties réelles et imaginaires de f et g sont dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$). On peut donc poser $(f/g)_2 = \int f\overline{g}dm$. Il est aussi facile de voir que $(\cdot/\cdot)_2$ est alors un produit scalaire sur $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et que la norme induite par ce produit scalaire est justement $\|\cdot\|_2$ (car $|f|^2 = f\overline{f}$ et donc $\int f\overline{f}dm = \|f\|_2^2$). On a, en particulier, ainsi montré que $f \mapsto \|f\|_2$ est bien une norme sur $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On en déduit aussi que $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

On a montré que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace préhilbertien. il reste à montrer qu'il est complet (pour la norme $\|\cdot\|_2$). Ceci est facile. En effet, $\|f\|_2^2 = \|\Re(f)\|_2^2 + \|\Im(f)\|_2^2$ pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$. Donc, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est de Cauchy si et seulement si les suites $(\Re(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Im(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et cette même suite converge dans $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si et seulement si les suites $(\Re(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Im(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Le fait que $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ soit complet découle alors du fait que $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est complet.

■

Remarquons que dans le cas $p = 2$, l'inégalité de Hölder est en fait l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 6.12 (Continuité du produit scalaire)
Soit H est un Banach réel ou complexe. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ et $u,v \in H$ t.q. $u_n \to u$ et $v_n \to v$ dans H, quand $n \to \infty$. Alors, $(u_n/v_n) \to (u/v)$ quand $n \to \infty$.

DÉMONSTRATION : Il suffit de remarquer que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalités (6.14) et (6.15)), on a :

$$\begin{aligned}&|(u_n/v_n) - (u/v)| \le |(u_n/v_n) - (u_n/v)| + |(u_n/v) - (u/v)|\\ &\le \|u_n\|\|v_n - v\| + \|u_n - u\|\|v\|.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le fait que $u_n \to u$, $v_n \to v$ et en remarquant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente. ■

Définition 6.7 Soit H est un Banach réel ou complexe. On note H' (ou $\mathcal{L}(H,K)$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $K = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $K = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). Si $T \in H'$, on pose

$$\|T\|_{H'} = \sup_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{|T(u)|}{\|u\|_H}.$$

On rappelle que $\|\cdot\|_{H'}$ est bien une norme sur H' et que H', muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K).

Enfin, si $T \in H'$ et $u \in H$, on a $|T(u)| \le \|T\|_{H'}\|u\|_H$.

Remarque 6.10 Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u/v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.14) ou (6.15)), on voit que $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \le \|v\|_H$. Il est facile alors de voir que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$. Ceci montre que $v \mapsto \varphi_v$ est une application injective de H dans H'. le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8), fondamental, montrera que cette application est surjective.

Proposition 6.13
Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Alors, pour tout $u,v \in H$ On a

$$\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 + 2\|v\|_H^2. \tag{6.18}$$

Cette identité s'appelle " identité du parallélogramme".

Démonstration : Il suffit d'écrire $\|u+v\|_H^2+\|u-v\|_H^2=(u+v/u+v)+(u-v/u-v)$ et de développer les produits scalaires. ■

Remarque 6.11

1. On peut se demander si deux produits scalaires (sur un même espace vectoriel) peuvent induire la même norme. La réponse est " non". En effet, le produit scalaire est entièrement déterminé par la norme qu'il induit. Par exemple, dans le cas d'un e.v. réel, si le produit scalaire $(\cdot/\cdot)$ induit la norme $\|\cdot\|$, on a, pour tout u, v, $(u/v)=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2)$.
2. On se donne maintenant un e.v.n. noté H. Comment savoir si la norme est induite ou non par un produit scalaire ? On peut montrer que la norme est induite par un produit scalaire si et seulement si l'identité du parallélogramme (6.18) est vraie pour tout $u, v \in H$. Ceci est surtout utile pour montrer qu'une norme n'est pas induite par un produit scalaire (on cherche $u, v \in H$ ne vérifiant pas (6.18)).

Définition 6.8 (Orthogonal) *Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe).*

1. *Soit $u, v \in H$. On dit que u et v sont orthogonaux (et on note $u \perp v$) si $(u/v)=0$.*
2. *Soit $A \subset H$. On appelle "orthogonal de A" l'ensemble $A^\perp=\{u \in H;\ (u/v)=0$ pour tout $v \in A\}$.*

Proposition 6.14 *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $A \subset H$. Alors :*

1. *$A^\perp$ est un s.e.v. fermé de H,*
2. *$A^\perp=\overline{A}^\perp$,*
3. *$A \subset (A^\perp)^\perp$ (que l'on note aussi $A^{\perp\perp}$).*

Démonstration :

1. Soit $u_1, u_2 \in A^\perp$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ ($K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$ selon que H est un hilbert réel ou complexe). Pour tout $v \in A$, on a $(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2/v)=\alpha_1(u_1/v)+\alpha_2(u_2/v)=0$. Donc, $\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2 \in A^\perp$. Ce qui montre que $A^\perp$ est un s.e.v. de H.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^\perp$ t.q. $u_n \to u$ dans H, quand $n \to \infty$. L'application $w \mapsto (w/v)$ est continue de H dans K (voir la remarque (6.10)) pour tout $v \in H$. Soit $v \in A$, de $(u_n/v)=0$ on déduit donc que $(u/v)=0$. Ce qui montre que $u \in A^\perp$ et donc que $A^\perp$ est fermé.
2.
   - Comme $A \subset \overline{A}$, on a $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$.
   - Soit maintenant $u \in A^\perp$. On veut montrer que $u \in \overline{A}^\perp$.

     Soit $v \in \overline{A}$, il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.q. $v_n \to v$ dans H quand $n \to \infty$. Comme $(u/v_n)=0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit, par continuité de $w \mapsto (u/w)$, que $(u/v)=0$. Donc $u \in \overline{A}^\perp$. ce qui donne $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$.

   Finalement, on a bien montré $A^\perp=\overline{A}^\perp$.
3. Soit $v \in A$. On a $(u/v)=0$ pour tout $u \in A^\perp$, donc $(v/u)=0$ pour tout $u \in A^\perp$, ce qui donne $v \in (A^\perp)^\perp$

■

Remarque 6.12 dans le dernier item de la proposition précédente, on peut se demander si $A = A^{\perp\perp}$. On montrera, dans la section suivante que ceci est vrai si A est s.e.v. fermé (ce qui est aussi une condition nécessaire).

On termine cette section avec le théorème de Pythagore.

Théorème 6.5 (Pythagore)
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $u_1, \ldots, u_n \in H$ t.q. $(u_i/u_j) = 0$ si $i \neq j$. Alors :

$$\|\sum_{i=1}^{n} u_i\|_H^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_H^2. \tag{6.19}$$

DÉMONSTRATION :
La démonstration de ce résultat est immédiate, par récurrence sur n :

L'égalité (6.19) est vraie pour $n = 1$ (et tout $u_1 \in H$).

Soit $n \in N$. On suppose que (6.19) est vraie (pour tout $u_1, \ldots, u_n \in H$). Soit $u_1, \ldots, u_{n+1} \in H$. On pose $y = \sum_{i=1}^{n} u_i$, de sorte que

$$\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_H^2 = \|y + u_{n+1}\|_H^2 = (y + u_{n+1}/y + u_{n+1}) = (y/y) + (y/u_{n+1}) + (u_{n+1}/y) + (u_{n+1}/u_{n+1}).$$

Comme $(y/u_{n+1}) = 0 = (u_{n+1}/y)$, on en déduit, avec l'hypothèse de récurrence, que $\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_H^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|u_i\|_H^2$. ■

6.2.2 Projection sur un convexe fermé non vide

Remarque 6.13 Soit E un ensemble muni d'une distance, notée d (E est alors un espace métrique). Soit $A \subset E$. On pose $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Il n'existe pas toujours de $x_0 \in A$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, A)$ et, si un tel x_0 existe, il peut être non unique. Par exemple, dans le cas où A est compact (pour la topologie induite par d), x_0 existe mais peut être non unique.

Dans le cas où il existe un et un seul $x_0 \in A$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, A)$, x_0 est appelé "projection de x sur A".

L'objectif de cette section est de montrer l'existence et l'unicité de x_0 dans le cas où A est une partie convexe fermée non vide d'un espace de Hilbert (et d la distance induite par la norme de l'espace de Hilbert).

Définition 6.9 (Partie convexe) *Soit E un e.v. sur K, avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Soit $C \subset E$. On dit que C est convexe si :*

$$u, v \in C,\ t \in [0, 1] \Rightarrow tu + (1 - t)v \in C.$$

Théorème 6.6 (Projection sur un convexe fermé non vide)
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide. Soit $x \in H$. Alors, il existe un et un seul $x_0 \in C$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$ (avec $d(x, y) = \|x - y\|_H$). On note $x_0 = P_C(x)$. P_C est donc une application de H dans H (dont l'image est égale à C). On écrit souvent $P_C x$ au lieu de $P_C(x)$.

Démonstration :
Existence de x_0.
On pose $d = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$. Comme $C \neq \emptyset$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ t.q. $d(x, y_n) \to d$ quand $n \to \infty$. On va montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en utilisant l'identité du parallélogramme (6.18) (ce qui utilise la structure hilbertienne de H) et la convexité de C.

L'identité du parallélogramme donne

$$\|y_n - y_m\|_H^2 = \|(y_n - x) - (y_m - x)\|_H^2 = -\|(y_n - x) + (y_m - x)\|_H^2 + 2\|y_n - x\|_H^2 + 2\|y_m - x\|_H^2,$$

et donc

$$\|y_n - y_m\|_H^2 = -4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|_H^2 + 2\|y_n - x\|_H^2 + 2\|y_m - x\|_H^2. \tag{6.20}$$

Comme C est convexe, on a $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$ et donc $d \leq \|\frac{y_n+y_m}{2} - x\|_H$. On déduit alors de (6.20) :

$$\|y_n - y_m\|_H^2 \leq -4d^2 + 2\|y_n - x\|_H^2 + 2\|y_m - x\|_H^2. \tag{6.21}$$

Comme $d(y_n, x) = \|y_n - x\|_H \to d$ quand $n \to \infty$, on déduit de (6.21) que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme H est complet, il existe donc $x_0 \in H$ t.q. $y_n \to x_0$ quand $n \to \infty$. Comme C est fermée, on a $x_0 \in C$. Enfin, comme $\|x - y_n\|_H \to d$ quand $n \to \infty$, on a, par continuité (dans H) de $z \mapsto \|z\|_H$, $d(x, x_0) = \|x - x_0\|_H = d = d(x, C)$. Ce qui termine la partie "existence".

Unicité de x_0. Soit $y_1, y_2 \in C$ t.q. $d(x, y_1) = d(x, y_2) = d(x, C) = d$. On utilise encore l'identité du parallélogramme. Elle donne (voir (6.20)) :

$$\|y_1 - y_2\|_H^2 = -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_H^2 + 2\|y_1 - x\|_H^2 + 2\|y_2 - x\|_H^2 = -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_H^2 + 4d^2.$$

Comme $\frac{y_1+y_2}{2} \in C$ On a donc $d \leq \|\frac{y_1+y_2}{2} - x\|_H$ et donc $\|y_1 - y_2\|_H^2 \leq -4d^2 + 4d^2 = 0$. Donc $y_1 = y_2$. Ce qui termine la partie "unicité".

■

Remarque 6.14 Le théorème précédent est, en général, faux si on remplace "Hilbert" par "Banach". Un exemple de non existence est donné à l'exercice 6.25 (et il est facile de trouver des exemples de non unicité).

On donne maintenant deux caractérisations importantes de la projection. La première est valable pour tout convexe fermé non vide alors que la deuxième ne concerne que les s.e.v. fermés.

Proposition 6.15 (Première caractérisation de la projection)
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide. Soient $x \in H$ et $x_0 \in C$.

1. *On suppose que H est un Hilbert réel. Alors :*

$$x_0 = P_C x \Leftrightarrow (x - x_0/x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C. \tag{6.22}$$

2. *On suppose que H est un Hilbert complexe. Alors :*

$$x_0 = P_C x \Leftrightarrow \Re(x - x_0/x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C. \tag{6.23}$$

Démonstration :

Cas d'un Hilbert réel

- **Sens ($\Rightarrow$)**

  On veut montrer que $(x - x_0/x_0 - y) \geq 0,$ pour tout $y \in C$. Comme $x_0 = P_C x$, on a $\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2$ pour tout $z \in C$. Soit $y \in C$. On prend $z = ty + (1-t)x_0$ avec $t \in]0,1]$. Comme C est convexe, on a $z \in C$ et donc

  $$\begin{aligned}\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2 &= (x - x_0 - t(y - x_0)/x - x_0 - t(y - x_0)) \\ &= \|x - x_0\|_H^2 + t^2\|y - x_0\|_H^2 - 2t(x - x_0/y - x_0).\end{aligned}$$

  On en déduit

  $$2t(x - x_0/y - x_0) - t^2\|y - x_0\|_H^2 \leq 0.$$

  On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t > 0$) pour obtenir

  $$2(x - x_0/y - x_0) - t\|y - x_0\|_H^2 \leq 0,$$

  ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :

  $$(x - x_0/x_0 - y) \geq 0.$$

- **Sens ($\Leftarrow$)**

  On veut montrer que $x_0 = P_C x$, c'est-à-dire $\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - y\|_H^2$ pour tout $y \in C$.

  Soit $y \in C$, on a $\|x-y\|_H^2 = \|x-x_0+x_0-y\|_H^2 = \|x-x_0\|_H^2+\|x_0-y\|_H^2+2(x-x_0/x_0-y) \geq \|x-x_0\|_H^2$ car $\|x_0 - y\|_H^2 \geq 0$ et $2(x - x_0/x_0 - y) \geq 0$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

- **Sens ($\Rightarrow$)**

  On veut montrer que $\Re(x - x_0/x_0 - y) \geq 0,$ pour tout $y \in C$.

  En reprenant les mêmes notations que dans le cas "Hilbert réel" et en suivant la même démarche, on obtient :

  $$\begin{aligned}\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2 &= (x - x_0 - t(y - x_0)/x - x_0 - t(y - x_0)) \\ &= \|x - x_0\|_H^2 + t^2\|y - x_0\|_H^2 - 2t\Re(x - x_0/y - x_0).\end{aligned}$$

  On en déduit

  $$2t\Re(x - x_0/y - x_0) - t^2\|y - x_0\|_H^2 \leq 0.$$

  On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t > 0$) pour obtenir

  $$2\Re(x - x_0/y - x_0) - t\|y - x_0\|_H^2 \leq 0,$$

  ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :

  $$\Re(x - x_0/x_0 - y) \geq 0.$$

- **Sens** ($\Leftarrow$)

  On veut montrer que $x_0 = P_C x$, c'est-à-dire $\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - y\|_H^2$ pour tout $y \in C$.

  Soit $y \in C$, on a $\|x-y\|_H^2 = \|x-x_0+x_0-y\|_H^2 = \|x-x_0\|_H^2+\|x_0-y\|_H^2+2\Re(x-x_0/x_0-y) \geq \|x-x_0\|_H^2$ car $\|x_0 - y\|_H^2 \geq 0$ et $2\Re(x - x_0/x_0 - y) \geq 0$.

■

Remarque 6.15 On prend comme espace de Hilbert réel $H = L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (avec $E \neq \emptyset$) et on prend $C = \{f \in H\colon\ f \geq 0 \text{ p.p.}\}$. On peut montrer que C est une partie convexe fermée non vide et que $P_C f = f^+$ pour tout $f \in H$. Ceci est fait dans l'exercice 6.24.

Un s.e.v. fermé est, en particulier, un convexe fermé non vide. On peut donc définir la projection sur un s.e.v. fermé. On donne maintenant une caractérisation de la projection dans ce cas particulier.

Proposition 6.16 (Deuxième caractérisation de la projection)
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et F un s.e.v. fermé de H. Soient $x \in H$ et $x_0 \in F$. Alors :

$$x_0 = P_F x \Leftrightarrow (x - x_0) \in F^\perp. \tag{6.24}$$

Démonstration :

Cas d'un Hilbert réel

- **Sens** ($\Leftarrow$)

  On veut montrer que $x_0 = P_F x$. On utilise la première caractérisation. Soit $y \in F$. Comme $(x - x_0) \in F^\perp$, on a $(x - x_0/x_0 - y) = 0 \geq 0$ (car $x_0 - y \in F$). Donc, la proposition 6.15 donne $x_0 = P_F x$.

- **Sens** ($\Rightarrow$)

  On veut montrer que $(x - x_0) \in F^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.15) donne $(x - x_0/x_0 - y) \geq 0$ pour tout $y \in F$. Soit $z \in F$. On choisit $y = x_0 + z \in F$ (car F est un s.e.v.) pour obtenir $(x - x_0/z) \leq 0$ et $y = x_0 - z \in F$ pour obtenir $(x - x_0/z) \geq 0$. On en déduit $(x - x_0/z) = 0$. Ce qui donne que $(x - x_0) \in F^\perp$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

- **Sens** ($\Leftarrow$)

  On veut montrer que $x_0 = P_F x$. Soit $y \in F$. Comme $(x - x_0) \in F^\perp$, on a $(x - x_0/x_0 - y) = 0$ (car $x_0 - y \in F$). On a donc $\Re(x - x_0/x_0 - y) = 0$. Donc, la proposition 6.15 donne $x_0 = P_F x$.

- **Sens** ($\Rightarrow$)

  On veut montrer que $(x - x_0) \in F^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.15) donne $\Re(x - x_0/x_0 - y) \geq 0$ pour tout $y \in F$. Soit $z \in F$. On choisit $y = x_0 - \alpha z \in F$ (car F est un s.e.v.) avec $\alpha = (x - x_0/z)$ pour obtenir $\Re(x - x_0/\alpha z) \leq 0$. Mais $(x - x_0/\alpha z) = \overline{\alpha}(x - x_0/z) = |(x - x_0/z)|^2$. Donc, $0 \geq \Re(x - x_0/\alpha z) = |(x - x_0/z)|^2$. On en déduit $(x - x_0/z) = 0$. Ce qui donne que $(x - x_0) \in F^\perp$.

