

# Notice sur les titres et les travaux

**Franck BOYER**

04/03/2012

Professeur. Aix-Marseille Université  
Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités  
UMR CNRS 7353

---

Curriculum Vitae .....	3
Etat civil et carrière	
Titres et diplômes	
Vue d'ensemble de la production scientifique	
Encadrement de thèses	
Animation de la recherche	
Activités d'enseignement	
Activités d'intérêt général	
Compétences informatiques	
Production scientifique détaillée .....	16
Livres	
Articles publiés dans des RICL	
Articles soumis et en préparation	
Mémoires	
Actes de congrès	
Exposés	
Description des principales contributions scientifiques .....	21
Modélisation et simulation en mécanique des fluides multiphasiques	
Etude théorique et numérique d'EDPs de la mécanique des fluides	
Schémas numériques volumes finis pour les opérateurs elliptiques	
Approximation de contrôles d'EDP paraboliques	
Présentation du livre [2]	



# Curriculum Vitae

## ÉTAT CIVIL

Franck BOYER  
Né le 13.04.1977 à Montpellier (34)  
Nationalité Française  
Pacsé, un enfant (2007)

### ———— Adresse professionnelle ————

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités  
Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme  
Case Cour A  
Aix-Marseille Université  
Avenue Escadrille Normandie-Niemen  
13397 MARSEILLE Cedex 20

Tél : 04-13-55-14-82 / 04-91-28-28-43

E-mail : [fboyer@latp.univ-mrs.fr](mailto:fboyer@latp.univ-mrs.fr) ou [franck.boyer@univ-amu.fr](mailto:franck.boyer@univ-amu.fr)

Page WEB : <http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer>

## CARRIÈRE

- 1995/1999 : Elève Normalien (ENS Cachan)
- 1999/2001 : Allocataire de Recherche et Moniteur à l'Université Bordeaux I
- 2001/2007 : **Chargé de Recherche au CNRS**, section 01 affecté au LATP.
- Octobre 2005 : Promotion à la **première classe** des chargés de recherche
- Depuis Sept. 2007 : Professeur à l'université Paul Cézanne (devenue Aix-Marseille Université au 1er Janvier 2012)
- 2007-2011 : Titulaire de la PEDR
- 2011-2012 : Délégation au CNRS à mi-temps.
- 2011-2015 : Titulaire de la PES

## TITRES ET DIPLÔMES

- **Baccalauréat** Série C (1993, Montpellier, mention TB)
- **Licence** de Mathématiques (1996, Université Paris VII, mention TB)  
Mémoire de première année de l'ENS (directeur : J. Vetois) :  
ENVELOPPES CONVEXES : POINT DE VUE ALGORITHMIQUE
- **Maîtrise** de Mathématiques (1997, Université Paris VII, mention TB)
- **DEA** "EDP et Calcul scientifique" (1998, Université Paris XI Orsay, mention TB)  
Mémoire de DEA (directeur : B. Helffer) : THÉORIE DE THOMAS-FERMI DU SOLIDE
- **Agrégation** de Mathématiques (1998, rang : 7)

- **Thèse de doctorat** de l'Université Bordeaux 1, (Sept. 1998 / Mars 2001)

### ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES DE TYPE CAHN-HILLIARD

soutenue le 30 Mars 2001 après avis des rapporteurs

- E. Grenier (Professeur à l'École Normale Supérieure de Lyon)
- P.-A. Raviart (Directeur de recherche au CNRS, École polytechnique)

devant le jury composé de

- M. Langlais (Professeur à l'Université Bordeaux 2) : **Président**
- D. Roux (Directeur de recherche CNRS, CRPP, Université Bordeaux 1)
- G.-H. Cottet (Professeur à l'Université Joseph Fourier)
- P. Fabrie (Professeur à l'Université Bordeaux 1) : **Directeur de thèse**
- E. Grenier (Professeur à l'École Normale Supérieure de Lyon)
- G. Métivier (Professeur à l'Université Rennes 1)
- M. Quintard (Directeur de recherche CNRS, IMFT, Toulouse)

- **Habilitation à diriger des recherches** de l'Université de Provence,

### MODÉLISATION, ANALYSE ET APPROXIMATION NUMÉRIQUE EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

soutenue le 3 Octobre 2006 après avis des rapporteurs

- B. Desjardins (Directeur de recherches CEA et professeur associé ENS Paris)
- M. Feistauer (Professeur, Université Charles, Prague)
- T. Gallouët (Professeur, Université de Provence)

devant le jury composé de

- S. Cordier (Professeur, Université d'Orléans)
- B. Desjardins (Directeur de Recherche, CEA Bruyères-le-Chatel)
- P. Fabrie (Professeur, Université Bordeaux 1)
- T. Gallouët (Professeur, Université de Provence)
- E. Grenier (Professeur, ENS Lyon) : **Président**
- R. Herbin (Professeur, Université de Provence)

## VUE D'ENSEMBLE DE LA PRODUCTION SCIENTIFIQUE

### ———— Publications ————

- 1 livre édité dans la collection “Mathématiques et Applications”, Springer.
- Nous avons été sollicités par Springer pour préparer une nouvelle édition révisée et en anglais. Celle-ci paraîtra dans le courant de l’année 2012 dans la collection “Applied Mathematical Sciences”.
- 23 articles parus ou à paraître dans des revues internationales avec comité de lecture.
- 2 articles soumis à des revues internationales avec comité de lecture
- 2 articles en préparation
- 11 publications dans les actes de congrès internationaux à comité de lecture
- 3 publications dans les actes de congrès nationaux à comité de lecture

### ———— Codes de calcul ————

- Développement d’un code de calcul (en F90) pour la simulation d’écoulements diphasiques incompressibles newtoniens ou non-newtoniens.  
↔ Couplage Cahn-Hilliard / Navier-Stokes / modèles viscoélastiques de type Oldroyd.

<http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/CHNS/>

- Développement (avec F. Hubert) d’un code de calcul (en F90) pour des problèmes elliptiques linéaires et fortement non-linéaires par des schémas VF sur des maillages éventuellement non conformes (décomposition de domaines, domaines fissurés, maillages raffinés localement).

[http://www.latp.univ-mrs.fr/latp\\_numerique/](http://www.latp.univ-mrs.fr/latp_numerique/)

- Développement (avec S. Krell) d’un code de calcul en Scilab, illustrant l’implémentation et l’utilisation de différents schémas de volumes finis 1D et 2D pour des problèmes elliptiques. Ce code a servi plusieurs fois de support à des cours de niveau M2 et post-doc et nous en prévoyons plusieurs extensions et une diffusion plus large.

[http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/VF\\_scilab.tar.gz](http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/VF_scilab.tar.gz)

### ———— Exposés ————

- 15 conférences ou mini-cours invités depuis 2008.
- Une vingtaine de séminaires et communications dans des congrès nationaux et internationaux depuis 2005.

## ENCADREMENT DE THÈSES

- 2000/2003 : **Thèse de Laurent Chupin** : Co-encadrement à 50% (avec P. Fabrie), financement AMN :

“MÉLANGES DE FLUIDES VISCOÉLASTIQUES”

soutenue le 15 Décembre 2003 à Bordeaux.

- L'article [7] est issu de cette thèse.
- 3 autres articles dont je ne suis pas co-auteur sont issus de cette thèse :  
L. Chupin (DCDS-B 2003), L. Chupin (ADE 2004), L. Chupin (AML 2005).

L. Chupin a été Maître de conférences à l'INSA de Lyon de 2004 à 2010, il est actuellement Professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand depuis le 01/09/2010.

- 2003/2006 : **Thèse de Céline Lapuerta** : Co-encadrement à 50% (avec P. Angot), financement IRSN/Région PACA :

“ECHANGES DE MASSE ET DE CHALEUR ENTRE DEUX PHASES LIQUIDES STRATIFIÉES DANS UN ÉCOULEMENT À BULLES”

soutenue le 5 Octobre 2006 à Marseille.

Cette thèse s'est déroulée à l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire à Cadarache.

- L'article [12] est issu de cette thèse.

C. Lapuerta est actuellement Ingénieur-Chercheur IRSN titulaire depuis Octobre 2006.

- 2007/2010 : **Thèse de Sébastien Minjeaud** : encadrement à 100%, financement 100% IRSN + monitorat :

“RAFFINEMENT LOCAL ADAPTATIF ET MÉTHODES MULTINIVEAUX POUR LA SIMULATION D'ÉCOULEMENTS MULTIPHASIQUES”

soutenue le 27 Septembre 2010 à Marseille.

Cette thèse a eu lieu à l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire à Cadarache.

- Les articles [18], [20] et [23] sont issus de cette thèse.
- 2 autres articles dont je ne suis pas co-auteur sont issus de cette thèse:  
S. Minjeaud (NumpDE 2012), S. Minjeaud (soumis 2011).

S. Minjeaud est actuellement Chargé de Recherches au CNRS.

- 2007/2010 : **Thèse de Stella Krell** : Co-encadrement à 50% (avec F. Hubert), financement MENESR + monitorat :

“SCHÉMAS VOLUMES FINIS EN MÉCANIQUE DES FLUIDES COMPLEXES”

soutenue le 8 Septembre 2010 à Marseille.

- L'article [19] est issu de cette thèse.
- 3 autres articles dont je ne suis pas co-auteur sont issus de cette thèse:  
S. Krell (NumpDE 2011), S. Krell (M3AS 2012), S. Krell et G. Manzini (SINUM 2012).

S. Krell est actuellement Maître de Conférences à l'IUFM de Nice.

- 2009/. . . : **Thèse de Fanny Dardalhon** : encadrement à 100%, financement IRSN/Région PACA

“SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR LA SIMULATION DES GRANDES ÉCHELLES”

Cette thèse se déroule à l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire à Cadarache.

- L'article [26] est issu de cette thèse.
- 1 autre article dont je ne suis pas co-auteur est issu de cette thèse, à ce jour:  
F. Dardalhon, J.C. Latché et S. Minjeaud 2011

- 2010/. . . : **Thèse de Guillaume Olive** : Co-encadrement à 50% (avec A. Benabdallah), financement MENESR :  
“ ETUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE CONTRÔLE POUR DES SYSTÈMES PARABOLIQUES LINÉAIRES ET NON-LINÉAIRES.”
  - 1 article dont je ne suis pas co-auteur est issu de cette thèse, à ce jour:  
G. Olive (MCSS 2012)
  
- 2011/. . . : **Thèse de Flore Nabet** : Co-encadrement à 80% (avec P. Bousquet), financement MENESR :  
“SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR DES PROBLÈMES À INTERFACE.”

## ANIMATION DE LA RECHERCHE

### ———— Organisation de colloques et GDRs ————

- Membre et gestion du site WEB du GDR CNRS : “Equations d’Amplitude et Propriétés Qualitatives” (2000/2005)

<http://eapq.ujf-grenoble.fr>

- Membre du comité d’organisation du congrès international :

”Finite Volumes for Complex Applications 3”, Porquerolles, Juin 2002.

<http://www.latp.univ-mrs.fr/~herbin/FVCA-3/>

- Membre du comité scientifique du congrès “Workshop sur les problèmes inverses”, CIRM, Décembre 2005.
- Responsable local (LATP) et gestion du site WEB du GDR CNRS : “Modélisation, Asymptotique, Dynamique non linéaire” (2006/...)