■

Définition 6.10 (Projection orthogonale et projecteurs algébriques)

1. *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $F \subset H$ un s.e.v. fermé de H. L'opérateur P_F s'appelle "projecteur orthogonal sur F". Si $u \in H$, $P_F u$ s'appelle la projection orthogonale de u sur F.*

2. *(Rappel algébrique) Soit E un e.v. sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$). Soient F, G deux s.e.v. de E t.q. $E = F \oplus G$. Pour $x \in E$, il existe donc un et un seul couple $(y, z) \in F \times G$ t.q. $x = y + z$. On pose $y = Px$ et donc $z = (I - P)x$ (où I est l'application identité). P et $I - P$ sont les projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$. Ce sont des applications linéaires de E dans E. L'image de P est égale à F et L'image de $I - P$ est égale à G. Dans le prochain théorème, on va comparer la projection orthogonale et des projecteurs algébriques particuliers.*

Théorème 6.7
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et F un s.e.v. fermé de H. Alors :

1. $H = F \oplus F^{\perp}$,

2. *P_F (projecteur orthogonal sur F) est égal au projecteur algébrique sur F associé à la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$.*

3. $F = F^{\perp\perp}$.

Démonstration : On rappelle que l'on a déjà vu que $F^{\perp}$ est un s.e.v. fermé.

1. Soit $u \in H$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.16) donne $(u - P_F u) \in F^{\perp}$. Comme $P_F u \in F$, on en déduit que $H = F + F^{\perp}$.

   Soit maintenant $u \in F \cap F^{\perp}$. On doit donc avoir $(u/u) = 0$, ce qui donne $u = 0$ et donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

   On a donc $H = F \oplus F^{\perp}$.

2. Soit $u \in H$. Comme $u = P_F u + (u - P_F u)$, avec $P_F u \in F$ et $(u - P_F u) \in F^{\perp}$, on voit que P_F est égal au projecteur algébrique sur F associé à la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$. (Noter aussi que $(I - P_F)$ est égal au projecteur algébrique sur $F^{\perp}$ associé à la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$.)

3. Il reste à montrer que $F = F^{\perp\perp}$.

   - On a déjà vu que $F \subset F^{\perp\perp}$.
   - Soit $u \in F^{\perp\perp}$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.16) donne $(u - P_F u) \in F^{\perp}$ et on a aussi $(u - P_F u) \in F^{\perp\perp}$ car $u \in F^{\perp\perp}$ et $P_F u \in F \subset F^{\perp\perp}$. On a donc $(u - P_F u) \in F^{\perp} \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$. Donc $u = P_F u \in F$. On a donc montré que $F^{\perp\perp} \subset F$.

   Finalement, on a bien montré que $F = F^{\perp\perp}$.

■

Le théorème 6.7 a un corollaire très utile :

Corollaire 6.1
Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et F un s.e.v. de H. Alors :

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}.$$

Démonstration : $\overline{F}$ est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.7 donne donc $H = \overline{F} \oplus (\overline{F})^{\perp}$. On a déjà vu que $(\overline{F})^{\perp} = F^{\perp}$, on a donc

$$H = \overline{F} \oplus F^{\perp},$$

d'où l'on déduit

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}.$$

■

6.2.3 Théorème de Représentation de Riesz

Remarque 6.16 On rappelle ici la définition 6.7 et la remarque 6.10. Soit H est un Banach réel ou complexe. On note H' (ou $\mathcal{L}(H,K)$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $K = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $K = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). On rappelle que $H^{\star}$ est l'ensemble des applications linéaires de H dans K. On a donc $H' \subset H^{\star}$. Si H est de dimension finie, on a $H' = H^{\star}$, mais si H est de dimension infinie, on peut montrer que $H' \neq H^{\star}$.

1. Si $T \in H^{\star}$, on rappelle que T est continue si seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. $|T(u)| \leq k\|u\|_H$, pour tout $u \in H$.
2. Si $T \in H'$, on pose $\|T\|_{H'} = \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{|T(u)|}{\|u\|_H}$. On rappelle que $\|\cdot\|_{H'}$ est bien une norme sur H' et que H', muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K). Noter que ceci est aussi vrai si H est un e.v.n. non complet. Noter aussi que, si $T \in H'$ et $u \in H$, on a $|T(u)| \leq \|T\|_{H'}\|u\|_H$.
3. On suppose maintenant que H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u/v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.14) ou (6.15)), on a $|\varphi_v(u)| \leq \|u\|_H\|v\|_H$. On a donc $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \leq \|v\|_H$. En remarquant que $\varphi_v(v) = \|v\|_H^2$, on montre alors que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$.

   On considère maintenant l'application $\varphi : H \to H'$ définie par $\varphi(v) = \varphi_v$ pour tout $v \in H$.

   - Si $K = \mathbb{R}$, φ est une application linéaire de H dans H' car, pour tout $v, w \in H$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

     $$\varphi_{\alpha v+\beta w}(u) = (u/\alpha v + \beta w) = \alpha(u/v) + \beta(u/w) = \alpha\varphi_v(u) + \beta\varphi_w(u), \text{pour tout } u \in H,$$

     ce qui donne $\varphi_{\alpha v+\beta w} = \alpha\varphi_v + \beta\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc injective.)
   - Si $K = \mathbb{C}$, φ est une application "anti-linéaire" de H dans H' car, pour tout $v, w \in H$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

     $$\varphi_{\alpha v+\beta w}(u) = (u/\alpha v + \beta w) = \alpha(u/v) + \beta(u/w) = \overline{\alpha}\varphi_v(u) + \overline{\beta}\varphi_w(u), \text{pour tout } u \in H,$$

     ce qui donne $\varphi_{\alpha v+\beta w} = \overline{\alpha}\varphi_v + \overline{\beta}\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (anti-linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc, ici aussi, injective.)

L'objectif du théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) est de montrer que l'application φ est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(\varphi) = H'$.

Théorème 6.8
Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit $T \in H'$. Alors, il existe un et un seul $v \in H$ t.q.

$$T(u) = (u/v), \text{ pour tout } u \in H. \tag{6.25}$$

L'application φ définie dans la remarque 6.16 est donc surjective (le résultat ci dessus donne $T = \varphi_v$).

Démonstration :
Existence de v
On pose $F = \mathrm{Ker}(T)$. Comme T est linéaire et continue, F est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.7 donne donc $H = F \oplus F^\perp$. On distingue deux cas :

- **Cas 1.** On suppose ici que $T = 0$. On a alors $F = E$ et il suffit de prendre $v = 0$ pour avoir (6.25).
- **Cas 2.** On suppose maintenant que $T \neq 0$. On a donc $F \neq H$ et donc $F^\perp \neq \{0\}$ (car $H = F \oplus F^\perp$). Il existe donc $v_0 \in F^\perp$, $v_0 \neq 0$. Comme $v_0 \notin F$, on a $T(v_0) \neq 0$.

  Pour $u \in H$, on a alors
  $$u = u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 + \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0. \tag{6.26}$$
  On remarque que $u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 \in F$ car
  $$T(u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0) = T(u) - \frac{T(u)}{T(v_0)} T(v_0) = 0.$$
  Donc, comme $v_0 \in F^\perp$, $(u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0/v_0) = 0$ et (6.26) donne
  $$(u/v_0) = (\frac{T(u)}{T(v_0)} v_0/v_0) = \frac{T(u)}{T(v_0)} (v_0/v_0),$$
  d'où l'on déduit
  $$T(u) = \frac{T(v_0)}{(v_0/v_0)} (u/v_0).$$
  On pose $v = \frac{T(v_0)}{(v_0/v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{R}$ et $v = \frac{\overline{T(v_0)}}{(v_0/v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{C}$. On a bien
  $$T(u) = (u/v), \text{ pour tout } u \in H,$$
  c'est-à-dire $T = \varphi_v$ (avec les notations de la remarque 6.16).

Dans les 2 cas on a bien trouvé $v \in H$ vérifiant (6.25).

Unicité de v
Soit $v_1, v_2 \in H$ t.q. $T = \varphi_{v_1} = \varphi_{v_2}$ (avec les notations de la remarque 6.16). Comme φ est linéaire (si $K = \mathbb{R}$) ou anti-linéaire (si $K = \mathbb{C}$), on en déduit $\varphi_{v_1 - v_2} = \varphi_{v_1} - \varphi_{v_2} = 0$. Comme φ est une isométrie, on a donc $v_1 = v_2$, ce qui donne la partie unicité du théorème. ■

Remarque 6.17 Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit $T \in H^\star \setminus H'$. T est donc une application linéaire de H dans $K(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, non continue. On pose $F = \mathrm{Ker}(T)$. La démonstration du théorème 6.8 permet alors de montrer que $F^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{F} = H$ (dans un Hilbert H, le noyau d'une forme linéaire non continue est donc toujours dense dans H). En effet, on raisonne par l'absurde :

si $F^\perp \neq \{0\}$, il existe $v_0 \in F^\perp$, $v_0 \neq 0$. le raisonnement fait pour démontrer le théorème 6.8 donne alors $T(u) = (u/v)$ pour tout $u \in H$, avec $v = \frac{T(v_0)}{(v_0/v_0)}v_0$ si $K = \mathbb{R}$ et $v = \frac{\overline{T(v_0)}}{(v_0/v_0)}v_0$ si $K = \mathbb{C}$. On en déduit que T est continu, contrairement à l'hypothèse de départ.

On a donc $F^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{F}^\perp = F^\perp = \{0\}$. On en déduit, comme $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp$ (par le théorème 6.7, car $\overline{F}$ est toujours un s.e.v. fermé), que $H = \overline{F}$.

Remarque 6.18 (Structure hilbertienne de H') Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). On sait déjà que H' (avec la norme habituelle, voir la remarque 6.16) est un espace de Banach. Le théorème 6.8 permet aussi de montrer que H' est un espace de Hilbert. En effet, en prenant les notations de la remarque 6.16, l'application φ est un isométrie bijective, linéaire ou anti-linéaire de H dans H'. Cela suffit pour montrer que l'identité du parallélogramme (identité (6.18)) est vraie sur H' et donc que H' est une espace de Hilbert (voir la remarque (6.11)). Mais on peut même construire le produit scalaire sur H' (induisant la norme usuelle de H') :

Soient $T_1, T_2 \in H'$. Par le théorème 6.8, il existe $v_1, v_2 \in H$ t.q. $T_1 = \varphi_{v_1}$ et $T_2 = \varphi_{v_2}$. On pose $(T_1/T_2)_{H'} = (v_2/v_1)_H$ (où $(\cdot/\cdot)_H$ désigne ici le produit scalaire dans H). Il est facile de voir que $(\cdot/\cdot)_{H'}$ est un produit scalaire sur H'. Il induit bien la norme usuelle de H' car $(T_1/T_1)_{H'} = (v_1/v_1)_H = \|v_1\|_H^2 = \|\varphi_{v_1}\|_{H'}^2 = \|T_1\|_{H'}^2$ car φ est une isométrie.

6.2.4 Bases hilbertiennes

Soient E un e.v. sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $B = \{e_i,\, i \in I\} \subset E$ une famille d'éléments de E (l'ensemble I est quelconque, il peut être fini, dénombrable ou non dénombrable). On rappelle que $B = \{e_i,\, i \in I\} \subset E$ est une base (algébrique) de E si B vérifie les deux propriétés suivantes :

1. B est libre, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i\in J}\alpha_i e_i = 0, \text{ avec} \\ J \subset I, \, \mathrm{card}(J) < \infty, \\ \alpha_i \in K \text{ pour tout } i \in J,\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ pour tout } i \in J,$$

2. B est génératrice, c'est-à-dire que pour tout $u \in E$, il existe $J \subset I$, $\mathrm{card}(J) < \infty$, et il existe $(\alpha_i)_{i\in J} \subset K$ t.q. $u = \sum_{i\in J}\alpha_i e_i$.

En notant $\mathrm{vect}\{e_i,\, i \in I\}$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{e_i,\, i \in I\}$, le fait que B soit génératrice s'écrit donc : $E = \mathrm{vect}\{e_i,\, i \in I\}$.

On rappelle aussi que tout espace vectoriel admet des bases (algébriques). Cette propriété se démontre à partir de l'axiome du choix.

Dans le cas d'un espace de Hilbert, on va définir maintenant une nouvelle notion de base : la notion de base hilbertienne.

Définition 6.11 *Soient H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $B = \{e_i,\, i \in I\} \subset H$ une famille d'éléments de H (l'ensemble I est quelconque). La famille B est une base hilbertienne de H si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. $(e_i/e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases}$ *pour tout* $i, j \in I$.

2. $\overline{\mathrm{vect}\{e_i,\, i \in I\}} = H$. *On rappelle que* $\mathrm{vect}\{e_i,\, i \in I\} = \{\sum_{i\in J} \alpha_i e_i,\ J \subset I,\ \mathrm{card}(J) < \infty,\ (\alpha_i)_{i\in J} \subset K\}$.

Remarque 6.19 Soit H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si H est de dimension finie, il existe des bases hilbertiennes (qui sont alors aussi des bases algébriques). Le cardinal d'une base hilbertienne est alors égal à la dimension de H puisque, par définition, la dimension de H est égal au cardinal d'une base algébrique (ce cardinal ne dépendant pas de la base choisie). La démonstration de l'existence de bases hilbertiennes suit celle de la proposition 6.17 (la récurrence dans la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n = \dim(H) - 1$, voir la preuve de la proposition 6.17).

2. Si H est de dimension infinie et que H est séparable (voir la définition 6.12), il existe des bases hilbertiennes dénombrables (voir la proposition 6.17).

3. Si H est de dimension infinie et que H est non séparable, il existe toujours des bases hilbertiennes (ceci se démontre avec l'axiome du choix), mais elles ne sont plus dénombrables.

Définition 6.12 *Soit E un e.v.n. sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que E est séparable si il existe $A \subset E$ t.q. $\overline{A} = E$ et A au plus dénombrable.*

Proposition 6.17 *Soit H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension infinie. On suppose que H est séparable . Alors, il existe $B = \{e_i,\, i \in \mathbb{N}\} \subset H$, base hilbertienne de H.*

Démonstration : Comme H est séparable, il existe une famille $\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\} \subset H$ dense dans H, c'est-à-dire t.q. $\overline{\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\}} = H$.
On va construire, par une récurrence sur n, une famille $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ t.q. :

1. $(e_n/e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

2. $\{f_0, \ldots, f_n\} \subset \mathrm{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On aura alors trouvé une base hilbertienne car on aura $f_i \in \mathrm{vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $H = \overline{\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}} \subset H$, d'où $H = \overline{\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}}$. Avec la propriété $(e_n/e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, ceci donne bien que $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H.

On construit maintenant la famille $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.

Construction de e_0
Soit $\varphi(0) = \min\{i \in \mathbb{N};\ f_i \neq 0\}$ (les f_i ne sont pas tous nuls car $H \neq \{0\}$). On prend $e_0 = \frac{f_{\varphi(0)}}{\|f_{\varphi(0)}\|}$, de sorte que $(e_0/e_0) = 1$ et $f_0 \in \mathrm{vect}\{e_0\}$ (car $f_0 = \|f_0\| e_0$, même si $\varphi(0) \neq 0$).

Construction de e_{n+1}
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose construits $e_0, \ldots, e_n$ t.q.

- $(e_p/e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n\}$,
- $\{f_0, \ldots, f_p\} \subset \mathrm{vect}\{e_0, \ldots, e_p\}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$.

(Ce qui est vérifié pour $n = 0$ grâce à la construction de e_0.)

On construit maintenant e_{n+1} t.q. les deux assertions précédentes soient encore vraies avec $n+1$ au lieu de n.

Un sous espace vectoriel de dimension finie est toujours fermé, donc $\overline{\text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}} = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. Si $f_i \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a alors $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ et donc $H = \overline{\text{vect}\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}} = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. Ce qui prouve que H est de dimension finie (et $\dim(H) = n+1$). Comme H est de dimension infinie, il existe donc $i \in \mathbb{N}$ t.q. $f_i \notin \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ (dans le cas où H est dimension finie, la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n = \dim(H) - 1$ et on obtient une base hilbertienne avec $\{e_0, \ldots, e_n\}$). On pose alors $\varphi(n+1) = \min\{i \in \mathbb{N};\ f_i \notin \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}\}$. On a donc, en particulier, $\varphi(n+1) \geq n+1$. En prenant $\tilde{e}_{n+1} = f_{\varphi(n+1)} - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i = (f_{\varphi(n+1)}/e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on remarque que $\tilde{e}_{n+1} \neq 0$ (car $f_{\varphi(n+1)} \notin \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$) et que $(\tilde{e}_{n+1}/e_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Il suffit alors de prendre $e_{n+1} = \frac{\tilde{e}_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}$ pour avoir $(e_p/e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n+1\}$. Enfin, il est clair que $f_{n+1} \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_{n+1}\}$ car on a $f_{n+1} = \|\tilde{e}_{n+1}\| e_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_{n+1}\}$ si $\varphi(n+1) = n+1$ et $f_{n+1} \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ si $\varphi(n+1) > n+1$.

On a donc bien trouvé e_{n+1} t.q.

- $(e_p/e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n+1\}$,
- $\{f_0, \ldots, f_p\} \subset \text{vect}\{e_0, \ldots, e_p\}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, n+1\}$.