<http://moad.univ-lyon1.fr/>

- Co-organisation avec D. Lannes (Bordeaux) de la première rencontre dans le cadre de MOAD:

“Challenges actuels en mécanique des fluides : modélisation et analyse”, CIRM, Octobre 2006.

<http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/MECAFLU2006/>

- Coordination avec F. Hubert de l’organisation d’un **mois résidentiel**:

“EDP et Calcul Scientifique”, CIRM, du 2 Février au 9 Mars 2009.

<http://www.latp.univ-mrs.fr/cirm09/>

Cette grosse manifestation (5 semaines de conférences et écoles d’été, plus de 300 participants) a été un succès incontestable et a renforcé la visibilité du LATP à l’échelle nationale et internationale. Les 5 semaines ont permis de balayer le large spectre de l’équipe d’Analyse Appliquée:

- Semaine 1 : Colloque "Equations cinétiques et applications"

Organisation : Claudia Negulescu et Anne Nouri

- Semaine 2 : Ecole thématique "Avancées récentes en calcul scientifique"

Organisation : Franck Boyer, Florence Hubert et Jean-Claude Latché

- Semaine 3 : Colloque "Contrôle et problèmes inverses pour les EDP : aspects théoriques et numériques"

Organisation : Michel Cristofol, Patricia Gaitan et Jérôme Le Rousseau

- Semaine 4 : Ecole thématique "Défis actuels des mathématiques en médecine et biologie du cancer"

Organisation : Dominique Barbolosi, Assia Benabdallah, Yves Dermenjian et Marie Henry

- Semaine 5 : Colloque "Aspects géométriques des équations aux dérivées partielles"

Organisation : Olivier Guès, Emmanuel Russ et Yannick Sire

- Co-organisation avec F. Alabau, F. Ancona et J. Le Rousseau, d’une conférence dans le cadre du GDRE CONEDP

“Contrôle des EDP”, CIRM, du 25 au 29 Janvier 2010.

<http://www.latp.univ-mrs.fr/CIRM2010/>

- Co-organisation avec A. Benabdallah, M. Cristofol, Y. Dermenjian et P. Gaitan, d’une conférence dans le cadre du GDRE CONEDP

“Contrôle des EDP”, Marseille, du 21 au 23 Novembre 2011.

[http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Conf\\_GDRE\\_2011/](http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Conf_GDRE_2011/)

- Contrats IRSN / LATP (2006-2008 : 40 000 € HT / 2009-2012 : 60 000 € HT)

*Méthodes numériques pour quelques problèmes de la mécanique des fluides*

avec P. Angot et R. Herbin.

Ce contrat concerne notamment la participation à l'encadrement de thèses, de stages de MASTER, etc ... En ce qui me concerne il s'agit principalement des thèses de C. Lapuerta, S. Minjeaud et F. Dardalhon.

- Membre du GDR MOMAS (2004-2006), thème :

*Dispersion en milieu poreux fracturé,*

crédits gérés par P. Angot (3 000€ en 2004, 4 000€ en 2005, 2 000€ en 2006).

Ce projet concernait notre travail sur les modèles asymptotiques d'écoulements en milieux poreux fracturés.

- Membre du GDR MOMAS (2008-2011), projet :

*Méthodes numériques pour les écoulements en milieux anisotropes et hétérogènes*

responsable du projet : R. Herbin puis F. Hubert, 13 000€ pour le LATP.

- Contrat d'expertise TOTAL / LATP, (2005-2009 : 98 000 € HT). Responsable du contrat : F. Boyer, A. Benabdallah et Y. Dermenjian

Ce contrat met à contribution plusieurs membres de l'équipe et consiste à expertiser des méthodes de calcul utilisées en interne chez Total, afin d'obtenir des solutions exactes ou semi-exactes (dans des géométries relativement simples) pour les équations de type Darcy avec conditions de saut et termes sources mesures.

- Contrat d'expertise TOTAL / LATP (2010-2012 : 30 000 € HT). Responsable du contrat : F. Boyer

Ce contrat fait suite au précédent et consiste à adapter la méthodologie développée à de nouvelles géométries et/ou conditions aux limites.

- Membre du projet ANR CoNum (2007-2010) : Contrôle Numérique, Applications à la biologie.

<http://www.latp.univ-mrs.fr/~jlerous/CONUM.html>

- Membre et responsable local du projet ANR FAUTOCOES (2009-2013) : Fault Tolerant Control of Embedded Systems.

<http://fautocoes.bordeaux.inria.fr/>

- Membre du projet de collaboration France/Algérie "Problèmes de contrôle, problèmes inverses et mécanique des fluides", programme TASSILI 2011/2015 (resp. A. Benabdallah)

- **Co-directeur:** Th. de L. Chupin : “MÉLANGES DE FLUIDES VISCOÉLASTIQUES”  
Université Bordeaux 1, Décembre 2003, Direction : F. Boyer et P. Fabrie.
- **Examineur:** Th. de P. Blanc : “SCHÉMAS VOLUMES FINIS POUR LES ÉQUATIONS DE STOKES”  
Université de Provence, Septembre 2005, Direction : R. Herbin.
- **Co-directeur:** Th. de C. Lapuerta : “ÉCHANGES DE MASSE ET DE CHALEUR ENTRE DEUX PHASES LIQUIDES STRATIFIÉES DANS UN ÉCOULEMENT À BULLES”  
Université de Provence, Octobre 2006, Direction : P. Angot et F. Boyer.
- **Rapporteur:** Th. de S. Delcourte : “DÉVELOPPEMENT DE MÉTHODES DE VOLUMES FINIS POUR LA MÉCANIQUE DES FLUIDES”  
Université Paul Sabatier, Toulouse, Septembre 2007, Direction : K. Domelevo et P. Omnès.
- **Examineur:** Th. de L. Gastaldo : “MÉTHODES DE CORRECTION DE PRESSION POUR LES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES: APPLICATION AUX ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES BAROTROPES ET AU MODÈLE DE DÉRIVE”  
Université de Provence, Novembre 2007, Direction : R. Herbin.
- **Examineur:** Th. de M. El Smaily : “EQUATION DE RÉACTION-DIFFUSION DANS DES MILIEUX HÉTÉROGÈNES NON-BORNÉS”  
Université Paul Cézanne, Mai 2008, Direction : F. Hamel.
- **Rapporteur:** Th. de L. Vignon : “MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DES ÉQUILIBRES ATMOSPHÉRIQUES, APPLICATION AUX CYCLONES TROPICAUX”  
Université Bordeaux 1, Juillet 2008, Direction : D. Lannes.
- **Examineur:** Th. de C. Cancès : “ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN MILIEUX POREUX HÉTÉROGÈNES : MODÉLISATION ET ANALYSE”  
Université de Provence, Octobre 2008, Direction : T. Gallouët.
- **Rapporteur:** Th. de I. Moukouop : “SCHÉMAS VOLUMES FINIS POUR LE CALCUL DE L’HYDRODYNAMIQUE EN MILIEU POREUX ANISOTROPE ET HÉTÉROGÈNE”  
Université de Yaoundé I, Automne 2008, Direction : A. Njifendjou
- **Rapporteur:** Th. de Bérénice Grec : “MODÉLISATION MATHÉMATIQUE D’ÉCOULEMENTS COMPLEXES EN FILM MINCE, ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE”  
Ecole Centrale de Lyon et INSA de Lyon, Décembre 2008, Direction : L. Chupin et G. Bayada
- **Rapporteur:** Th. de Sami Injrou : “ÉTUDE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE CAHN-HILLIARD NON ISOTROPE ET NON ISOTHERME”  
Université de Poitiers, Juin 2009, Direction : A. Miranville et M. Pierre
- **Président du jury:** Th. de Ludovic Goudenède : “QUELQUES RÉSULTATS SUR L’ÉQUATION DE CAHN-HILLIARD STOCHASTIQUE ET DÉTERMINISTE”  
ENS Cachan Bretagne, Novembre 2009, Direction : A. Debbusche
- **Rapporteur:** Th. de Julien Dambrine : “MODÉLISATION ET ÉTUDE NUMÉRIQUE DE QUELQUES ÉCOULEMENTS DE FLUIDES COMPLEXES EN MICRO-FLUIDIQUE”  
Université Bordeaux 1, Décembre 2009, Direction : M. Colin et T. Colin
- **Rapporteur:** Th. de Mehmet Ersoy : “MODÉLISATION, ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE DIVERS ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES OU INCOMPRESSIBLES EN COUCHE MINCE”  
Université de Savoie, Septembre 2010, Direction : C. Bourdarias et S. Gerbi
- **Co-directeur:** Th. de Stella Krell : “SCHÉMAS DE VOLUMES FINIS EN MÉCANIQUE DES FLUIDES COMPLEXES”  
Université de Provence, Septembre 2010, Direction : F. Boyer et F. Hubert

- **Directeur:** Th. de Sebastian Minjeaud : “RAFFINEMENT LOCAL ADAPTATIF ET MÉTHODES MULTINIVEAUX POUR LA SIMULATION D’ÉCOULEMENTS MULTIPHASIQUES”  
Université Paul Cézanne, Septembre 2010, Direction : F. Boyer
- **Examineur:** HDR de Claudia Negulescu : “MODÉLISATION, SIMULATION ET ANALYSE MATHÉMATIQUE DES PLASMAS QUANTIQUES ET CLASSIQUES”  
Université de Provence, Novembre 2010.
- **Examineur:** HDR d’Emmanuel Russ : “RACINES CARRÉES D’OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS, ESPACES DE HARDY, OPTIMISATION DE VALEURS PROPRES ET INVERSION DE LA DIVERGENCE”  
Université Paul Cézanne, Décembre 2010.
- **Président du jury:** Th. de Yohan Penel : “ETUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DE LA DÉFORMATION D’UNE INTERFACE SÉPARANT DEUX FLUIDES NON-MISCIBLES À BAS NOMBRE DE MACH”  
Université Paris XIII, Décembre 2010, Direction : S. Dellacherie, O. Lafitte
- **Rapporteur:** HDR de Morgan Pierre : “ETUDE NUMÉRIQUE ET MATHÉMATIQUE DE QUELQUES MODÈLES DE TRANSITION DE PHASE, DE SÉPARATION DE PHASES ET DE CRISTAUX LIQUIDES”  
Université de Poitiers, Octobre 2011.

———— Activités éditoriales ————

- Depuis Septembre 2011 :  
Membre du comité éditorial de la revue **Discrete and Continuous Dynamical Systems - Série S**
- Reviewer de monographies éditées chez Springer.
- Reviewer d’articles de recherche pour les journaux suivants :
  - Advances in Water Resources
  - Applied Numerical Mathematics
  - Archive for Rational Mechanical Analysis
  - Communications in Mathematical Sciences
  - Discrete and Continuous Dynamical Systems
  - ESAIM Proceedings
  - IMA Journal on Numerical Analysis
  - Interface and Free Boundaries
  - International Journal on Finite Volumes
  - Journal of Computational Physics
  - M<sup>2</sup>AN : Modélisation Mathématique et Analyse Numérique
  - M<sup>2</sup>AS : Mathematical Methods in the Applied Science
  - Nonlinearity
  - Numerische Mathematik
  - SIAM Journal on Control and Optimization

## ACTIVITÉS D'ENSEIGNEMENT

### ———— Responsabilités pédagogiques ————

- 2007-2012 : Responsable du parcours Maths de la troisième année de la licence Maths-Info de l'université Paul Cézanne.