Ce qui conclut la construction de la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ vérifiant les deux assertions demandées. Comme cela a déjà été dit, la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est alors une base hilbertienne de H. ■

La proposition 6.17 montre donc que tout espace de Hilbert séparable, et de dimension infinie, admet une base hilbertienne dénombrable. On peut aussi démontrer la réciproque de ce résultat, c'est-à-dire que tout espace de Hilbert admettant une base hilbertienne dénombrable est séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.23). La proposition suivante s'adresse donc uniquement aux espaces de Hilbert séparables.

Proposition 6.18 *Soient H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. et $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H (l'espace H est donc séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.23) et, dans ce cas, une telle base existe d'après la proposition 6.17). Alors :*

1. *(Identité de Bessel) $\|u\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(u/e_n)|^2$, pour tout $u \in H$,*
2. *$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_n) e_n$, pour tout $u \in H$, c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{n} (u/e_i) e_i \to u$ dans H, quand $n \to \infty$,*
3. *soient $u \in H$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ t.q. $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ (c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \to u$ dans H quand $n \to \infty$), alors $\alpha_i = (u/e_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,*
4. *(identité de Parseval) $(u/v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_n)\overline{(v/e_n)}$, pour tout $u, v \in H$.*

DÉMONSTRATION : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. F_n est donc un s.e.v. fermé de H (on a $\dim(F_n) = n+1$ et on rappelle qu'un espace de dimension finie est toujours complet, F_n est donc fermé dans H).

On remarque que $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \text{vect}\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ et donc que $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = H$ (car $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H).

Soit $u \in H$. La suite $(d(u, F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $F_n \subset F_{n+1}$), on a donc $d(u, F_n) \downarrow l$ quand $n \to \infty$, avec $l \geq 0$. On va montrer que $l = 0$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ t.q.

$d(v,u) \le \varepsilon$ (car $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = H$). Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ t.q. $v \in F_n$. On a alors $d(u, F_n) \le \varepsilon$, ce qui prouve que $l \le \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien montré que $l = 0$.

On utilise maintenant le théorème d'existence et d'unicité de la projection sur un convexe fermé non vide (théorème 6.6). Il donne l'existence (et l'unicité) de $u_n = P_{F_n} u \in F_n$ t.q. $d(u_n, u) = d(u, F_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u = (u-u_n)+u_n$ et la deuxième caractérisation de la projection (proposition 6.16) donne que $(u-u_n) \in F_n^\perp$. Le théorème de Pythagore (théorème 6.5) donne enfin que $\|u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u-u_n\|^2$. Comme $\|u-u_n\| = d(u, u_n) = d(u, F_n) \downarrow 0$ quand $n \to \infty$, on en déduit que

$$\|u_n\|^2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty. \tag{6.27}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in F_n = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$, on a $u_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i = (u_n/e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ (car $(e_i/e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout i, j). Puis, comme $(u-u_n) \in F_n^\perp$, on a $(u - u_n/e_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, d'où l'on déduit que $\alpha_i = (u/e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. On a donc montré que $u_n = \sum_{i=0}^n (u/e_i) e_i$. Ce qui, avec le théorème de Pythagore, donne $\|u_n\|^2 = \sum_{i=0}^n |(u/e_i)|^2$. On obtient donc, avec (6.27) le premier item de la proposition, c'est-à-dire l'identité de Bessel.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition. En reprenant les notations précédentes, on a, pour $u \in H$, $u = (u-u_n) + u_n$ et $(u - u_n) \to 0$ dans H quand $n \to \infty$ (car $\|u - u_n\| = d(u, F_n)$). On a donc $u_n \to u$ dans H quand $n \to \infty$. Ceci donne bien le deuxième item de la proposition car on a vu que $u_n = \sum_{i=0}^n (u/e_i) e_i$.

Pour montrer le troisième item de la proposition, on suppose que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ est t.q. $\sum_{i=0}^n \alpha_i e_i \to u$ dans H quand $n \to \infty$. Soit $j \in \mathbb{N}$. On remarque que $(\sum_{i=0}^n \alpha_i e_i/e_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (e_i/e_j) = \alpha_j$ pour $n \ge j$. En utilisant la continuité du produit scalaire par rapport à son premier argument (ce qui est une conséquence simple de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on en déduit (faisant $n \to \infty$) que $(u/e_j) = \alpha_j$. Ce qui prouve bien le troisième item de la proposition.

Enfin, pour montrer l'identité de Parseval, on utilise la continuité du produit scalaire par rapport à ses deux arguments (ce qui est aussi une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), c'est-à-dire le fait que

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to u \text{ dans } H, \text{ quand } n \to \infty, \\ v_n \to v \text{ dans } H, \text{ quand } n \to \infty, \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n/v_n) \to (u/v) \text{ quand } n \to \infty. \tag{6.28}$$

Pour $u, v \in H$, on utilise (6.28) avec $u_n = \sum_{i=0}^n (u/e_i) e_i$ et $v_n = \sum_{i=0}^n (v/e_i) e_i$. On a bien $u_n \to u$ et $v_n \to v$ (d'après le deuxième item) et on conclut en remarquant que $(u_n/v_n) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (u/e_i)\overline{(v/e_j)}(e_i/e_j) = \sum_{i=0}^n (u/e_i)\overline{(v/e_i)}$. ■

Remarque 6.20 Soit H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, séparable et de dimension infinie.

1. Soit $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. On pose $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. Comme $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\} = \{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, la famille $\{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est donc aussi une base hilbertienne de H. On peut donc appliquer la proposition 6.18 avec la famille $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ ou avec la famille $\{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Le deuxième item de la proposition 6.18 donne alors, pour tout $u \in H$,

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_n) e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u/e_{\varphi(n)}) e_{\varphi(n)}.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_n)e_n$ est “commutativement convergente” (c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans H, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris). Noter pourtant que cette série peut ne pas être absolument convergente. On peut remarquer, pour donner un exemple, que la suite $(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}e_i)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ est de Cauchy, donc converge, dans H, quand $n\to\infty$, vers un certain u. Pour cet élément u de H, on a $(u/e_i) = \frac{1}{i+1}$ pour tout $i\in\mathbb{N}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_n)e_n$ est donc commutativement convergente mais n'est pas absolument convergente car $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|(u/e_n)e_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n+1} = \infty$ (voir à ce propos le corrigé 112). L'exercice 6.33 complète cet exemple en construisant une isométrie bijective naturelle entre H et l^2.

Par contre, on rappelle que, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente (voir l'exercice 2.33). On peut d'ailleurs remarquer que la série donnée à l'item 4 de la proposition 6.18 est commutativement convergente (pour la même raison que pour la série de l'item 2, donnée ci dessus) et est aussi absolument convergente. En effet, pour $u,v\in H$, on a $|(u/e_i)\overline{(v/e_i)}| \le |(u/e_i)|^2 + |\overline{(v/e_i)}|^2$ pour tout $i\in\mathbb{N}$, ce qui montre bien (grâce à l'identité de Bessel) que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_n)\overline{(v/e_n)}$ est absolument convergente (dans K).

2. Soit I un ensemble dénombrable (un exemple intéressant pour la suite est $I=\mathbb{Z}$) et $\{e_i,\, i\in I\}\subset H$.

   Soit $\varphi\,:\,\mathbb{N}\to I$ bijective. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. On a alors $\{e_i,\, i\in I\} = \{\tilde{e}_n,\, n\in\mathbb{N}\}$. La famille $\{e_i,\, i\in I\}$ est donc une base hilbertienne si et seulement si la famille $\{\tilde{e}_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne.

   Si la famille $\{e_i,\, i\in I\}$ est une base hilbertienne, on peut donc appliquer la proposition 6.18 avec la famille $\{\tilde{e}_n,\, n\in\mathbb{N}\}$. On obtient, par exemple, que pour tout $u\in H$:

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}.$$

   La somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u/e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}$ ne dépend donc pas du choix de la bijection φ entre $\mathbb{N}$ et I et il est alors légitime de la noter simplement $\sum_{i\in I}(u/e_i)e_i$. Ceci est détaillé dans la définition 6.13 et permet d'énoncer la proposition 6.19.

Définition 6.13 *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et I un ensemble dénombrable. Soit $(u_i)_{i\in I}\subset H$. On dit que la série $\sum_{i\in I}u_i$ est commutativement convergente si il existe $u\in H$ t.q., pour tout $\varphi\,:\,\mathbb{N}\to I$ bijective, on ait :*

$$\sum_{p=0}^{n}u_{\varphi(p)} \to u, \text{ quand } n\to\infty.$$

On note alors $u=\sum_{i\in I}u_i$.

Proposition 6.19 *Soit H un espace de Hilbert sur K, $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient I dénombrable et $\{e_i,\, i\in I\}$ une base hilbertienne de H (l'espace H est donc séparable et de dimension infinie). Alors :*

1. *(Identité de Bessel) Pour tout $u\in H$, la série $\sum_{i\in I}|(u/e_i)|^2$ est commutativement convergente et $\|u\|^2=\sum_{i\in I}|(u/e_i)|^2$,*
2. *Pour tout $u\in H$, la série $\sum_{i\in I}(u/e_i)e_i$ est commutativement convergente et $u=\sum_{i\in I}(u/e_i)e_i$,*

3. *soient $u \in H$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ t.q. la série $\sum_{i\in I} \alpha_i e_i$ est commutativement convergente et $u = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, alors $\alpha_i = (u/e_i)$ pour tout $i \in I$,*

4. *(identité de Parseval) Pour tout $u, v \in H$, la série $\sum_{i\in I}(u/e_i)\overline{(v/e_i)}$ est commutativement convergente et $(u/v) = \sum_{i\in I}(u/e_i)\overline{(v/e_i)}$*

Démonstration : La démonstration est immédiate à partir de la proposition 6.18 et de la définition des séries commutativement convergentes (définition 6.13). Il suffit de remarquer que $\{e_{\varphi(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H pour toute application $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to I$ bijective (et d'appliquer la proposition 6.18), comme cela est indiqué dans la remarque 6.20 (deuxième item). ∎

La proposition suivante donne une caractérisation très utile des bases hilbertiennes.

Proposition 6.20 (Caractérisation des bases hilbertiennes)
Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe. Soit $\{e_i,\ i \in I\} \subset H$ t.q. $(e_i/e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $i, j \in I$. Alors, $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si :

$$u \in H,\ (u/e_i) = 0\,\forall i \in I \Rightarrow u = 0.$$

Démonstration : On pose $F = \mathrm{vect}\{e_i,\ i \in I\}$. F est s.e.v. de H.
On sait que $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si $\overline{F} = H$. Or, on a déjà vu (proposition 6.1) que $\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$. Donc, $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in H, u \in F^\perp \Rightarrow u = 0.$$

Comme $u \in F^\perp$ si et seulement si $(u/e_i) = 0$ pour tout $i \in I$, on en déduit que $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in H,\ (u/e_i) = 0\,\forall i \in I \Rightarrow u = 0.$$

∎

On donne maintenant un exemple de base hilbertienne, cet exemple donne un résultat de convergence de la série de Fourier d'une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Pour cet exemple, on prend $H = L^2_{\mathbb{C}}(]0, 2\pi[, \mathcal{B}(]0, 2\pi[), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]0, 2\pi[)$. On rappelle que H est un espace de Hilbert complexe et que le produit scalaire sur H est donné par $(f/g)_2 = \int f\overline{g}d\lambda = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$ pour $f, g \in H$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n \in H$ par (en confondant e_n avec son représentant continu) :

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx),\ x \in]0, 2\pi[. \tag{6.29}$$

La convergence dans H de la série de Fourier de $f \in H$ est alors donnée par la proposition suivante (noter que cette proposition ne donne pas de convergence ponctuelle de la série de Fourier, même si f est continue).

Proposition 6.21 (Séries de Fourier) *Soit $H = L^2_{\mathbb{C}}(]0, 2\pi[, \mathcal{B}(]0, 2\pi[), \lambda)$. Alors :*

1. *La famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, où e_n est donnée par (6.29), est une base hilbertienne de H.*

2. Pour tout $f \in H$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f/e_n)_2 e_n$ est commutativement convergente et

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f/e_n)_2 e_n.$$

En particulier, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n}(f/e_p)_2 e_p(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Démonstration : Pour démontrer que $\{e_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne, on utilise la proposition 6.20. Il suffit donc de montrer :

1. $(e_n/e_m)_2 = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$,
2. $f \in H$, $(f/e_n)_2 = 0\ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

L'assertion 1 est immédiate car $(e_n/e_m)_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\exp(i(n-m)x)dx$. Ce qui donne bien 0 si $n \neq m$ et 1 si $n = m$.

Pour montrer l'assertion 2, soit $f \in H$ t.q. $(f/e_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On va montrer que $f = 0$ (c'est-à-dire $f = 0$ p.p.) en raisonnant en plusieurs étapes.

Etape 1. On note $P = \text{vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ (P est donc l'ensemble des polynômes trigonométriques). Par antilinéarité du produit scalaire de H par rapport à son deuxième argument, on a $(f/g) = 0$ pour tout $g \in P$.

Etape 2. On note $C_p = \{g \in C([0, 2\pi], \mathbb{C});\ g(0) = g(2\pi)\}$. On peut montrer que P est dense dans C_p pour la norme de la convergence uniforme (définie par $\|g\|_u = \max\{g(x),\ x \in [0, 2\pi]\}$). On admet ce résultat ici (c'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass). Soit $g \in C_p$, il existe donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P$ t.q. $g_n \to g$ uniformément sur $[0, 2\pi]$. On a donc $\|g_n - g\|_u = \|g_n - g\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$. Comme $\lambda([0, 2\pi]) < \infty$, on en déduit que $\|g_n - g\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$. (Plus précisément, on a ici $\|\cdot\|_2 \le \sqrt{2\pi}\|\cdot\|_\infty$). Comme $(f/g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par l'étape 1), on en déduit (avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz) que $(f/g)_2 = 0$. On a donc $(f/g)_2 = 0$ pour tout $g \in C_p$.

Etape 3. Soit $g \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit g_n par :

$$\begin{aligned}&g_n(x) = g(x), \text{ si } x \in [\tfrac{1}{n}, 2\pi],\\ &g_n(x) = g(2\pi) + (g(\tfrac{1}{n}) - g(2\pi))(nx), \text{ si } x \in [0, \tfrac{1}{n}[,\end{aligned}$$

de sorte que $g_n \in C_p$ (noter que g_n est affine entre 0 et $\frac{1}{n}$ et vérifie $g_n(0) = g(2\pi)$ et $g_n(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$).

Par l'étape 2, on a $(f/g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. D'autre part, le théorème de convergence dominée dans L^p donne que $g_n \to g$ dans H quand $n \to \infty$ (noter en effet que $g_n \to g$ p.p. et que $g_n \le \|g\|_\infty \in H$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$). On en déduit donc que $(f/g)_2 = 0$. On a donc $(f/g)_2 = 0$ pour tout $g \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

Etape 4. On prend maintenant $g \in H = L^2_{\mathbb{C}}(]0, 2\pi[, \mathcal{B}(]0, 2\pi[), \lambda)$. On définit $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $\tilde{g} = g$ sur $[0, 2\pi]$ et $\tilde{g} = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$. On obtient ainsi $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (On a, comme d'habitude, confondu un élément de L^2 avec l'un de ses représentants; et λ désigne maintenant la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On montre dans l'exercice (corrigé) 6.4 que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On en déduit facilement que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Il existe donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ t.q. $h_n \to \tilde{g}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, quand $n \to \infty$. On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |h_n(x) - g(x)|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}} |h_n(x) - \tilde{g}(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

En posant $g_n = (h_n)_{|_{[0,2\pi]}}$, on a donc $g_n \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ et $g_n \to g$ dans H, quand $n \to \infty$. Comme l'étape 3 donne $(f/g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(f/g)_2 = 0$.

Pour conclure, il suffit maintenant de prendre $g = f$. On obtient $(f/f)_2 = 0$ et donc $f = 0$ p.p..

On a bien ainsi montré (grâce à la proposition 6.20) que $\{e_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition.

Soit $f \in H$. La proposition 6.19 donne que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f/e_n)_2 e_n$ est commutativement convergente et que

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f/e_n)_2 e_n.$$

En utilisant la définition 6.13 et la bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ donnée par $\varphi(0) = 0$, et, pour $n \geq 1$, $\varphi(2n-1) = n$, $\varphi(2n) = -n$, on a donc, en particulier, $\sum_{i=0}^{m}(f/e_{\varphi(m)})_2 e_{\varphi(m)} \to f$, dans H, quand $m \to \infty$. en prenant $m = 2n$, ceci donne exactement

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n}(f/e_p)e_p(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

■

6.3 Dualité dans les espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$

6.3.1 Dualité pour $p = 2$

Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $H = L^2_K(E, T, m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in L^2_K(E, T, m)$. On note $\varphi_f \;:\; H \to K$, l'application définie par $\varphi_f(g) = (g/f)_2$. On a déjà vu (remarque 6.10) que $\varphi_f \in H'$ (dual topologique de H). On remarque aussi que $\|\varphi_f\|_{H'} = \|f\|_H = \|f\|_2$. En effet $|\varphi_f(g)| \leq \|f\|_H\|g\|_H$ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et $|\varphi_f(f)| \leq \|f\|^2_H$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{H'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_H},\ g \in H \setminus \{0\}\} = \|f\|_H.$$

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8 page 153) appliqué à l'espace de Hilbert $H = L^2_K(E, T, m)$ donne que pour tout $T \in H'$, il existe un et un seul $f \in H$ t.q. $T(g) = (g/f)_2$ pour tout $g \in H$, c'est-à-dire un et un seul $f \in H$ t.q. $T = \varphi_f$.

L'application $\varphi \;: f \mapsto \varphi_f$ est donc une isométrie bijective de $L^2_K(E, T, m)$ sur $L^2_K(E, T, m)$. (Noter que φ est linéaire si $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $K = \mathbb{C}$.)

Cette situation est spécifique au cas $p = 2$. Nous examinons ci-après le cas général $1 \leq p \leq \infty$.