<http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/L3maths>

- 2007-2012 : Membre de l'équipe pédagogique de la licence Maths-Info de l'université Paul Cézanne.

Ces deux responsabilités ont consisté à, d'une part, gérer auprès des étudiants et des collègues les aspects pédagogiques de la troisième année de la licence (changements de parcours, équivalences d'UE, choix d'options, orientation, etc ...) mais aussi des aspects pratiques (emploi du temps, présidence de jurys, gestion de la page web du parcours, etc ...). J'ai également été associé aux discussions sur la préparation de la maquette de la nouvelle licence de l'université unique d'Aix-Marseille qui entrera en vigueur en Septembre 2012.

- 2010-2012 : Membre du groupe de travail inter-universitaire (6 personnes) sur la création de la future Licence de Sciences de l'université unique sur l'aire d'Aix-Marseille.

Le but de ce groupe de travail inter-universitaire a été de préparer la structuration du département de mathématiques dans le cadre de la fusion des universités.

Nous avons par exemple dû construire un avant-projet de statuts du département, en définir les contours (c'est une question délicate à Aix-Marseille étant donné que les mathématiques étaient présentes dans 3 UFR distinctes mais aussi dans les composantes IUT, l'IUFM, etc ...), faire des propositions sur la localisation géographique des enseignements (passage de 4 sites pour le L1/L2 à 3 sites seulement en Septembre 2012).

La mission de ce groupe de travail s'est achevée en Janvier 2012 suite à la fusion effective des universités qui a donné lieu à la mise en place d'un conseil de département provisoire et d'un président de département provisoire, dans l'attente des élections qui devront intervenir au printemps 2012.

### ———— Colles, cours, travaux dirigés et pratiques ————

- 1998/1999 : Colles en classe préparatoire MP\* au lycée Montaigne à Bordeaux.
- 1999/2001 : Moniteur de l'université Bordeaux I (64h de Travaux Dirigés en premier cycle par an).
- 2002/2003 : Préparation à l'oral de l'option "Calcul scientifique" de l'agrégation à l'université de Provence.
- 2004/2005 : Cours spécialisé en M2 Recherche "Mathématiques et Applications", Université de Provence.

#### Analyse des équations de la mécanique des fluides incompressibles

- 2006/2007 : Cours spécialisé en M2 Recherche "Mathématiques et Applications", Université de Provence.

#### Aspects théoriques et numériques de l'équation de transport<sup>1</sup>

- 2007/2008 :

- Cours/TD/TP de M1 : Analyse numérique des EDP<sup>2</sup>.
- TD de M1 : Analyse des EDP.
- Cours de L2 : Analyse numérique.

- 2008/2009 :

- Cours fondamental en M2 Recherche "Mathématiques et Applications" :

#### Analyse numérique des EDP elliptiques<sup>3</sup>

- Cours/TD/TP de M1 : Analyse numérique des EDP<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Notes de cours disponibles : [http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/Cours\\_Transport\\_FBoyer.pdf](http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/Cours_Transport_FBoyer.pdf)

<sup>2</sup>Page WEB de ce module : [http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/M1\\_AN/](http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/M1_AN/)

<sup>3</sup>Page WEB de ce module : [http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/M2\\_AN/](http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/M2_AN/)

- 2 cours de L2 : Analyse 2 et Calcul Différentiel.
- 2009/2010 :
  - Cours fondamental en M2 Recherche “Mathématiques et Applications” :  
Analyse numérique des EDP elliptiques<sup>3</sup>
  - Cours/TD/TP de M1 : Analyse numérique des EDP<sup>2</sup>.
  - TD de L3 : Topologie et Analyse.
  - TP de L3 : Analyse Numérique.
  - Cours de L2 : Calcul Différentiel.
- 2010/2011 :
  - Cours fondamental en M2 Recherche “Mathématiques et Applications” :  
Analyse numérique des EDP elliptiques<sup>3</sup>
  - Cours/TD/TP de M1 : Analyse numérique des EDP<sup>2</sup>.
  - TD de L3 : Topologie et Analyse.
  - TP de L3 : Analyse Numérique.
  - Cours de L2 : Calcul Différentiel.
- 2011/2012 : (année en demi-délégation CNRS)
  - Cours fondamental en M2 Recherche “Mathématiques et Applications” :  
Analyse numérique des EDP elliptiques<sup>3</sup>
  - Cours/TD/TP en Préparation à l’agrégation externe<sup>4</sup> (Analyse et Option B).

### ———— Encadrement de stages de niveau Licence ————

- 2000/2001 : Stages de première année de l’école d’ingénieurs MATMECA à Bordeaux (3 binômes).  
“MÉTHODES NUMÉRIQUES DE CALCUL DES ÉLÉMENTS PROPRES D’UNE MATRICE”
- 2005 : Stage de première année de l’ENS Lyon de Gwenaël Moysan.  
“JUSTIFICATION DE LA LOI DE DARCY À PARTIR DES ÉQUATIONS DE STOKES PAR CONVERGENCE DOUBLE ÉCHELLE”