6.3.2 Dualité pour $1 \leq p \leq \infty$

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty]$, on pose $q = \frac{p}{p-1} \in [1, +\infty]$ (de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, q s'appelle le conjugué de p). Dans toute cette section, on note $L^r_K = L^r_K(E, T, m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (et $r \in [1, \infty]$).

On cherche à caractériser le dual de L^p_K, de manière semblable à ce qui a été fait à la section précédente dans le cas $p = 2$.

Soit $f \in L^q_K$, on considère l'application :

$$\varphi_f \ : g \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int gf dm \text{ si } K = \mathbb{R}, \\ \displaystyle\int g\overline{f} dm \text{ si } K = \mathbb{C}. \end{array} \right. \tag{6.30}$$

L'inégalité de Hölder (proposition 6.9) montre que $\varphi_f(g)$ est bien définie si $g \in L^p_K$ et que $\varphi_f \in (L^p_K)'$ (dual topologique de L^p_K). On peut aussi obtenir un majorant de la norme de φ_f car l'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_f(g)| \leq \|f\|_q \|g\|_p, \text{ pour tout } g \in L^p_K,$$

d'où l'on déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p}, \ g \in L^p_K \setminus \{0\}\} \leq \|f\|_q. \tag{6.31}$$

On définit donc une application $\varphi \ : f \mapsto \varphi_f$ de L^q_K dans $(L^p_K)'$. La définition de φ_f (formule (6.30)) montre que cette application est linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. Elle est toujours continue, grâce à (6.31). On montre maintenant que c'est, en général, une isométrie.

Proposition 6.22
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Si $p = 1$, la mesure m est supposée de plus σ-finie. L'application $\varphi \ : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.30) est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. De plus , c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$. (L'application φ est donc nécessairement injective, mais pas forcément surjective.)

Démonstration : on sait déjà que φ est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. On sait aussi que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} \leq \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$ (voir (6.31)). Pour terminer la démonstration de cette proposition, Il suffit donc de montrer que, pour tout $f \in L^q_K$,

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} \geq \|f\|_q. \tag{6.32}$$

On se limite au cas $K = \mathbb{R}$ (les adaptations pour traiter le cas $K = \mathbb{C}$ sont faciles à deviner).

Soit $f \in L^q_{\mathbb{R}}$. On suppose $f \neq 0$ (sinon (6.32) est immédiat). On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^q = \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour montrer 6.32, on va chercher $g \in L^p_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q$. On distingue maintenant trois cas.

Cas 1 : $1 < p < \infty$. On définit $g \ : \ E \to \mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x)|^{q-1}\text{sign}(f(x))$ pour tout $x \in E$, avec la fonction sign $: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\text{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\text{sign}(0) = 0$. La fonction g est mesurable (comme composée d'applications mesurables) et on a (en notant que $p = \frac{q}{q-1}$) :

$$\int |g|^p dm = \int (|f|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} dm = \int |f|^q dm < \infty.$$

Donc, $g \in L^p_{\mathbb{R}}$ (plus précisément, $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$) et $\|g\|_p = \|f\|_q^{\frac{q}{p}} \neq 0$. Pour ce choix de g, on a donc

$$\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \int fg dm = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \|f\|_q^q = \|f\|_q,$$

car $q - \frac{q}{p} = 1$.
On en déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(L_K^p)'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(h)|}{\|h\|_p},\ h \in L_K^p \setminus \{0\}\} \geq \frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q,$$

ce qui donne (6.32).

Cas 2 : $p = \infty$**.** On a, dans ce cas, $q = 1$. On prend, comme pour le premier cas, $g = \text{sign}(f)$. On a ici $g \in L_{\mathbb{R}}^\infty$ et $\|g\|_\infty = 1$ (car $m(E) \neq 0$, sinon $L_{\mathbb{R}}^1 = \{0\}$ et il n'y a pas de $f \in L_{\mathbb{R}}^1$, $f \neq 0$). Pour ce choix de g, on a $\varphi_f(g) = \|f\|_1$, donc $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_\infty} = \|f\|_1$ et, comme dans le premier cas, ceci donne (6.32).

Cas 3 : $p = 1$**.** On a, dans ce cas, $q = \infty$. Ce cas est un peu plus délicat que les précédents. On ne peut pas toujours trouver $g \in L_K^1 \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_1} = \|f\|_\infty$. En utilisant le caractère σ-fini de m, on va, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, trouver $g_n \in L_K^1 \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g\|_1} \geq \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$. Ce qui permet aussi de montrer (6.32).

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $\alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$ et $A_n = \{|f| \geq \alpha_n\}$. On a $m(A_n) > 0$ (car $m(A_n) = 0$ donnerait $\|f\|_\infty \leq \alpha_n$).
Si $m(A_n) < \infty$, on peut prendre $g_n = \text{sign}(f)1_{A_n}$ qui est mesurable (car $\text{sign}(f)$ et 1_{A_n} sont mesurables) et intégrable car $m(A_n) < \infty$. On a alors $g_n \in L_{\mathbb{R}}^1 \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n)$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n} |f| dm \geq \alpha_n m(A_n)$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L_K^1)'} \geq \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \geq \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.32).
Si $m(A_n) = \infty$, le choix de $g_n = \text{sign}(f)1_{A_n}$ ne convient pas car $\text{sign}(f)1_{A_n} \notin L_{\mathbb{R}}^1$. On utilise alors le fait que m est σ-finie. Comme m est σ-finie, il existe une suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(E_p) < \infty$, $E_p \subset E_{p+1}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, et $E = \cup_{p\in\mathbb{N}} E_p$. Par continuité croissante de m, on a donc $m(A_n \cap E_p) \uparrow m(A_n)$ quand $p \to \infty$. Comme $m(A_n) > 0$ il existe donc $p \in \mathbb{N}$ (dépendant de n, on ne note pas cette dépendance) t.q. $m(A_n \cap E_p) > 0$. On prend alors $g_n = \text{sign}(f)1_{A_n \cap E_p}$. On a bien alors $g_n \in L_{\mathbb{R}}^1 \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n \cap E_p) \leq m(E_p) < \infty$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n \cap E_p} |f| dm \geq \alpha_n m(A_n \cap E_p)$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L_K^1)'} \geq \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \geq \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.32). ce qui conclut la preuve de la proposition. ■

La proposition 6.22 montre que l'application $\varphi\ : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.30) est une application de L_K^q dans $(L_K^p)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. De plus, c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(L_K^p)'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in L_K^q$. Comme cela a déjà été dit, l'application φ est donc nécessairement injective car $\varphi_f = \varphi_h$ implique $\varphi_{f-h} = 0$ et donc $\|f-h\|_q = \|\varphi_{f-h}\|_{(L_K^p)'} = 0$, ce qui donne $f = h$ p.p.. Mais l'application φ n'est pas forcément surjective. On sait qu'elle est surjective si $p = 2$ (c'était l'objet de la section précédente). Le théorème suivant montre qu'elle est surjective si m est σ-finie et $p \in [1, +\infty[$ (de sorte qu'on identifie souvent, dans ce cas, $(L_K^p)'$ à L_K^q).

Théorème 6.9 (Dualité $L^p - L^q$**)** *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré* σ*-fini,* $1 \leq p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ *et* $T \in (L_K^p)'$. *Alors, il existe un unique* $f \in L_K^q$ *t.q.*

$$T(g) = \begin{cases} \displaystyle\int g f dm \text{ si } K = \mathbb{R}, \\ \displaystyle\int g \overline{f} dm \text{ si } K = \mathbb{C}, \end{cases}$$

c'est-à-dire t.q. $T = \varphi_f$ *donné par (6.30) (on a donc montré la surjectivité de l'application* $\varphi\ :\ L^q_K \to (L^p_K)'$ *définie par* $\varphi(f) = \varphi_f$ *pour* $f \in L^q_K$*).*

Remarque 6.21 (Dual de L^∞) Noter que le théorème précédent est, en général, faux pour $p = \infty$. L'application $\varphi\ : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.30) est donc une isométrie (linéaire ou antilinéaire, selon que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de L^1_K dans $(L^\infty_K)'$ mais l'image de φ est, sauf cas très particuliers, différente de $(L^\infty_K)'$. L'application φ ne permet donc pas d'identifier le dual de L^∞_K à L^1_K.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.9:
La démonstration de ce théorème est faite dans l'exercice 6.39. Elle consiste essentiellement à se ramener directement à appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) dans un espace L^2 approprié.

Une autre démonstration, probablement plus classique, consiste à appliquer le théorème de Radon-Nikodym, qui lui-même se démontre en se ramenant au théorème de représentation de Riesz. Cette démonstration est donnée, dans un cas particulier, dans l'exercice 6.36. Nous verrons le théorème de Radon-Nikodym dans la section suivante, voir les théorèmes 6.10 et 6.11.

Enfin, on propose dans l'exercice 6.38 une autre démonstration de ce théorème dans le cas $p < 2$ (utilisant toujours le théorème de représentation de Riesz). ■

Une conséquence intéressante du théorème de dualité (théorème 6.9) est le caractère réflexif des espaces L^p pour $1 < p < \infty$, ce que l'on détaille maintenant.

Soit F un espace de Banach réel (mais il est possible de traiter aussi les Banach complexes). On note F' le dual (topologique) de F et F'' le dual (topologique) de F'. On dit aussi que F'' est le bidual de F. Pour $u \in F$, on définit $J_u\ :\ F' \to \mathbb{R}$ par

$$J_u(T) = T(u) \text{ pour tout } T \in F'. \tag{6.33}$$

Il est facile de voir que $J_u \in F''$ et $\|J_u\|_{F''} \le \|u\|_F$. On peut en fait montrer que $\|J_u\|_{F''} = \|u\|_F$ (c'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach, non démontré ici). Comme l'application $J\ : u \mapsto J_u$ est linéaire, c'est donc une isométrie linéaire de F dans F''. Il est alors immédiat que J est injective. On l'appelle "'injection canonique" de F dans F''. Par contre, J n'est pas toujours surjective.

Définition 6.14 *Soit F un espace de Banach, F' son dual (topologique) et F'' son bidual (c'est-à-dire le dual topologique de F'). Pour $u \in F$, on définit $J_u \in F''$ par (6.33). On dit que l'espace F est réflexif si l'application $J\ : u \mapsto J_u$ (de F dans F'') est surjective (l'application J est toujours injective).*

Un espace de Hilbert H est toujours réflexif car l'application J est alors simplement la composée des deux bijections de H dans H' et de H' dans H'' données par le théorème de représentation de Riesz (Théorème 6.8). Ce qui montre que J est surjective. L'espace $L^2_R(E, T, m)$ est donc réflexif. Plus généralement, une conséquence directe du théorème 6.9 est que les espaces L^p, sont réflexifs pour $p \in]1, +\infty[$.

Proposition 6.23 *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 < p < +\infty$. Alors, l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est réflexif.*

DÉMONSTRATION : On pose $q = \frac{p}{p-1}$, $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $L^q = L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
On note Φ l'application de L^p dans $(L^q)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.30), et on note Ψ l'application de L^q dans $(L^p)'$ définie par $\Psi(f) = \varphi_f$.

Comme $p \neq \infty$ et $q \neq \infty$, le théorème 6.9 donne que Φ est une bijection de L^p dans $(L^q)'$ et Ψ est une bijection de L^q dans $(L^p)'$. On rappelle aussi que Φ et Ψ sont des isométries linéaires.

Soit $s \in (L^p)''$. Pour montrer que L^p est réflexif, il suffit de montrer qu'il existe $u \in L^p$ t.q. $J_u = s$ (où J_u est défini par 6.33), c'est-à-dire t.q. $s(T) = T(u)$ pour tout $T \in (L^p)'$.

On va montrer que $u = \Phi^{-1}(s \circ \Psi)$ convient. En effet, soit $T \in (L^p)'$. On a :

$$T(u) = \int u\Psi^{-1}(T)dm,$$

et :

$$s(T) = (s \circ \Psi)(\Psi^{-1}(T)) = \Phi(u)(\Psi^{-1}(T)) = \int u\Psi^{-1}(T)dm = T(u).$$

On a donc bien montré que l'application $J\ : u \mapsto J_u$ (de L^p dans $(L^p)''$) est surjective, c'est-à-dire que L^p est réflexif.

On peut aussi noter que la démonstration de cette proposition donne en fait que $J_u = \Phi(u) \circ \Psi^{-1}$ pour tout $u \in L^p$. ■

6.3.3 Théorème de Radon-Nikodym

La définition 4.4 donnait la définition d'une mesure de densité. On reprend ici cette définition et on donne aussi la définition de mesure "signée" de densité.

Définition 6.15 (Mesure de densité) *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *Soit μ une mesure sur T. On dit que μ est une mesure de densité par rapport à m si il existe $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu(A) = \int_A f dm$, pour tout $A \in T$. On pose alors $\mu = fm$ (on dit aussi que f est la densité de μ par rapport à m).*
2. *Soit μ une mesure signée sur T. On dit que μ est une mesure signée de densité par rapport à m si il existe $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $\mu(A) = \int_A f dm$, pour tout $A \in T$. On pose alors $\mu = fm$ (on dit aussi que f est la densité de μ par rapport à m).*

Remarque 6.22 (Sur les mesures de densité) Soient (E, T, m) un espace mesuré et μ une mesure sur T.

1. (Unicité de la densité) Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$. On suppose que $\mu = fm$ et $\mu = gm$. On a alors $f = g$ m-p.p.. En effet, on doit avoir $\int_A f dm = \int_A g dm$ pour tout $A \in T$. En choisissant $A = \{f > g\}$ puis $A = \{f < g\}$, on en déduit que $\int_{\{f>g\}}(f - g)dm + \int_{\{f<g\}}(g - f)dm = 0$. Ce qui donne $\int |f - g|dm = 0$ et donc $f = g$ m-p.p..
2. (Espace $\mathcal{L}^1$ pour une mesure de densité) Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu = fm$. Soit $g \in \mathcal{M}$, l'exercice (corrigé) 4.22 donne alors les assertions suivantes :
   (a) $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu) \Leftrightarrow fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,
   (b) $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu) \Rightarrow \int g d\mu = \int fg dm$.
3. (Absolue continuité d'une mesure de densité) Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu = fm$. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On a alors $f1_A = 0$ m-p.p. et donc $\mu(A) = \int f1_A dm = 0$. Selon la définition 6.16 ci-après, ceci montre que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m. L'objectif du théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.10) sera de démontrer la réciproque de ce résultat (si μ est finie et m est σ-finie).

Rappelons la définition d'une mesure absolument continue :

Définition 6.16 (Mesure absolument continue) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et μ une mesure (positive ou signée) sur T. On dit que μ est absolument continue par rapport à m, et on note $\mu << m$, si :*

$$A \in T, m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Remarque 6.23 *On donne ici un exemple de mesure non absolument continue : on prend $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\mu = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0 sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Comme $\lambda(\{0\} = 0$ et $\delta_0(\{0\} = 1$, la mesure δ_0 n'est pas absolument continue par rapport à λ.*

On donne maintenant le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures (positives).

Théorème 6.10 (Radon-Nikodym) *Soient (E, T, m) un espace mesuré σ-fini et μ une mesure finie sur T. Alors, μ est absolument continue par rapport à m si et seulement si μ est une mesure de densité par rapport à m.*

Démonstration :
Sens ($\Leftarrow$). Ce sens a été montré dans le troisième item de la remarque 6.22 (et les hypoth eses "μ finie" et "m σ-finie" sont inutiles. (Noter aussi que le premier item de cette même remarque donne l'unicité m-p.p. de la densité de μ par rapport à m.)

Sens ($\Rightarrow$). Pour toute mesure ν sur T et pour tout $1 \le p \le \infty$, on note $\mathcal{L}^p(\nu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, \nu)$ et $L^p(\nu) = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, \nu)$.

Pour démontrer que μ est absolument continue par rapport à m, on va appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8) dans l'espace de Hilbert $H = L^2_{\mathbb{R}}(\mu + m)$.
On rappelle d'abord que l'exercice (corrigé) 4.2 donne que $\mu + m$ est une mesure sur T (définie par $(\mu+m)(A) = \mu(A)+m(A)$ pour tout $A \in T$) et que les deux propriétés suivantes sont vérifiées (questions 1 et 2 de l'exercice 4.2) :

$$g \in \mathcal{L}^1(\mu + m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\mu),$$
$$g \in \mathcal{L}^1(\mu + m) \Rightarrow \int g d(\mu + m) = \int g d\mu + \int g dm. \tag{6.34}$$

Il est aussi clair que $\int f d(\mu + m) = \int f d\mu + \int f dm$ pour tout $f \in \mathcal{M}_+$ (voir le corrigé 60 de l'exercice 4.2). Pour $g \in \mathcal{M}$, on a donc $\int g^2 d(\mu+m) = \int g^2 d\mu + \int g^2 dm$, ce qui donne $\mathcal{L}^2(\mu+m) = \mathcal{L}^2(\mu) \cap \mathcal{L}^2(m)$.
Enfin, pour $A \in T$, on a $(\mu + m)(A) = 0$ si et seulement si $\mu(A) = m(A) = 0$. On a donc, pour $f, g : E \to \mathbb{R}$:

$$f = g \ (\mu + m)\text{-p.p.} \Leftrightarrow \begin{cases} f = g \ \mu\text{-p.p.}, \\ f = g \ m\text{-p.p.}. \end{cases}$$

On décompose maintenant la démonstration en 3 étapes.

Etape 1. Utilisation du théorème de Riesz.
On pose $H = L^2(\mu + m)$ (H est donc un espace de Hilbert). On veut définir $T : H \to \mathbb{R}$ par :

$$T(g) = \int g d\mu \text{ pour tout } g \in H. \tag{6.35}$$

On montre tout d'abord que cette définition est correcte. Soit $g \in H = L^2(\mu + m)$. On choisit un représentant de g, encore noté g, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m) = \mathcal{L}^2(\mu) \cap L^2(m)$. Comm μ est finie, on a $\mathcal{L}^2(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Donc $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int g d\mu$ existe et appartient à $\mathbb{R}$. Puis, on remarque que $\int g d\mu$ ne dépend pas du représentant choisi car $g_1 = g_2$ $(\mu + m)$-p.p. implique $g_1 = g_2$ μ-p.p.. L'application T est donc bien définie de H dans $\mathbb{R}$ par (6.35).

On montre maintenant que $T \in H'$. Il est immédiat que T est linéaire. On remarque ensuite que, pour tout $g \in H$, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec g et 1_E, $|T(g)| = |\int g d\mu| \le \|g\|_{L^2(\mu)} \sqrt{\mu(E)}$ $\le \|g\|_{L^2(\mu+m)} \sqrt{\mu(E))} = \|g\|_H \sqrt{\mu(E)}$. On a donc $T \in H'$ (et $\|T\|_{H'} \le \sqrt{\mu(E)}$).

On peut maintenant appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.8). Il donne qu'il existe $\varphi \in H = L^2(\mu + m)$ t.q. $T(g) = \int g\varphi d(\mu + m)$ pour tout $g \in L^2(\mu + m)$. On choisit un représentant de φ, encore noté φ. On a alors $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ et

$$\int g d\mu = \int g\varphi d(\mu + m) \text{ pour tout } g \in \mathcal{L}^2(\mu + m). \tag{6.36}$$

Pour $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$, on a $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu + m)$ et donc $\int g\varphi d(\mu + m) = \int g\varphi d\mu + \int g\varphi dm$ (d'après (6.34)). On déduit donc de (6.36) :

$$\int g(1 - \varphi) d\mu = \int g\varphi dm, \text{ pour tout } g \in \mathcal{L}^2(\mu + m). \tag{6.37}$$

Etape 2. On cherche dans cette étape des bornes sur φ.

On montre tout d'abord que $\varphi \ge 0$ m-p.p. et μ-p.p. (ce qui est équivalent a dire que $\varphi \ge 0$ $(\mu+m)$-p.p.). Comme m est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \{\varphi < 0\} \cap A_n \in T$. Dans (6.37), on prend $g = 1_{B_n}$ (on a bien $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ car $(\mu + m)(B_n) \le \mu(E) + m(A_n) < \infty$). On obtient

$$\int (1 - \varphi) 1_{B_n} d\mu = \int \varphi 1_{B_n} dm.$$

Comme $(1 - \varphi) > 0$ et $\varphi < 0$ sur B_n, on en déduit que $(1 - \varphi)1_{B_n} = 0$ μ-p.p. et $\varphi 1_{B_n} = 0$ m-p.p. et donc $\mu(B_n) = m(B_n) = 0$.
Par σ-additivité d'une mesure, comme $\{\varphi < 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, on en déduit $(\mu + m)(\{\varphi < 0\}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu + m)(B_n) = 0$ et donc $\varphi \ge 0$ $(\mu + m)$-p.p..

On montre maintenant que $\varphi < 1$ $(\mu + m)$-p.p..
On prend dans (6.37) $g = 1_{C_n}$, avec $C_n = \{\varphi \ge 1\} \cap A_n$ (on a bien $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ car $(\mu + m)(C_n) \le \mu(E) + m(A_n) < \infty$). On obtient

$$\int (1 - \varphi) 1_{C_n} d\mu = \int \varphi 1_{C_n} dm.$$

Comme $(1 - \varphi) \le 0$ et $\varphi > 0$ sur C_n, on en déduit que $(1 - \varphi)1_{C_n} = 0$ μ-p.p. et $\varphi 1_{C_n} = 0$ m-p.p. et donc $m(C_n) = 0$. Mais on ne peut en déduire $\mu(C_n) = 0$ (car on a seulement $(1 - \varphi) \le 0$ sur C_n et non $(1 - \varphi) < 0$). C'est ici (et seulement ici) qu'on utilise l'hypothèse d'absolue continuité de μ par rapport à m. Comme $m(C_n) = 0$, l'hypothèse $\mu << m$ donne $\mu(C_n) = 0$. Comme $\{\varphi \ge 1\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, on en déduit $(\mu + m)(\{\varphi \ge 1\}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu + m)(C_n) = 0$ et donc $\varphi < 1$ $(\mu + m)$-p.p..

On a donc montré que $0 \le \varphi < 1$ $(\mu+m)$-p.p.. En changeant φ sur un ensemble de mesure $(\mu+m)$ nulle, on peut donc supposer $0 \le \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$. On a toujours $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$ et (6.37) reste vraie.

Etape 3. On montre maintenant que $\mu = fm$ avec $f = \frac{\varphi}{1-\varphi}$.
On montre tout d'abord que (6.37) est vraie pour tout $g \in \mathcal{M}_+$:

- On remarque d'abord que (6.37) est vraie si $g = 1_A$ avec $A \in T$ t.q. $m(A) < \infty$ car, dans ce cas, $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$.
- On suppose maintenant que $A \in T$. Comme m est σ-finie, il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(E_n) < \infty$, $E_n \subset E_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On prend $g_n = 1_{B_n}$ avec $B_n = A \cap E_n$, de sorte que $g_n \uparrow 1_A$ et donc $(1-\varphi)g_n \uparrow (1-\varphi)1_A$ et $\varphi g_n \uparrow \varphi 1_A$. Comme (6.37) est vraie pour $g = g_n$ (car $m(B_n) < \infty$), le théorème de convergence monotone (théorème 4.1) appliqué aux mesures μ et m donne (6.37) pour $g = 1_A$.
- Si $g \in \mathcal{E}_+$, il est alors facile de montrer que (6.37) est vraie. C'est une conséquence immédiate de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$.
- On prend enfin $g \in \mathcal{M}_+$. Il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $g_n \uparrow g$. On a donc $(1-\varphi)g_n \uparrow (1-\varphi)g$ et $\varphi g_n \uparrow \varphi g$. On écrit (6.37) pour g_n au lieu de g. En passant à la limite quand $n \to \infty$, le théorème de convergence monotone (théorème 4.1) appliqué aux mesures μ et m donne (6.37) pour g.

On a donc maintenant φ mesurable, $0 \le \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$ et (6.37) pour tout $g \in \mathcal{M}_+$.
Soit $h \in \mathcal{M}_+$. On pose $g = \frac{h}{1-\varphi}$. On a $g \in \mathcal{M}_+$ (car $0 \le \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$). (6.37) donne alors

$$\int h d\mu = \int h \frac{\varphi}{1-\varphi} dm. \tag{6.38}$$

En posant $f = \frac{\varphi}{1-\varphi}$, on a $f \in \mathcal{M}_+$ et (6.38) avec $h = 1_A$ donne $\mu(A) = \int f 1_A dm$ pour tout $A \in T$, c'est-à-dire $\mu = fm$. ■

Théorème 6.11 (Radon-Nikodym, mesures signées) *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit μ une mesure signée sur T, alors :*

$$\mu << m \Longleftrightarrow \exists f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \;\; \mu = fm. \tag{6.39}$$

Démonstration : La démonstration n'est pas détaillée ici, elle consiste essentiellement à se ramener au théorème 6.10 en décomposant μ sous la forme $\mu = \mu_+ - \mu_-$ comme cela est fait dans la proposition 2.6. ■

6.4 Convergence faible, faible-$\star$, étroite, en loi...

6.4.1 Convergence faible et faible-$\star$

On limite ce paragraphe au cas des espaces de Banach réels. L'extension au cas des Banach complexes est simple (!).

Définition 6.17 (Convergence faible dans un espace de Banach)
Soit F un espace de Banach (réel) et F' son dual topologique (i.e. l'espace des applications linéaires continues sur F dans $\mathbb{R}$). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ et $u \in F$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u si pour tout élement T de F', on a : $T(u_n) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to \infty$.

Par le théorème 6.9, on a donc la proposition suivante sur la convergence faible dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, pour $1 \le p < +\infty$:

Proposition 6.24 (Convergence faible dans L^p)
Soit (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et q le conjugué de p, $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $u \in L^p$. Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers f si et seulement si on a, pour tout $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $\int f_n g dm \to \int f g dm$ quand $n \to \infty$.

Démonstration :
On note Φ l'application de L^q dans $(L^p)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.30), La démonstration de cette proposition est alors immédiate quand on remarque que le théorème 6.9 donne que Φ est une bijection de L^q dans $(L^p)'$. ■

Définition 6.18 (Convergence faible $\star$ dans le dual d'un espace de Banach)
Soit F un espace de Banach (réel) et F' son dual topologique ; soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans F' pour la topologie faible $\star$ si pour tout élement u de F, on a : $T_n(u) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to \infty$.

Remarque 6.24 (Convergence forte, faible et faible $\star$) Soit F un espace de Banach (réel).

1. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. Les implications suivantes sont alors immédiates :

$$T_n \to T \text{ dans } F' \Rightarrow T_n \to T \text{ faiblement dans } F' \Rightarrow T_n \to T \ \star\text{-faiblement dans } F'.$$

   La deuxième implication est une conséquence de l'injection canonique de F dans F'' (construite avec (6.33)).

2. Pour $u \in F$, on définit $J_u \in F''$ avec (6.33). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ et $u \in F$. On a alors :

$$u_n \to u \text{ faiblement dans } F \Leftrightarrow J_{u_n} \to J_u \ \star\text{-faiblement dans } F''.$$

   Mais, si F n'est pas réflexif, l'application $J : u \mapsto J_u$, de F dans F'', n'est pas surjective et on peut avoir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non faiblement convergente dans F alors que la suite $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\star$-faiblement convergente dans F''. Dans ce cas, la limite de $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour la topologie faible-$\star$ de F'' n'est pas dans l'image de J.

Dans le cas où F est un espace de Banach réflexif, l'application $J : u \mapsto J_u$ est surjective de F dans F'' et on a alors :

1. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. Alors :

$$T_n \to T \text{ faiblement dans } F' \Leftrightarrow T_n \to T \ \star\text{-faiblement dans } F'.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente dans F si et seulement si la suite $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\star$-faiblement convergente dans F''.

Soit $1 < p \leq \infty$, donc $1 \leq q = \frac{p}{p-1} < \infty$. On note $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $L^q = L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et Φ l'application de L^p dans $(L^q)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.30). Le théorème 6.9 donne que Φ est une bijection de L^p dans $(L^q)'$. On confond (ou on identifie) fréquemment $u \in L^p$ avec $\Phi(u) \in (L^q)'$. On a alors une notion de convergence faible-$\star$ dans L^p. Si $1 < p < \infty$ (on a alors aussi $1 < q < \infty$), les notions de convergente faible et faible-$\star$ dans L^p sont équivalentes. Dans le cas de L^∞, que l'on identifie fréquemment avec le dual (topologique) de L^1, les notions de convergente faible et faible-$\star$ sont différentes. La convergence faible est plus forte que la convergence faible-$\star$. On donne ci dessous la définition de convergence faible-$\star$ quand on considère L^∞ comme le dual de L^1.

Définition 6.19 (Convergence faible $\star$ dans L^∞)
Soient (E,T,m) un espace mesuré et $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ et $f \in L^\infty$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^∞ pour la topologie faible $\star$ si pour tout élement g de $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, on a : $\int f_n g dm \to \int f g dm$.

6.4.2 Convergence étroite et convergence en loi

Si m est une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$, on note L_m l'application de $C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $L_m(\varphi) = \int \varphi dm$ (cette application caractérise m, d'après la proposition 5.4). On a vu au chapitre 5 que $L_m \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})'$. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. La convergence faible-$\star$ dans $(C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})'$ de L_{m_n} vers L_m, quand $n \to \infty$, signifie donc que $\lim_{n\to\infty} \int \varphi dm_n = \int \varphi dm$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$. Ceci s'appelle la convergence étroite de m_n vers m.

Définition 6.20 (Convergence étroite et vague) *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$.*

1. *On dit que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to \infty$, si :*

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})).$$

2. *On dit que $m_n \to m$ vaguement, quand $n \to \infty$, si :*

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})).$$

La proposition suivante montre que la convergence vague et la convergence des masses totales donnent la convergence étroite. Si m et les mesures m_n sont des probabilités, la convergence étroite de m_n vers m (quand $n \to \infty$) est donc équivalente à la convergence vague.

Proposition 6.25 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $m_n \to m$ vaguement et que $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$ (quand $n \to \infty$). On a alors $m_n \to m$ étroitement. (La réciproque de cette proposition est immédiate.)*

DÉMONSTRATION : La démonstration de cette proposition est contenue dans l'exercice 5.19. ■

La convergence en loi d'une suite de v.a.r. est définie par la convergence étroite (ou vague, puisque c'est équivalent) des lois des v.a.r.

Définition 6.21 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$*un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. sur* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *et* X *une v.a.r. sur* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$*. On dit que* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to \infty$*, si :*

$$\int \varphi(X_n)dp \to \int \varphi(X)dp \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(Ce que est équivalent à dire que $P_{X_n} \to P_X$ *étroitement.)*

6.4.3 Lois des grands nombres, théorème central limite

Dans ce paragraphe, on donne des résultats de convergence (en probabilité, p.s., en loi) pour des sommes de v.a.r. indépendantes. Nous commençons ce paragraphe par un résutat (simple) sur la variance de la somme de v.a.r. indépendantes, dont on déduit la loi faible des grands nombre qui donne non seulement un résultat de convergence (en probabilité) mais aussi des estimations précises sur cette convergence. Puis, on éenonce la loi forte des grands nombres et le théorème central limite.

Proposition 6.26 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite de v.a.r. indépendantes 2 à 2 et de carré intégrable. On a alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$*,*

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n).$$

Démonstration : On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $E_i = E(X_i)$. On a alors, par linéarité de l'intégrale, $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E_i$ et :

$$\mathrm{Var}(S_n) = E((S_n - E(S_n))^2) = E(\sum_{i=1}^n (X_i - E_i) \sum_{i=j}^n (X_j - E_j)) = \sum_{i,j=1}^n E((X_i - E_i)(X_j - E_j)).$$

Pour $i \neq j$, on a, comme X_i et X_j sont indépendantes, $E((X_i-E_i)(X_j-E_j)) = E(X_i-E_i)E(X_j-E_j) = 0$. On en déduit :

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n E((X_i - E_i)^2) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i).$$

■

Proposition 6.27 (Loi faible des grands nombres) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite de v.a.r. indépendantes 2 à 2 et de carré intégrable. On suppose que ces v.a.r. sont de même moyenne* m *et de même variance* σ^2*. On pose* $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ *(ce sont les "moyenne de Césaro" de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$*), alors* Y_n *converge stochastiquement (ou en probabilité) vers la v.a.r constante et égale à* m*, c'est-à-dire que l'on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ p(|X_n - m| > \varepsilon) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Plus précisément, on a pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^\star$*,*

$$p(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev (lemme 4.10), on a :

$$p(|Y_n - m| \geq \varepsilon) = p((Y_n - m)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}E((Y_n - m)^2).$$

Puis, en posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a $E((Y_n - m)^2) = \frac{1}{n^2}E((S_n - nm)^2) = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2}$. La proposition 6.26 donne $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n\sigma^2$. On en déduit finalement

$$p(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

■

On donne maintenant, sans démonstration, la loi forte des grands nombres.

Proposition 6.28 (Loi forte des grands nombres) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a.r. indépendantes.*

1. *On suppose ici que les X_n sont de carré intégrable, que $E(X_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} E(X_n^2)/(n^2) < \infty$. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to 0 \text{ p.s., quand } n \to \infty.$$

2. *On suppose ici que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r.i.i.d. et que $E(|X_1|) < \infty$. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to E(X_1) \text{ p.s., quand } n \to \infty.$$

On donne enfin, sans démonstration, le théorème central limite.

Théorème 6.12 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables. On note $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$. On pose*

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - m).$$

La suite $(P_{Y_n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge alors étroitement vers la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (où $\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$ et la loi normale, ou loi de Gauss, $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, est définie au chapitre 4, section 4.4, dans le cas $\sigma^2 \neq 0$).

6.5 Exercices

6.5.1 Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$

Exercice 6.1 *Corrigé 99 page 386*

Soit (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et $A \in T$. On pose $F = \{f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ f = 0$ p.p. sur $A\}$. Montrer que F est fermé (dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

Exercice 6.2 *Corrigé 100 page 386*

Soit $p \in [1, \infty]$ et $C = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda);\ f \geq 0$ p.p.$\}$. Montrer que C est d'intérieur vide pour $p < \infty$ et d'intérieur non vide pour $p = \infty$.

Exercice 6.3 (Convergence essentiellement uniforme) *Corrigé 101 page 387*

Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to \infty$, si et seulement si il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to \infty$.

Exercice 6.4 (Densité et continuité en moyenne) *Corrigé 102 page 387*

1. Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in L^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que $\|f - f(\cdot + h)\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

2. Les assertions précédentes sont-elles vraies pour $p = \infty$?

Exercice 6.5 (Sur la séparabilité...)

1. Montrer que $L^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est séparable pour $p \in [1, \infty[$ et n'est pas séparable pour $p = \infty$.

2. On munit $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Montrer que $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est séparable et que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Exercice 6.6 Soient (E, T, m) un espace mesuré, et f, g, h des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soient $p, q, r \in\ ]1, +\infty[$, tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$, montrer que :

$$\int |fgh| dm \leq \Big(\int |f|^p dm\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |g|^q dm\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int |h|^r dm\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Exercice 6.7 (Produit $L^p - L^q$) *Corrigé 103 page 389*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty]$ et q le conjugué de p (i.e. $q = \frac{p}{p-1}$). Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_\mathbb{R}(E, T, m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q_\mathbb{R}(E, T, m)$, $f \in L^p_\mathbb{R}(E, T, m)$ et $g \in L^q_\mathbb{R}(E, T, m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p_\mathbb{R}(E, T, m)$ et $g_n \to g$ dans $L^q_\mathbb{R}(E, T, m)$. Montrer que $\int f_n g_n dm \to \int fg dm$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6.8 (Caractérisation de $\mathcal{L}^p$)
Soit (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, \infty]$ et $q = \frac{p}{p-1}$. On note $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_\mathbb{R}(E, T, m)$ (pour $r \in [1, \infty]$).