### ———— Encadrement de mémoires de TER de Master 1 ————

- 2007/2008 : 2 groupes sur les sujets suivants  
“SCHÉMAS D’ORDRE ÉLEVÉ POUR LES ÉQUATIONS SCALAIRES HYPERBOLIQUES EN 1D”  
“RÉSOLUTION D’UN PROBLÈME ELLIPTIQUE PAR LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS”
- 2008/2009 : 3 groupes sur les sujets suivants  
“THÉORÈMES DE POINT FIXE ET APPLICATIONS”  
“À LA DÉCOUVERTE DES LOIS DE CONSERVATION SCALAIRE NON-LINÉAIRES”
- 2009/2010 : 2 groupes sur les sujets suivants  
“SYSTÈMES DYNAMIQUES : MODÈLES ET MÉTHODES”  
“À LA DÉCOUVERTE DES LOIS DE CONSERVATION SCALAIRE NON-LINÉAIRES”
- 2010/2011 : 1 groupe sur le sujet suivant  
“ONDES SUR LA MER”
- **Bilan** : Sur les 16 étudiants que j’ai encadrés en TER :
  - 6 ont poursuivi en M2 Recherche “EDP et Calcul Scientifique” à Marseille, puis en thèse (dont 2 sous ma direction : F. Nabet et G. Olive).
  - 2 ont poursuivi dans un autre M2 recherche.
  - 1 a intégré l’ENS Cachan Bretagne (concours 3A 2011) et envisage de poursuivre en M2 Recherche EDP.

<sup>4</sup>Page WEB de ce module : <http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/Agreg/>

————— Encadrement de stages de Master 2 —————

- Mars/Septembre 2007 : **Stage de M2 Recherche de Sebastian Minjeaud**

“RAFFINEMENT LOCAL ADAPTATIF ET MÉTHODES MULTINIVEAUX”

Ce stage a eu lieu à l’Institut de Radioprotection de Sûreté Nucléaire avec comme tuteur IRSN : B. Piar.  
Ce stage a donné lieu à une poursuite en thèse.

- Février/Juillet 2007 : **Stage de M2 Recherche de Stella (Katrin) Krell**

“MISE EN OEUVRE EFFICACE DES MÉTHODES DE VOLUMES FINIS EN DUALITÉ DISCRÈTE”

Ce stage a été co-encadré par F. Hubert (LATP) et a donné lieu a une poursuite en thèse.

- Mars/Juillet 2010 : **Stage de M2 Recherche de Guillaume Olive**

“SUR LA CONTROLLABILITÉ DES SYSTÈMES PARABOLIQUES”

Ce stage a été co-encadré par A. Benabdallah (LATP) et a donné lieu à une poursuite en thèse.

- Mars/Juillet 2011 : **Stage de M2 Recherche de Flore Nabet**

“STABILITÉ INF-SUP POUR DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR LE PROBLÈME DE STOKES”

Ce stage a donné lieu à une poursuite en thèse.

————— Jury de concours —————

- 2006/2011 : Membre du jury de l’agrégation externe de Mathématiques. Responsable de l’option B “Calcul scientifique” de l’épreuve de modélisation (en collaboration avec T. Goudon).

Ce travail a consisté à superviser la rédaction/relecture/mise en place des textes proposés aux candidats, à veiller au bon déroulement de l’épreuve durant le concours (harmonisation de la notation notamment), à contribuer à la rédaction du rapport du concours.

## ACTIVITÉS D'INTÉRÊT GÉNÉRAL

### ———— Nationales ————

- Membre élu du CNU 26<sup>ième</sup> section (2003 / 2007).
- Expert pour l'ANR en 2009 et 2012.

### ———— Locales ————

- Depuis Janvier 2012 : Président de la commission informatique du LATP.
- Membre élu du conseil scientifique de l'université Paul Cézanne (2008-2011).  
En tant que membre du CS, j'ai notamment été en charge de la constitution des comités de sélection pour les postes en section 26, j'ai été membre de la commission *ad hoc* d'évaluation des enseignants-chercheurs en vue de l'avancement local.  
Mon mandat s'est arrêté au moment de la fusion des universités marseillaises, le 1er janvier 2012.
- Membre élu du conseil de laboratoire du LATP (2004-2009).
  
- Président du comité de sélection de l'université d'Aix-Marseille pour 1 poste de MCF "Analyse Numérique et Calcul Scientifique" en 2012.
- Membre du comité de sélection de l'université d'Aix-Marseille sur 1 poste de MCF "Modélisation, EDP, Analyse Numérique" en 2012.
- Membre des comités de sélection de l'université Paul Cézanne (1 poste PR) et de l'université Toulouse 3 (2 postes PR) en 2011.
- Membre des comités de sélection de l'université de Lille 1 (1 poste MCF et 1 poste PR) et de l'université Paul Cézanne (1 poste MCF) en 2010.
- Membre des comités de sélection de l'université de Lyon 1 (1 poste PR) et de Lille 1 (1 poste MCF et 1 poste PR) en 2009.
- Président du comité de sélection de l'université Paul Cézanne (1 poste MCF) en 2009.
- Président du comité de sélection de l'université Paul Cézanne (1 poste MCF) en 2008.
- Membre titulaire de la commission de spécialistes 26<sup>ième</sup> section de l'Université de Provence (2004 / 2007).
- Membre titulaire de la commission de spécialistes 26<sup>ième</sup> section de l'Université Montpellier 2, (2004 / 2007).
  
- Responsable du Séminaire d'Analyse Appliquée du LATP (Octobre 2003 / Janvier 2006).
- Membre du comité de Bibliothèque du CMI de 2002 à 2007.
- Membre de la commission "Acquisitions" de la bibliothèque du CIRM depuis 2010.

## COMPÉTENCES INFORMATIQUES

- Systèmes d'exploitation : Maîtrise de Linux et systèmes Unix
- Langages de programmation :
  - C, C++, FORTRAN 90/95. Librairies MPI
  - Librairies d'algèbre linéaire : BLAS, LAPACK, UMFPACK
- Outils scientifiques :
  - MATLAB, SCILAB, MAPLE
  - Maillages EMC2, gmsh
  - Outil de visualisation GMV, Visit, gnuplot
  - Outils de gestion de versions CVS, subversion
- Programmation WEB et bases de données : HTML, PHP, MySQL

# Production scientifique détaillée

Math Reviews Author ID : 650574

## LIVRES

- [1] F. Boyer, P. Fabrie : *Elements d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, Coll. Mathématiques et Applications, Vol. 52, Springer, 405 p. (2006).
- [2] F. Boyer, P. Fabrie : *Mathematical tools for the study of the Navier-Stokes equations*, à paraître, Coll. Applied Mathematical Sciences, Springer, ~550 p. (2012).

## ARTICLES PARUS OU ACCEPTÉS DANS DES REVUES À COMITÉ DE LECTURE

- [3] F. Boyer : *Mathematical study of multiphase flow under shear through order parameter formulation*, Asymptotic Analysis Vol. 20 no 2, pp 175-212 (1999).
- [4] F. Boyer : *Nonhomogeneous Cahn-Hilliard fluids*, Annales de l'IHP : Analyse non linéaire, Vol. 18 no 2, pp 225-259 (2001).
- [5] F. Boyer : *A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows*, Computers and Fluids Vol. 31 no 1, pp 41-68 (2002).
- [6] F. Boyer, P. Fabrie : *Persistence of 2D perturbations of 1D solutions for a Cahn-Hilliard flow model under high shear*, Asymptotic Analysis Vol. 33 no 2, pp 107-151 (2003).
- [7] F. Boyer, L. Chupin, P. Fabrie : *Study of visco-elastic mixtures through a Cahn-Hilliard flow model*, European Journal of Mechanics - B Fluids, Vol. 23 no 5, pp 759-780 (2004).
- [8] B. Andreianov, F. Boyer, F. Hubert : *Finite-volume schemes for the  $p$ -laplacian on cartesian meshes*, M<sup>2</sup>AN, Vol. 38, no 6, pp. 931-959 (2004).
- [9] B. Andreianov, F. Boyer, F. Hubert : *Besov regularity and new error estimates for finite volume approximations of the  $p$ -laplacian*, Numerische Mathematik, Vol. 100, no 4, pp. 565-592 (2005).
- [10] F. Boyer : *Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation*, Differential and Integral Equations, Vol. 18, no 8, pp 891-934 (2005).
- [11] B. Andreianov, F. Boyer, F. Hubert : *On the finite volume approximation of regular solutions of the  $p$ -laplacian*, IMA Journal on Numerical Analysis, Vol. 26, N°3, pp. 472-502 (2006).
- [12] F. Boyer, C. Lapuerta : *Study of a three component Cahn-Hilliard flow model*, M<sup>2</sup>AN, Vol. 40 no.4, pp. 653-687, (2006).
- [13] B. Andreianov, F. Boyer, F. Hubert : *Discrete duality finite volume schemes for Leray-Lions type elliptic problems on general 2D meshes*, Numerical Methods for PDEs, Vol. 23, N°1, pp. 145-195, (2007).
- [14] B. Andreianov, F. Boyer, F. Hubert : *Discrete Besov framework for finite volume approximation of the  $p$ -laplacian on non-uniform cartesian grids*, ESAIM Proceedings, Vol. 18, pp 1-10, (2007).
- [15] F. Boyer, P. Fabrie : *Outflow boundary conditions for the incompressible non-homogeneous Navier-Stokes equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - B, Vol. 7, N°2, pp. 219-250, (2007).
- [16] F. Boyer, F. Hubert : *Finite volume methods for linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 46, N°6, pp. 3032-3070, (2008).
- [17] P. Angot, F. Boyer, F. Hubert : *Asymptotic and numerical modelling of flows in fractured porous media*, M<sup>2</sup>AN, Vol. 43 no 2, pp. 239-275, (2009).
- [18] F. Boyer, C. Lapuerta, S. Minjeaud, B. Piar : *A multigrid method with local adaptive refinement, application to a ternary Cahn-Hilliard model*, ESAIM Proceedings, Vol. 27, pp. 15-53, (2009).
- [19] F. Boyer, F. Hubert, S. Krell : *A non-overlapping Schwarz algorithm for solving 2D  $m$ -DDFV schemes*, IMA Journal on Numerical Analysis, Vol. 30 no 4, pp. 1062-1100, (2010).
- [20] F. Boyer, C. Lapuerta, S. Minjeaud, B. Piar, M. Quintard : *Cahn-Hilliard / Navier-Stokes model for the simulation of three-phase flows*, Transport in Porous Media, Volume 82, Issue 3, pp. 463-483, (2010).
- [21] F. Boyer, F. Hubert, J. Le Rousseau : *Discrete Carleman estimates for elliptic equations and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 93, pp. 240-273, (2010).

- [22] F. Boyer, F. Hubert, J. Le Rousseau : *Discrete Carleman estimates for elliptic operators in arbitrary dimension and applications*, SIAM J. on Control and Optimization, vol. 48, No 8, pp 5357–5397 (2010).
- [23] F. Boyer, S. Minjeaud : *Numerical schemes for a three component Cahn-Hilliard model*, M<sup>2</sup>AN, vol. 45, No 4, pp. 697-738, (2011).
- [24] F. Boyer, F. Hubert, J. Le Rousseau : *Uniform null-controllability properties for space/time-discretized parabolic equations*, Numerische Mathematik, vol. 118, No 4, pp. 601-661 (2011).
- [25] F. Boyer : *Analysis of the upwind finite volume method for general initial and boundary value transport problems*, IMA Journal on Numerical Analysis, DOI:10.1093/imanum/drr031, 34 pages (2011).