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application mesurable. On suppose que $fg \in \mathcal{L}^1$ pour tout $g \in \mathcal{L}^q$. Le but de l'exercice est de montrer (si possible...) que $f \in \mathcal{L}^p$.

1. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$.

2. On suppose, dans cette question, que $p = \infty$. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$, on raisonne par l'absurde en supposant que $f \notin \mathcal{L}^\infty$.

   (a) Soit $\alpha \geq 0$. Montrer qu'il existe $\beta > \alpha$ t.q. $m(\{\alpha \leq |f| < \beta\} > 0$. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n \geq n$ et $m(A_n) > 0$ avec $A_n = \{\alpha_n \leq |f| < \alpha_{n+1}\}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

   (b) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On pose $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n 1_{A_n}$ (les A_n étant définis à la question précédente). Montrer qu'un choix convenable de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $g \in \mathcal{L}^1$ et $fg \notin \mathcal{L}^1$.

   (c) Conclure.

3. On suppose, dans cette question, que $p \in]1, \infty[$ et que $m(E) < \infty$. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}^p$, on raisonne une nouvelle fois par l'absurde en supposant que $f \notin \mathcal{L}^p$.

(a) Soit $\alpha \geq 0$. Montrer qu'il existe $\beta > \alpha$ t.q. $1 \leq \int_A |f|^p dm < \infty$ avec $A = \{\alpha \leq |f| < \beta\}$. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\alpha_0 = 0$ et $1 \leq \int_{A_n} |f|^p dm < \infty$ avec $A_n = \{\alpha_n \leq |f| < \alpha_{n+1}\}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(b) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On pose $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n |f|^{p-1} 1_{A_n}$ (les A_n étant définis à la question précédente). Montrer qu'un choix convenable de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $g \in \mathcal{L}^q$ et $fg \notin \mathcal{L}^1$.

(c) Conclure.

4. On suppose, dans cette question, que $p \in]1, \infty[$ et que m est σ-finie. Montrer que $f \in \mathcal{L}^p$.

Exercice 6.9 (un peu de calcul diff...)
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, et $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $1 \leq p < +\infty$; pour $u \in L^p = L^p(E, T, m)$, on note $g(u)$ la (classe de) fonction(s): $x \mapsto g(u(x))$, et G la fonction qui à u associe $g(u)$.

1. Soit $1 \leq q < +\infty$; montrer que $G \in C(L^p, L^q)$ ssi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $G \in C^1(L^p, L^p)$ ssi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $g(s) = as + b$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue à support compact, montrer que :

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)} \to \|f\|_\infty \text{ lorsque } p \to +\infty.$$

[*Pour montrer que* $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)} \geq \|f\|_\infty$, *on pourra introduire, pour* $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, *un ensemble* A_ε *tel que* $\forall\, x \in A_\varepsilon$, $|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon$.]

Exercice 6.11 *Corrigé 104 page 389*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_\mathbb{R}(E, T, m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_\mathbb{R}(E, T, m)$, $f \in L^1_\mathbb{R}(E, T, m)$ et $g \in L^\infty_\mathbb{R}(E, T, m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_\mathbb{R}(E, T, m)$.

1. On suppose que $g_n \to g$ dans $L^\infty_\mathbb{R}(E, T, m)$. Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_\mathbb{R}(E, T, m)$.
2. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p.. Montrer par un contre exemple qu'on peut ne pas avoir $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_\mathbb{R}(E, T, m)$.
3. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\|g_n\|_\infty \leq M$. Montrer qu'on a alors $f_n g_n \to fg$ dans $L^1_\mathbb{R}(E, T, m)$.

Exercice 6.12 Soit (E, T, m) un espace mesuré et μ une mesure de densité $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à m, montrer que :

$$\begin{aligned} &(i) \quad \int g d\mu = \int f\, g\, dm, \; \forall\, g \in \mathcal{M}_+ \\ &(ii) \quad \text{Soit } g \in \mathcal{M}, \text{ alors } g \in L^1(\mu) \Leftrightarrow fg \in L^1(m), \\ &\qquad\quad \text{et si } g \in L^1(\mu), \text{ alors } \int g d\mu = \int f\, g\, dm \end{aligned} \tag{6.40}$$

Exercice 6.13
Soit $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable (on a donc $K \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$). On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\int K(x, t) dt \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\int K(t, y) dt \leq M$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et L^p l'espace $L^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ t.q. $K(x, \cdot) f(\cdot) \in \mathcal{L}^1$, $T(f)(x) = \int K(x, t) f(t) dt$.
Soit $1 \leq p \leq \infty$. [On conseille de considérer séparément les cas $p = 1$, $p = \infty$ et $1 < p < \infty$.]

1. Soit $f \in L^p$ (on identifie f, comme d'habitude, avec l'un de ses représentants, on a donc $f \in \mathcal{L}^p$). Montrer que $T(f)(x)$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $T(f) \in L^p$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $T(f) = g$ p.p.").
2. Montrer que T est une application linéaire continue de L^p dans L^p.

Exercice 6.14 (Inégalité de Hardy) *Corrigé 105 page 390*
Soit $p \in]1, \infty[$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0, \infty[, \mathcal{B}(]0, \infty[), \lambda)$ (λ est donc ici la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0, \infty[$).
Soit $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $x \in]0, \infty[$, on pose $F(x) = \frac{1}{x} \int f 1_{]0,x[} d\lambda$. Le but de l'exercice est de montrer que $F \in \mathcal{L}^p$ et $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in C_c(]0, \infty[)$ (c'est-à-dire que f est continue et à support compact dans $]0, \infty[$).
   (a) Montrer $F \in C^1(]0, \infty[) \cap \mathcal{L}^p$. Montrer que $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) On suppose, dans cette question, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, \infty[$.
   Montrer que $\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty F^{p-1}(x) f(x) dx$. [On pourra utiliser une intégration par parties.]
   Montrer que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.
   (c) Monter que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$ (on ne suppose plus que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, \infty[$).
2. On ne suppose plus que $f \in C_c(]0, \infty[)$.
   (a) Montrer qu'il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(]0, \infty[)$ t.q $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, exercice 6.4.]
   (b) Montrer que $F \in C(]0, \infty[) \cap \mathcal{L}^p$ et que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.
3. Montrer que $\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p},\ f \in \mathcal{L}^p,\ \|f\|_p \neq 0\} = \frac{p}{p-1}$ (dans cette formule, F est donné comme précédemment à partir de f). [On pourra considérer la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} 1_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0, \infty[$.]

Exercice 6.15 (Continuité d'une application de L^p dans L^q) *Corrigé 106 page 393*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, $p, q \in [1, \infty[$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^\star\,;\ |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{6.41}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   On pose $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\}$, avec $v \in u$. On a donc $G(u) \in L^q$ et cette définition a bien un sens, c'est à dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p$. On suppose que $u_n \to u$ p.p., quand $n \to \infty$, et qu'il existe $F \in L^p$ t.q. $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^q.
3. Montrer que G est continue de L^p dans L^q.

4. On considère ici $(E, T, m) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (6.41). On va construire $u \in L^1$ t.q. $G(u) \notin L^1$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \geq n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \geq n$.

   (b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n| n^2} = 1.$$

   (c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n|n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1}, a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

Exercice 6.16 (Conv. p.p. et conv. des normes, par Egorov) *Corrigé 107 page 395*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$. [Traiter séparément le cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

2. En prenant $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ (où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$), donner un exemple pour lequel la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et $\|f\|_p < \lim_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$. [On pourra aussi traiter séparément les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

   Pour la suite de l'exercice, on suppose que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to \infty$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = 1$.

   (a) On suppose que $m(E) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. On choisit aussi un représentant de f, encore noté f. Soit $A \in T$ et $\varepsilon > 0$. On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Montrer qu'il existe n_0 t.q. :
   $$n \geq n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon + \int_A |f| dm.$$

   (b) On suppose que $m(E) < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

   (c) On suppose que $m(E) = \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. :
   $$m(C) < \infty \text{ et } \int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon.$$

   (d) On suppose que $m(E) = \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

4. Dans cette question, on suppose que $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p, quand $n \to \infty$. [S'inspirer de la méthode suggérée pour le cas $p = 1$.]

5. Dans cette question, on suppose que $p = \infty$ et que $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^∞, quand $n \to \infty$.

Exercice 6.17 (Conv. p.p. et conv. des normes, par Fatou) *Corrigé 108 page 399*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Soit $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to \infty$.

1. On suppose que $p = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$ (en ayant choisi des représentants de f_n et f). Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \to f$ dans L^1.

2. On suppose maintenant que $p \in]1, \infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

Exercice 6.18 (Compacité $L^p - L^q$) *Corrigé 109 page 400*
Dans cet exercice, (E, T, m) est un espace mesuré. Pour tout $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

1. Soit $r > 1$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^r. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } n \in \mathbb{N},\, A \in T,\, m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |g_n| dm \leq \varepsilon.$$

[Utiliser l'inégalité de Hölder.]

Soit $1 \leq p < q \leq \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^q. On suppose dans toute la suite que $f_n \to f$ p.p. quand $n \to \infty$.

2. (Compacité $L^p - L^q$.) On suppose que $m(E) < \infty$.
   (a) Montrer que $f \in L^q$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^q$ t.q. $f = g$ p.p.").
   (b) Montrer que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1 avec $g_n = |f_n - f|^p$ et un théorème du cours.]

3. On suppose que $m(E) = \infty$.
   (a) Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. Montrer que$f_n 1_B \to f 1_B$ dans L^p quand $n \to \infty$.
   (b) On prend ici $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $q = 2$, $p = 1$, $f = 0$. Donner un exemple pour lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$, $f_n \not\to 0$ dans L^1 quand $n \to \infty$ (et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^2, $f_n \to 0$ p.p. quand $n \to \infty$).

Exercice 6.19 (Caractérisation de $\mathcal{L}^\infty$) *Corrigé 110 page 401*
Soit (X, T, m) un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ il existe $f_n \in \mathcal{L}^\infty$ et $g_n \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = f_n + g_n$, $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et $\|g_n\|_1 \leq \frac{1}{n}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq 1$.

Exercice 6.20 (Exemples de v.a. appartenant à L^q) *Corrigé 111 page 402*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X une v.a. (réelle). Dans les trois cas suivants, donner les valeurs de $q \in [1, \infty]$ pour lesquels la variable aléatoire X appartient à l'espace $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

1. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) (c'est-à-dire que la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}$ pour $x \in \mathbb{R}$).
2. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2+c^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$).
3. X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ ($p \in]0,1[$) (c'est-à-dire que $P(\{X = k\}) = p(1-p)^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$).

6.5.2 Espaces de Hilbert, Espace L^2

Exercice 6.21 *Corrigé 112 page 403*
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ deux à deux orthogonaux. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans L^2) si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

Exercice 6.22 (L^p n'est pas un espace de Hilbert si $p \neq 2$) *Corrigé 113 page 403*
Montrer que $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa norme usuelle) n'est pas un espace de Hilbert si $1 \le p \le \infty$, $p \neq 2$. [Pour $p \neq 2$, chercher des fonctions f et g mettant en défaut l'identité du parallèlogramme, c'est-à-dire l'identité (6.18) page 145.]

Exercice 6.23 (Caractérisation des espaces de Hilbert séparables)
Soit E un espace de Hilbert (réel) de dimension infinie. Montrer que E est séparable si et seulement si il existe une base hilbertienne dénombrable de E [l'une des implications a d'ejà été vue...].

Exercice 6.24 (projection sur le cône positif de L^2) *Corrigé 114 page 404*
Soit (X, T, m) un espace mesuré et $E = L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. On pose $C = \{f \in E,\ f \ge 0 \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de E.
2. Soit $f \in E$. Montrer que $P_C f = f^+$.

Exercice 6.25 (Exemple de non existence de la projection) *Corrigé 115 page 404*
Dans cet exercice, on donne un exemple t.q. :
E est un espace de Banach réel, F est un sous espace vectoriel fermé de E, $g \in E \setminus F$ (et donc $d(g, F) = \inf\{\|g - f\|_E,\ f \in F\} > 0\ldots$) et il n'existe pas d'élément $f \in E$ t.q. $d(g, F) = \|g - f\|_E$.

On prend $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, on munit E de la norme habituelle, $\|f\|_E = \max\{|f(x)|,\ x \in [0, 1]\}$. On pose $F = \{f \in E;\ f(0) = 0,\ \int_0^1 f(x)dx = 0\}$. Enfin, on prend $g \in E$ défini par $g(x) = x$, pour tout $x \in [0, 1]$.

1. Montrer que E est un espace de Banach (réel).
2. Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de E.
3. Soit $f \in F$. Montrer que $\|g - f\|_E \ge 1/2$. [On pourra remarquer que $\int_0^1 |(g - f)(x)|dx \ge \int_0^1 (g - f)(x)dx = 1/2$.]
4. Montrer qu'il n'existe pas d'élément $f \in F$ t.q. $\|g - f\|_E = 1/2$.
5. Montrer que $d(g, F) = 1/2$. [On pourra, par exemple, montrer que $\|g - f_n\|_E \to 1/2$, avec f_n défini par $f_n(x) = -\beta_n x$, pour $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = (x - 1/n) - \beta_n/n$, pour $x \in [1/n, 1]$, et β_n choisi pour que $f_n \in F$.]

Exercice 6.26 (Lemme de Lax-Milgram) *Corrigé 116 page 406*
Soit E est un espace de Hilbert réel et a une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On note $(\cdot/\cdot)$ le produit scalaire dans E et $\|\cdot\|$ la norme dans E. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ t.q. :

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|,\ \forall u,v \in E \text{ (continuité de } a),$$

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2,\ \forall u \in E \text{ (coercivité de } a).$$

Soit $T \in E'$. On va montrer, dans cet exercice, qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$ (ceci est le lemme de Lax-Milgram).

1. On suppose, dans cette question, que a est symétrique. On définit une application bilinéaire, notée $(\cdot/\cdot)_a$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par $(u/v)_a = a(u,v)$. Montrer que $(\cdot/\cdot)_a$ est un produit scalaire sur E et que la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. En déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$. [Utiliser le théorème de représentation de Riesz.]
2. On ne suppose plus que a est symétrique.
   (a) Soit $u \in E$, Montrer que l'application $v \mapsto a(u,v)$ est un élément de E'. En déduire qu'il existe un et un seul élément de E, notée Au, t.q. $(Au/v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.
   On note, dans la suite A l'application qui à $u \in E$ associe $Au \in E$.
   (b) Montrer que A est linéaire continue de E dans E.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé
   (d) Montrer que $(\mathrm{Im}(A))^\perp = \{0\}$.
   (e) Montrer que A est bijective et en déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$.

Exercice 6.27 (Exemple de projection dans L^2) *Corrigé 117 page 409*
On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$.

Soit $g \in L^2$.

1. Soit $v \in L^2$ et $\phi \in C^\infty_c(]0,1[,\mathbb{R})$ (on rappelle que $\phi \in C^\infty_c(]0,1[,\mathbb{R})$ signifie que ϕ est une application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, et qu'il existe $K \subset]0,1[$, K compact, t.q. $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[\setminus K)$. Montrer que $vg\phi' \in L^1$.

   On pose $\mathcal{C} = \{v \in L^2;\ v \leq 1 \text{ p.p.}, \int vg\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda, \text{ pour tout } \phi \in C^\infty_c(]0,1[,\mathbb{R}),\ \phi \geq 0\}$. (On rappelle que $\phi \geq 0$ signifie $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$.)
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est un convexe fermé non vide de L^2.
3. On désigne par $\mathbf{1}$ la fonction constante et égale à 1 sur $]0,1[$. Soit $u \in \mathcal{C}$. Montrer que :
   $(\|u - \mathbf{1}\|_2 \leq \|v - \mathbf{1}\|_2 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\int(\mathbf{1} - u)(u - v)d\lambda \geq 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C})$.
4. Soit $u \in \mathcal{C}$ t.q. $\|u - \mathbf{1}\|_2 \leq \|v - \mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}$. On suppose que $u, g \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $(ug)'(x) \geq -1$ pour tout $x \in]0, 1[$.

(b) Soit $x \in]0, 1[$ t.q. $u(x) < 1$. Montrer que $(ug)'(x) = -1$.

(c) Montrer que u est solution du problème suivant:
$(ug)'(x) \geq -1$, pour tout $x \in]0, 1[$,
$u(x) \leq 1$, pour tout $x \in]0, 1[$,
$(1 + (ug)'(x))(u(x) - 1) = 0$, pour tout $x \in]0, 1[$.

Exercice 6.28 (Approximation dans L^2) *Corrigé 118 page 412*
On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.
Pour $f \in L^2$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on définit $T_k f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_k f(x) = k \int_{\frac{n(x)}{k}}^{\frac{n(x)+1}{k}} f(t)dt, \tag{6.42}$$

où $n(x)$ est l'entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{n(x)}{k} \leq x < \dfrac{n(x)+1}{k}$ (l'entier n dépend donc de x).

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \in L^2$ (plus précisément, $T_k f \in \mathcal{L}^2$ et on confond alors, comme d'habitude, $T_k f$ avec $\{g \in \mathcal{L}^2,\ g = T_k f \text{ p.p.}\}$) et que $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.
2. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (i.e. f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.
3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

Exercice 6.29 (Projections orthogonales) *Corrigé 119 page 413*
On pose $H = L^2_{\mathbb{R}}(]-1, +1[, \mathcal{B}(]-1, +1[), \lambda)$. (On rappelle que $\mathcal{B}(]-1, +1[)$ est la tribu borélienne de $]-1, 1[$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]-1, +1[)$.) Soit $F = \{f \in H \text{ t.q. } \int_{]-1,+1[} f \, d\lambda = 0\}$. Soit $G = \{f \in H \text{ t.q. } \int_{]-1,0[} f \, d\lambda = \int_{]0,1[} f \, d\lambda\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels fermés de H. Déterminer les sous-espaces $F^\perp$, $G^\perp$ et $F \cap G$.
2. Calculer, pour $g \in H$, les projections orthogonales $P_F(g)$ et $P_G(g)$ de g sur F et G.

Exercice 6.30 (Projection orthogonale dans L^2) *Corrigé 120 page 414*
On pose $L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa structure hilbertienne habituelle) et, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés, $\alpha < \beta$, $\mathcal{C} = \{f \in L^2;\ \alpha \leq f \leq \beta \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est vide si et seulement si $\alpha\beta > 0$.
2. On suppose maintenant que $\alpha\beta \leq 0$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe fermée non vide de L^2. Soit $f \in L^2$, montrer que $P_{\mathcal{C}} f(x) = \max\{\min\{f(x), \beta\}, \alpha\}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. ($P_{\mathcal{C}} f$ désigne la projection de f sur $\mathcal{C}$.)

Exercice 6.31 *Corrigé 121 page 415*
Soit (E, T, m) un espace mesuré, et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. On suppose ici qu' il existe A et $B \in T$ t.q. $A \cap B = \emptyset$, et $0 < m(B) < +\infty$, $0 < m(A) < +\infty$. Montrer que L^p est un Hilbert si et seulement si $p = 2$. [On pourra utiliser l'identité du parallèlogramme avec des fonctions de L^p bien choisies.]

2. Montrer que pour $m = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0), $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ est un Hilbert pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Exercice 6.32 (Espace l^2) *Corrigé 122 page 416*
On note m la mesure du dénombrement sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $m(A) = \text{card}(A)$ si A est fini et $m(A) = \infty$ si A n'est pas fini.

On note $l^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

1. Montrer que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

2. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l^2 donne :

$$(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n)^2 \le \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n^2$$

   pour toutes suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n^2 < \infty$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$, bijective. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \infty$. [On pourra commencer par montrer que $\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} \le \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]

Exercice 6.33 (Isométrie d'un espace de Hilbert avec l^2) *Corrigé 123 page 418*
Soit H un espace de Hilbert réel, de dimension infinie et séparable. Soit $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H (une telle base existe, cf. proposition 6.17).

Pour $u \in H$, on définit $a_u \in l^2$ (l^2 est défini à l'exercice 6.32) par $a_u(n) = (u/e_n)_H$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On montrera tout d'abord que a_u est bien un élément de l^2.)

Montrer que l'application $A : u \mapsto a_u$ (est linéaire et) est une isométrie de H dans l^2, c'est-à-dire que $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_H$ pour tout $u \in H$.

Montrer que A est bijective (il faut donc montrer que, pour tout $a \in l^2$, il existe $u \in H$ t.q. $a = a_u$).

Exercice 6.34 (Tribu et partition, suite et fin)
Cet exercice est la suite de l'exercice 3.36. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et a une partition de Ω On note $\tau(a)$ la tribu engendrée par a (voir l'exercice 3.36). On suppose que la partition a est mesurable, c'est-à-dire que ses atomes sont des éléments de $\mathcal{A}$ (on a donc $\tau(a) \subset \mathcal{A}$).

Donner une base hilbertienne de $L^2(\Omega, \tau(a), P)$ construite à partir des atomes de a.

En déduire l'expression de la projection orthogonale d'une variable aléatoire X appartenant à $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur le sous espace $L^2(\Omega, \tau(a), P)$.

6.5.3 Théorème de Radon-Nikodym et Dualité dans les espaces L^p

Exercice 6.35 (Fonctions absolument continues) *Corrigé (partiel) 124 page 418*
Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On admet les 2 résultats suivant :

- Toute fonction monotone définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable en presque tout point de $]a, b[$.

- Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$. Pour $x \in [a,b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x[} d\lambda$. La fonction F est alors dérivable en presque tout point de $]a,b[$ et on a $F' = f$ p.p..

1. (Fonctions monotones.) Soit f une fonction monotone croissante définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et que
   $$\int f' 1_{]a,b[} d\lambda \leq f(b) - f(a).$$
   [On pourra poser $f(x) = f(b)$ pour $x > b$, considérer $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ et remarquer que $f_n \to f'$ p.p. sur $]a,b[$.]

   (b) Donner un exemple pour lequel l'inégalité de la question précédente est stricte. (Les courageux pourront chercher un exemple pour lequel f est continue...)

2. (Fonctions absolument continues.)

   Une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *absolument continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k,b_k[)_{1\leq k\leq n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on a $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

   (a) Montrer que "absolue continuité" implique "uniforme continuité".

   (b) Montrer que l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ forme un espace vectoriel.

3. (Fonctions absolument continues et fonctions monotones.) Une fonction f définie sur $[a,b]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) est dite *à variation bornée* s'il existe C t.q. pour toute subdivision du segment $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, on ait $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C$. Pour une fonction f à variation bornée, on peut définir, pour $a < x \leq b$, $V_a^x[f]$ par :
   $$V_a^x[f] = \sup\{\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|\,,\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}^\star\}.$$
   On pose aussi $V_a^a[f] = 0$.

   (a) Montrer que toute fonction absolument continue est à variation bornée.

   (b) Montrer pour toute fonction f (définie sur $[a,b]$ et) absolument continue, la fonction $x \mapsto V_a^x[f]$ est absolument continue sur $[a,b]$. En déduire que toute fonction absolument continue (définie sur $[a,b]$) est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes (et est donc dérivable en presque tout point de $]a,b[$).

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$. Pour $x \in [a,b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x]} d\lambda$. Montrer que F absolument continue.

5. Soit F une fonction absolument continue et monotone croissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On prolonge cette fonction sur $\mathbb{R}$ en posant $F(x) = F(a)$ si $x < a$ et $F(x) = F(b)$ si $x > b$. Une version étendue du théorème de Carathéodory (cette version étendue est donnée par le théorème 2.5, pour ce résultat il suffit de F continue croissante) donne l'existence d'une (et une seule) mesure m_F sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $m_F(]\alpha,\beta[) = F(\beta) - F(\alpha)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

(a) Montrer que m_F est absolument continue par rapport à λ. [Utiliser la régularité de λ et l'absolue continuité de F.]

(b) Montrer qu'il existe $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $F(\beta) - F(\alpha) = \int g 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Montrer que $g = F'$ p.p. sur $]a, b[$.

6. Soit F une fonction absolument continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F est dérivable en presque tout point de $]a, b[$, que $F' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$F(x) - F(a) = \int F' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Exercice 6.36 (Dualité L^1-L^∞ par le théorème de Radon-Nikodym) *Corrigé 125 page 422*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $T \in (L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))'$. On suppose que T est positive, c'est à dire que, pour $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \geq 0$ p.p. implique $T(f) \geq 0$.

1. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = T(1_A)$. Montrer que μ est bien définie et que μ est une mesure finie sur T.

2. En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $T(1_A) = \int g 1_A dm$ pour tout $A \in T$.

3. Montrer que $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (plus précisément, il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $h = g$ p.p.). [On pourra montrer que $\|g\|_\infty \leq \|T\|_{(L^1)'}$ en choissisant bien A dans la formule trouvée à la question précédente.]

4. Montrer que $T(f) = \int g f dm$ pour tout $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Exercice 6.37 (Une démonstration de la dualité $L^p - L^q$ pour $p < 2$) *Corrigé 126 page 424*
Soit (E, T, m) un espace mesuré $\sigma-$fini et $1 \leq p < 2$. On pose $q = p/(p-1)$ et on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r = p$, $r = q$ et $r = 2$). Soit $T \in (L^p)'$.

1. On considére d'abord le cas où $m(E) < +\infty$.

   (a) Montrer que $L^2 \subset L^p$ et que l'injection canonique de L^2 dans L^p est continue.

   (b) Montrer qu'il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \int f g dm$ pour tout $f \in L^2$.

   (c) Montrer que la fonction g, trouvée à la question précédente, appartient à L^q [distinguer les cas $p > 1$ et $p = 1$. Dans le cas $p > 1$, on pourra considérer les fonctions $f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \leq n\}}$. Dans le cas $p = 1$, prendre $f = sgn(g) 1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.]

   (d) Si $f \in L^p$, montrer que $f_n = f 1_{\{|f| \leq n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \int f g dm$, pour tout $f \in L^p$.

2. On considére maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Comme m est σ-finie, on peut écrire $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, avec $An \subset A_{n+1}$ et $m(A_n) < +\infty$. On note $T_n = \{A \in T,\ A \subset A_n\}$, $m_n = m_{|T_n}$ et $L^r(m_n) = L^r_{\mathbb{R}}(A_n, T_n, m_n)$ ($r = p$ ou q).

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $f \in L^p(m_n)$, on pose $T_n(f) = T(\tilde{f})$ avec $\tilde{f} = f$ p.p. sur A_n et $\tilde{f} = 0$ p.p. sur $(A_n)^c$. Montrer que $T_n \in (L^p(m_n))'$ et qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

   $$T_n(f) = \int f g_n dm_n,\ \forall f \in L^p(m_n).$$

   On utilise $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les questions suivantes.

(b) Montrer que si $m \geq n$, $g_n = g_m$ p.p. sur A_n.

(c) On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n.

i. Montrer que $g \in L^q(E)$. (Distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$.)

ii. Montrer que $T(f) = \int fgdm$, pour tout $f \in L^p$.

Exercice 6.38 (Dualité $L^p - L^q$)
Lorsque $p < 2$, on propose d'étudier la démonstration suivante de la dualité $L^p - L^q$: soit $T \in (L^p)'$;

1. On considére d'abord le cas où $m(E) < +\infty$:

   (a) Montrer que $L^2 \subset L^p$ et que l'injection canonique de L^2 dans L^p est continue.

   (b) En déduire que il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fgdm, \quad \forall \ f \in L^2$.

   (c) Montrer que $g \in L^q$ (distinguer les cas $p > 1$ et $p = 1$. Dans le cas $p > 1$, on pourra considérer les fonctions $f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \leq n\}}$. Dans le cas $p = 1$, prendre $f = sgn(g) 1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.

   (d) Si $f \in L^p$, montrer que $f_n = f 1_{\{|f| \leq n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fgdm, \quad \forall \ f \in L^p$.

2. On considére maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Comme m est σ-finie, on peut écrire $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, avec $An \subset A_{n+1}$ et $m(A_n) < +\infty$.

   (a) A n fixé, définir à partir de T une application linéaire continue $T_n \in \Big(L^p(A_n)\Big)'$ t.q. : $\exists g_n \in L^q(A_n) \ ; T_n(f) = \displaystyle\int_{A_n} fgdm, \quad \forall f \in L^p(A_n)$.

   (b) Montrer que si $m \geq n$, $g_n = g_m \ \ pp$ sur A_n.

   (c) On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n.
   (i) Montrer que $g \in L^q(E)$. (Distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$.)
   (ii) Montrer que $T(f) = \displaystyle\int fgdm, \quad \forall \ f \in L^p$.

Exercice 6.39 (Démonstration du théorème de dualité $L^p - L^q$)
Soient (E, T, m) un espace mesuré σ-fini : il existe une famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles A_n qu'on peut prendre disjoints deux à deux tels que $m(A_n) < +\infty$ et $E = \displaystyle\bigcup_{n \in N} A_n$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et T une forme linéaire continue sur $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m) = L^p$.

Partie 1. (Rappel du cours.) On considère d'abord le cas $p = 2$, montrer qu'il existe un unique $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fgdm, \quad \forall \ f \in L^2$.

Partie 2. On s'intéresse maintenant au cas $p \in [1, 2]$

1. Soit ψ, une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $\psi \in L^r$, où $r = \dfrac{2p}{2-p}$, alors, pour toute fonction f de L^2, la fonction $f\psi$ est dans L^p.

   Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in L^r$ de la forme : $\psi = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n 1_{A_n}, \;\; \alpha_n > 0$.

   Dans toute la suite, ψ désignera une fonction particulière de la forme précédente.

2. Déduire des questions précédentes l'existence d'une unique fonction $G \in L^2$ t.q., pour toute fonction f de L^p t.q. $\dfrac{f}{\psi} \in L^2$, on a $T(f) = \displaystyle\int f \frac{G}{\psi} dm$.

3. Soient $p \in]1,2[$, et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; on définit les fonctions f_n, de E dans $\mathbb{R}$, par :

$$f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g|\leq n\}} 1_{B_n} \text{ où } g = \frac{G}{\psi} \text{ et } B_n = \bigcup_{p=1}^{n} A_p. \tag{6.43}$$

   (a) Montrer que : $\forall\; n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$.

   (b) En déduire que $g = \dfrac{G}{\psi} \in L^q$. [*Il est fortement conseillé d'utiliser la continuité de T de L^p dans $\mathbb{R}$.*]

4. Soient $p = 1$ et $f \in L^1$. On définit : $f_n = \text{sgn}(g) 1_A 1_{B_n}$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.

   (a) Montrer que : $\forall\; n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$.

   (b) En déduire que $m(A \cap B_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et que $g \; (= \dfrac{G}{\psi}) \in L^\infty$.

5. Soient $p \in [1,2[$ et $f \in L^p$, on définit $f_n = f 1_{\{|f|\leq n\}} 1_{B_n}$. Montrer que $\dfrac{f_n}{\psi} \in L^2$ et que f_n tend vers f dans L^p. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fg dm, \;\; \forall \;\; f \in L^p$.

Partie 3. On s'intéresse maintenant au cas $p > 2$, et on suppose ici que $T \geq 0$, i.e. $T(f) \geq 0$ pour toute fonction $f \geq 0$ p.p. Soit q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. On suppose dans cette question que la forme linéaire T est, de plus, continue pour la norme $\|.\|_{L^1}$.

   (a) Montrer qu'il existe $g \in L^\infty$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fg dm$ pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^p$.

   (b) Montrer que $g \in L^q$. [*On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question 3 de la partie 2*].

   (c) En déduire qu'il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int fg dm$ pour toute fonction $f \in L^p$ et que $\|g\|_{L^q} = \|T\|_{(L^p)'}$. [*On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question 5 de la partie 2*].

2. On suppose ici qu'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de formes linéaires sur L^p vérifiant les quatre propriétés suivantes :

$$\forall \ f \in L^p; f \geq 0, \quad 0 \leq T_n(f) \leq T(f) \tag{6.44}$$
$$\forall \ f \in L^p; f \geq 0, \quad T_n(f) \leq T_{n+1}(f) \tag{6.45}$$
$$\forall \ f \in L^p; f \geq 0, \quad T_n(f) \leq n \int f dm \tag{6.46}$$
$$\forall \ f \in L^p; f \geq 0, \quad T_n(f) \text{ converge vers } T(f) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty. \tag{6.47}$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in L^q$ tel que $T_n(f) = \displaystyle\int g_n f dm$, pour tout $f \in L^p$. Montrer que $\|g_n\|_{L^q} \leq \|T\|_{(L^p)'}$

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq g_n \leq n$ p.p. et $g_n \leq g_{n+1}$ p.p..

   (c) Montrer qu'il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \displaystyle\int g f dm$, pour toute fonction $f \in L^p$.

3. Soit T_n l'application de L^p dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{Si } f \in L^p \text{ et } f \geq 0, \qquad T_n(f) = \inf_{\varphi \in L^p, 0 \leq \varphi \leq f} \Big(T(\varphi) + n \int (f - \varphi) dm \Big),$$
$$\text{si } f \in L^p \text{ est quelconque,} \quad T_n(f) = T_n(f^+) - T_n(f^-)$$

   Montrer que T_n vérifie les propriétés (1) à (4).

4. Montrer que T_n est linéaire .

5. En déduire que, pour toute forme linéaire continue positive T sur L^p, il existe une fonction g de L^q t.q. $T(f) = \displaystyle\int f g dm$.

6. Montrer que, pour toute forme linéaire continue T sur L^p, il existe une fonction g de L^q t.q. $T(f) = \displaystyle\int f g dm$. [*Décomposer T en une partie positive et une partie négative*].

6.5.4 Convergence faible, faible-$\star$, étroite, en loi...

Exercice 6.40 *Corrigé 127 page 427*
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2 = L^2(E, T, m)$ et $f \in L^2$ t.q. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende faiblement vers f dans L^2, c'est-à-dire : $\int f_n \varphi dm \to \int f \varphi dm$ pour toute fonction $\varphi \in L^2$.

1. Montrer que $\|f\|_2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_2$.

2. On suppose de plus que $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans L^2.

Exercice 6.41 (Convergence faible) *Corrigé 128 page 428*
Soit (E, T, m) un espace mesuré $\sigma-$fini. Pour $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $1 \leq p < \infty$ et $q = p/(p-1)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$.

1. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p quand $n \to \infty$ (voir la dénition 6.17) si et seulement si

$$\int f_n g dm \to \int f g dm,\ \forall g \in L^q. \tag{6.48}$$

2. Montrer que $\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$ si $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to \infty$. [Utiliser (6.48) avec un choix convenable de g.]

   On suppose dans les questions suivantes (questions 3 à 7) que:

$$m(E) < \infty,\ f_n \to f \text{ p.p.},\ \exists C \text{ t.q. } \|f_n\|_p \le C,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.49}$$

3. On suppose, dans cette question, que $p > 1$.
   (a) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $g \in L^q$ t.q. $g = 0$ p.p. sur E_N^c avec $E_N = \cap_{n\ge N}\{x \in E;\ |f_n(x) - f(x)| \le 1\}$. Montrer que $\int f_n g dm \to \int f g dm$, quand $n \to \infty$.
   (b) Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p. [Pour $g \in L^q$, introduire $g_N = g 1_{E_N}$.]
   (c) Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^p.
4. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $\|f\|_1 \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_1$. Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$.
5. On suppose, dans cette question, que $p > 1$ et on prend $1 \le r < p$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Vitali pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $g_n = |f_n - f|^r$.]
6. Pour cette question, on retire dans (6.49) l'hypothèse $m(E) < \infty$ et on suppose que $p > 1$. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p.
7. Dans cette question, on conserve l'hypothèse (6.49) mais on ne suppose plus que $f \in L^p$. Montrer que f appartient nécessairement à L^p.
8. On prend maintenant $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ et on définit f_n, pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = 1$ p.p. sur $]2k/n, (2k + 1)/n[$ pour $k \in \mathbb{N}$, $(2k + 1)/n \le 1$ et $f_n = -1$ p.p. sur $]2k - 1/n, 2k/n[$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $2k/n \le 1$. Montrer que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p, pour tout $1 \le p < \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0, 1], \mathbb{R})$ dans L^1.]

Exercice 6.42 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (n - n^2x)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $]0, 1[$, et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(]0, 1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans L^p pour $p > 1$.
3. Y-a-t'il convergence simple, convergence presque partout, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans L^p ($p \in [1, +\infty]$) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (justifier vos réponses...) ?
4. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$, on a $\int f_n \varphi d\lambda \to \varphi(0)$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement dans L^1 (utiliser le fait que la mesure de Dirac n'est pas une mesure de densité, cf exercice 5.2).

Exercice 6.43 Soient (E, T, m) un espace mesuré t.q. $m(E) < +\infty$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2 = L^2(E, T, m)$ t.q. :

(i) la suite $(\|f_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

(ii) $f_n \to f \int f_n g dm \to \int f g dm$ quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in L^2$ et $\|f\|_2 \le \sup_{n\ge1} \|f_n\|_2$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, on note $B_n = \{x \in E; |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$. Montrer que $m(B_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. [*On pourra introduire* $A_p = \bigcup_{n\ge p} B_n$ *et montrer que* $m(A_p) \to 0$ *quand* $p \to +\infty$.]
3. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to +\infty$. [*On pourra écrire* $\int |f_n - f|dm = \int_{|f_n-f|>\varepsilon} |f_n - f|dm + \int_{|f_n-f|\le\varepsilon} |f_n - f|dm.$]
4. Montrer, en donnant un exemple, que f_n peut ne pas converger dans L^2, quand $n \to +\infty$.
5. Montrer que, pour tout $g \in L^2$, on a :
$$\int f_n g\, dm \to \int f g\, dm \text{ quand } n \to +\infty \tag{6.50}$$
(on dit que $f_n \to f$ "faiblement" dans L^2). [*Décomposer* $\int (f - f_n)gdm$ *de manière semblable à la question 3.*]

Exercice 6.44 Soient (E, T, m) un espace mesuré t.q. $m(E) < +\infty$ et $p \in [1, +\infty]$. Pour $r \in [1, +\infty]$, on note $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\|.\|_r$ la norme usuelle sur L^r. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$, t.q. :

(i) la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

(ii) $f_n \to f$ pp quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in L^p$ et $\|f\|_p \le \sup_{n\ge1} \|f_n\|_p$.
2. On suppose (dans cette question seulement) que $p > 1$. Soit $r \in [1, p[$, montrer que $f_n \to f$ dans L^r quand $n \to +\infty$.
3. Soit q le conjugué de p (i.e. tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), montrer que, pour tout $g \in L^q$, on a :
$$\int f_n g\, dm \to \int f g\, dm \text{ quand } n \to +\infty.$$
Peut-on dire que $f_n \to f$ "faiblement" dans L^p ?

Exercice 6.45 (Convergence forte contre convergence faible)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $r \in [1, +\infty]$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
Soit $p \in [1, \infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$, $u \in L^p$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q$ et $v \in L^q$.

1. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^p et $v_n \to v$ dans L^q, quand $n \to \infty$. Montrer que $u_n v_n \to uv$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$.
2. On suppose que $p = 1$, $u_n \to u$ faiblement dans L^1, $v_n \to v$ p.p., quand $n \to \infty$, et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq C$ p.p.. Montrer que $u_n v_n \to uv$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$.

Exercice 6.46 (Convergence faible et non linéarité) *Corrigé 129 page 432*
On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$.

1. (Unicité de la limite faible). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u, v \in L^1$. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$, (c'est-à-dire que $T(u_n) \to T(u)$ pour toute application T linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$) et que $u_n \to v$ faiblement dans L^1.
   (a) Montrer que $\int (u - v)\phi d\lambda = 0$, pour tout $\phi \in L^\infty$.
   (b) Montrer que $u = v$ p.p.. [Choisir convenablement ϕ dans l'égalité précécente.]
2. (Convergence forte contre convergence faible) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ et $v \in L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|v_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $v_n \to v$ p.p., quand $n \to \infty$.
   (a) Montrer que $v_n \to v$ dans L^p, quand $n \to \infty$, pour tout $1 \leq p < \infty$.
   (b) Donner un exemple pour lequel $v_n \not\to v$ dans L^∞.
   (c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u \in L^1$. On suppose que $\|u_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$. Montrer que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to \infty$. [Ecrire $v_n = v + (v_n - v)$.]

   On se donne maintenant une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$.
4. Soit $u \in L^\infty$ et $v, w \in u$. Montrer que $\{h \in \mathcal{L}^\infty; \, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty; \, h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

   Grâce aux 2 questions précédentes, pour $u \in L^\infty$, on pose, si $v \in u$:
   $\underline{\varphi}(u) = \{h \in \mathcal{L}^\infty; \, h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\}$, de sorte que $\underline{\varphi}(u) \in L^\infty$.

   On se donne maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|u_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $u \in L^1$ et $f \; : \;]0,1[\to \mathbb{R}$ t.q. :

   - $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$,
   - $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.

   Le but de l'exercice est de comparer f et $\underline{\varphi}(u)$.
5. Montrer que $|\int u 1_A d\lambda| \leq C\lambda(A)$ pour tout $A \in B(]0,1[)$. Montrer que $u \in L^\infty$ que $\|u\|_\infty \leq C$.
6. On suppose, dans cette question, que φ est affine (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) = \alpha s + \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p.. [Utiliser, en particulier, la question 1.]

7. On suppose, dans cette question, que φ est injective. Montrer qu'il existe $v \in L^\infty$ t.q. $u_n \to v$ p.p. quand $n \to \infty$. En déduire que $v = u$ et $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

8. (Astuce de Minty) On suppose, dans cette question, que φ est croissante.

   (a) Soit $v \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v) d\lambda \geq 0$. [Utiliser la croissance de φ et la question 2 (c).]

   (b) Soit $w \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(u)) w d\lambda \leq 0$. [Utiliser la question précédente avec $v = u + (1/n)w$.]

   (c) Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

9. On définit u_n, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 1$ p.p. sur $]2k/2n, (2k+1)/2n[$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et $u_n = -1$ p.p. sur $]2k - 1/2n, 2k/2n[$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

   (a) Montrer que $\int u_n \phi d\lambda \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $\phi \in C([0,1], \mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $u_n \to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0,1], \mathbb{R})$ dans L^1.] Montrer que $u_n \not\to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

   (c) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. et $f \neq \underline{\varphi}(0)$ p.p.. (et donc φ n'est pas croissante et n'est pas injective).

   (d) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ croissante pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. (et donc $f = \underline{\varphi}(0)$ p.p., par la question 8, et φ est non injective, par les questions 7 et 9 (b)).

Exercice 6.47 (Convergence faible et convergence forte dans L^1) *Corrigé 130 page 437*
Soit (X, T, m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$.
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1$, $f \in L^1$ et $C \in \mathbb{R}$. On suppose que

- $f_n \to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $\int f_n g dm \to \int f g dm$ pour tout $g \in L^\infty$).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq C$ p.p..

1. Montrer que $f \geq C$ p.p..
2. On suppose maintenant que $f = C$ p.p..
   Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 (c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$).

Exercice 6.48 (Convergence étroite de mesures) *Corrigé 131 page 437*
Soit $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on rappelle que "m_n finie" signifie que "$m_n(\mathbb{R}) < \infty$") et m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.
On suppose que :

$$\int g dm_n \to \int g dm, \text{ pour tout } g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On ne suppose pas que f est bornée, mais on suppose que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} m_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\alpha < \infty$.

2. On suppose, dans cette question, que :

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty.$$

   (a) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact et t.q. $0 \le \varphi(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de α et β (définis ci dessus), t.q. :

$$\int |f|\varphi dm \le C.$$

   (b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$

   (c) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to \infty$.

3. On ne suppose plus que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty$.

   Montrer (en choisissant convenablement $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, m et f) que l'on peut avoir $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

Exercice 6.49 (Convergence faible et convexité) *Corrigé 132 page 440*
Dans cet exercice (E, T, m) est un espace mesuré et on suppose que la mesure m est $\sigma-$finie.. Pour tout $1 \le r \le \infty$, on note L^r l'espace $L^r(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r(E, T, m)$). Soit $1 \le p < \infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $u \in L^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p quand $n \to \infty$ (on rappelle que ceci signifie $T(u_n) \to T(u)$, quand $n \to \infty$, pour tout T dans $(L^p)'$, c'est-à-dire dans le dual topologique de L^p).

1. On pose $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$. Montrer que, pour tout $v \in L^r$:

$$\int u_n v dm \to \int uv dm.$$

   Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ est strictement convexe (ce qui est équivalent à dire que φ' est strictement croissante).

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h_a(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x - a)$.

   (a) Montrer que $h_a(x) > 0$ si $x \ne a$.

   (b) Montrer que h_a est décroissante sur $]-\infty, a[$ et croissante sur $]a, \infty($.

   Soit $1 \le q < \infty$. On suppose maintenant que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^q et qu'elle converge faiblement dans L^q, quand $n \to \infty$, vers une (classe de) fonction(s) $\overline{\varphi} \in L^q$.

   Précision de notation : On choisit un représentant pour u_n. On désigne alors par $\varphi(u_n)$ la fonction (de E dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u_n(x))$. Cette fonction est supposée être dans $\mathcal{L}^q$ et on l'identifie, comme d'habitude, avec l'élément de L^q qu'elle représente.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = [\varphi(u_n) - \varphi(u) - \varphi'(u)(u_n - u)]$.

   Précision de notation : Ici aussi, pour définir f_n, on choisit un représentant pour u. On désigne alors par $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$ les fonctions $x \mapsto \varphi(u(x))$ et $x \mapsto \varphi'(u(x))$.

3. Soit $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. On pose $A_k = \{|u| \le k\}$ (c'est-à-dire $A_k = \{x \in E$ t.q. $|u(x)| \le k\}$.

   Montrer que $\displaystyle\int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm$, quand $n \to \infty$.

4. Montrer $\overline{\varphi} \ge \varphi(u)$ p.p.. [Utiliser les questions 2(a) et 3.]

   On suppose maintenant que $\overline{\varphi} = \varphi(u)$ p.p..

5. Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$, $k \in \mathbb{R}_+^\star$ et $A_k = \{|u| \le k\}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.

6. (Question plus difficile.) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers 0 sur E. [Utiliser le fait que la mesure m est $\sigma-$finie et un "procédé diagonal".]

7. Soit $x \in E$ t.q. $f_n(x) \to 0$, montrer que $u_n(x) \to u(x)$. [Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$, limite d'une sous suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Utiliser la question 2 pour montrer que $b = u(x)$.]

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers u.

9. On suppose ici que $p > 1$. Montrer que $u_n 1_B \to u 1_B$ dans L^r pour tout $r \in [1, p[$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. [Utiliser l'exercice 6.18.]

10. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\varphi(s) = s^2$, donner un exemple pour lequel $u_n \not\to u$ p.p. sur E (toutefois, d'après la question 8, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant p.p. vers u).

Exercice 6.50 (Produit de convergences faibles) *Corrigé 133 page 444*
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
Soit $\alpha, \beta > 0$. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit ψ_a de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi_a(t) = (t^\alpha - a^\alpha)(t^\beta - a^\beta)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\psi_a(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \ne a$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives appartenant à L^∞ et $l_\alpha, l_\beta, l_{\alpha+\beta} \in L^\infty$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞ et que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star-$faiblement dans L^∞, quand $n \to \infty$, pour $\gamma = \alpha$, $\gamma = \beta$ et $\gamma = \alpha + \beta$.

   On rappelle que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star-$faiblement dans L^∞ signifie que $\int f_n^\gamma \varphi dm \to \int l_\gamma \varphi dm$, quand $n \to \infty$, pour tout $\varphi \in L^1$.

2. Soit $\varphi \in L^1$ t.q. $\varphi \ge 0$ p.p.. Montrer que $\int l_a \varphi dm \ge 0$.

3. Montrer que $l_\alpha \ge 0$ p.p..

4. Montrer que $l_{\alpha+\beta} \ge l_\alpha l_\beta$ p.p.. [On pourra utiliser $\psi_a(t) \ge 0$ avec $t = f_n(x)$ et $a = (l_\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha}}$.]

5. On suppose maintenant que $l_{\alpha+\beta} = l_\alpha l_\beta$ p.p.. On pose $f = l_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ et $g_n = (f_n^\alpha - f^\alpha)(f_n^\beta - f^\beta)$.

   (a) Montrer que $g_n \to 0$ dans L^1, quand $n \to \infty$.

   (b) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $g_{\varphi(n)} \to 0$ p.p., quand $n \to \infty$. Montrer que $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p., quand $n \to \infty$. [Utiliser la question 1.]

   (c) Montrer que $f_n \to f$ dans L^q, quand $n \to \infty$, pour tout $q \in [1, \infty[$.

Exercice 6.51 (Convergence faible contre convergence forte)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. On suppose que m est σ-finie. Pour $r \in [1, \infty]$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (et L^r est muni de sa norme usuelle). Soit $p, q \in [1, \infty]$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de L^q.

1. On suppose ici que $p \in [1, \infty[$ (et donc $q \in]1, \infty]$), $\varphi_n \to \varphi$ dans L^q, quand $n \to \infty$, et $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $T(f_n) \to T(f)$ pour toute application linéaire continue T de L^p dans $\mathbb{R}$).
   (a) Montrer que $\int f_n \psi dm \to \int f \psi dm$, pour tout $\psi \in L^q$.
   (b) Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$.
2. On suppose ici que $p = \infty$ (et donc $q = 1$), $\varphi_n \to \varphi$ dans L^1, quand $n \to \infty$, et $f_n \to f$ $\star$−faiblement dans L^∞, quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $\int f_n \psi dm \to \int f \psi dm$ pour tout $\psi \in L^1$). Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$.

On suppose pour la suite de l'exercice que $p = 1$ (et donc $q = \infty$) et $m(E) < \infty$.

3. Montrer que $\varphi_n \to \varphi$ dans L^∞, quand $n \to \infty$, implique :
   (p1) $\varphi_n \to \varphi$ p.p. quand $n \to \infty$.
4. Montrer, en prenant (par exemple) $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ que (p1) n'implique pas $\varphi_n \to \varphi$ dans L^∞ quand $n \to \infty$. [Il faut donc trouver une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée de L^∞ et $\varphi \in L^\infty$ t.q. $\varphi_n \to \varphi$ p.p., quand $n \to \infty$, et $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \not\to 0$, quand $n \to \infty$.]

On suppose maintenant que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (p1) et que :

(p2) $f_n \to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to \infty$,

5. Montrer que $\varphi \in L^\infty$ (au sens "il existe $\bar{\varphi} \in \mathcal{L}^\infty(E, T, m)$ t.q. $\varphi = \bar{\varphi}$ p.p."). [On rappelle que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est, par hypothèse, bornée dans L^∞.]
6. On admet que (p2) implique l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } A \in T,\ m(A) \leq \delta,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon.$$
   Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

Exercice 6.52 (Dunford-Pettis)
En attente

Exercice 6.53 (Conv. étroite et conv. des mesures des intervalles) *Corrigé 134 page 444*
Soit $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to \infty$, et que m est diffuse (c'est-à-dire que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, montrer que $m_n(I) \to m(I)$ quand $n \to \infty$. Montrer (en donnant un contre-exemple) que cette propriété peut être fausse si m n'est pas diffuse.

Exercice 6.54 (Convergence en loi) *Corrigé 135 page 445*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X une v.a. réelle de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que $-X$ est une v.a. de même loi que X.
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. t.q. :
   (a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X,
   (b) $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi vers 0.
3. Donner un exemple de trois v.a. X, Y, Z t.q. X et Y aient la même loi, mais sans que XZ et YZ aient la même loi.

Exercice 6.55 (Convergence en loi + convergence en probabilité) *Corrigé 136 page 446*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. réelles t.q. :

$$X_n \to X \text{ en loi, } Y_n \to 0 \text{ en probabilité, quand } n \to \infty.$$

Montrer que

$$X_n + Y_n \to X \text{ en loi, quand } n \to \infty.$$

[On pourra utiliser la convergence vague.]

Exercice 6.56 (Convergence en loi versus convergence en probabilité) *Corrigé 137 page 446*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles.

1. On suppose, dans cette question, que $X_n \to X$ en probabilité, quand $n \to \infty$. Montrer que :

   $$X_n \to X \text{ en loi, quand } n \to \infty.$$

   [Remarquer qu'il suffit de démontrer une convergence vague de P_{X_n} vers P_X.]
2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $X = a$ p.s.. On suppose aussi que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to \infty$. Montrer que :

   $$X_n \to X \text{ en probabilité, quand } n \to \infty.$$