### ARTICLES SOUMIS DANS DES REVUES À COMITÉ DE LECTURE

- [26] F. Boyer, F. Dardalhon, C. Lapuerta, J.C. Latché : *Stability of a Crank-Nicolson pressure correction scheme based on staggered discretizations*, soumis, 33 pages (2011).
- [27] F. Boyer, J. Le Rousseau : *Carleman estimates for semi-discrete parabolic operators and application to the controllability of semi-linear semi-discrete parabolic equations*, soumis, 40 pages (2012).

### ARTICLES EN PRÉPARATION

- [28] F. Boyer, S. Krell, F. Nabet : *Inf-Sup stability of the Discrete Duality Finite Volume scheme for the Stokes problem*, en préparation, (2012).
- [29] F. Boyer, S. Minjeaud : *Consistent hierarchy of n-components Cahn-Hilliard systems*, en préparation, (2012).

### MÉMOIRES

- [30] F. Boyer : *Ecoulements diphasiques de type Cahn-Hilliard*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, (2001), [http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/these\\_fboyer.pdf](http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/these_fboyer.pdf)
- [31] F. Boyer : *Modélisation, Analyse et Approximation numérique en mécanique des fluides*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Provence, (2006), [http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/hdr\\_fboyer.pdf](http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/hdr_fboyer.pdf)

### ACTES DE CONGRÈS

————— Congrès internationaux avec comité de lecture —————

- [32] F. Boyer : *Theoretical and numerical study of multiphase flows through order parameter formulation*, EQUADIFF 99, International Conference on Differential Equations, Berlin, 1999, Ed. B. Fiedler, K. Gröger & J. Sprekels, Vol. 1, pp 488-490, World Scientific.
- [33] B. Andreianov, F. Boyer, F. Hubert : *"Duplex" finite-volume schemes for nonlinear elliptic problems on general 2D meshes*, Finite Volumes for Complex Applications IV, Marrakech, pp. 365–376, Ed. F. Benkhaldoun, D. Ouazar & S. Raghy, Hermes Science (2005).
- [34] P. Angot, F. Boyer, F. Hubert : *Numerical modeling of flow in fractured porous media*, Finite Volumes for Complex Applications IV, Marrakech, pp. 249–260, Ed. F. Benkhaldoun, D. Ouazar & S. Raghy, Hermes Science (2005).

---

<sup>0</sup>Tous les articles et les mémoires sont disponibles sur ma page WEB : <http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer>

- [35] F. Boyer, C. Lapuerta : *A diffuse interface model for the numerical simulation of three-component flows*, Finite Volumes for Complex Applications IV, Marrakech, pp 153–162, Ed. F. Benkhaldoun, D. Ouazar & S. Raghay, Hermes Science (2005).
- [36] F. Boyer, F. Hubert : *Finite volume method for nonlinear transmission problems*, 17th International Conference on Domain Decomposition Methods, St. Wolfgang/Strobl, Austria (2006).
- [37] F. Boyer, F. Hubert, S. Krell : *Non-overlapping Schwarz algorithm for DDFV schemes on general 2D schemes*, Finite Volume for Complex Applications V, Aussois, (2008),
- [38] F. Boyer, F. Hubert : *The m-DDFV method for heterogeneous linear and nonlinear elliptic problems*, Finite Volume for Complex Applications V, Aussois, (2008),
- [39] F. Boyer, F. Hubert : *Benchmark for Anisotropic Problems. The DDFV "discrete duality finite volumes" and m-DDFV schemes*, Finite Volume for Complex Applications V, Aussois, (2008),
- [40] F. Boyer, F. Hubert, J. Le Rousseau : *On the approximation of the null-controllability problem for parabolic equations*, Proceedings of ALGORITMY 2009, 18th Conference on Scientific Computing, Vysoké Tatry, Podbanske, Slovakia, (2009).
- [41] F. Boyer, F. Dardalhon, C. Lapuerta, J.C. Latché : *A Low Degree Non-Conforming Approximation of the Steady Stokes Problem with an Eddy Viscosity*, Proceedings of the sixth international symposium on Finite Volume for Complex Applications, Prague, Czech republic, p. 165-173, DOI:10.1007/978-3-642-20671-9\_18 (2011).
- [42] F. Boyer : *Convergence analysis of the upwind finite volume scheme for general transport problems*, Proceedings of the sixth international symposium on Finite Volume for Complex Applications, Prague, Czech republic, p. 155-1-163, DOI:10.1007/978-3-642-20671-9\_17 (2011).

————— Congrès nationaux avec comité de lecture —————

- [43] F. Boyer, L. Chupin : *Etude numérique de mélanges viscoélastiques*, Congrès d'Analyse Numérique (2003).
- [44] C. Lapuerta, F. Boyer, B. Piar, M. Quintard, P. Angot : *Un modèle de Navier-Stokes / Cahn-Hilliard pour la simulation d'écoulements incompressibles de trois phases non miscibles*, Congrès Français de Mécanique, Troyes (2005).
- [45] F. Boyer, C. Lapuerta, B. Piar : *Simulation Cahn-Hilliard/Navier-Stokes du passage d'une bulle à travers d'une interface liquide/liquide*, soumis, Congrès Français de Mécanique, Grenoble (2007).

## EXPOSÉS<sup>1</sup>

————— Conférences invitées récentes et à venir —————

- Janvier 2008 : Conférencier invité au 20ième séminaire “Mécanique des fluides numérique” du CEA-GAMNI.  
<http://www-mecaflu.cea.fr/>
- Mars 2008 : Conférencier invité à la conférence “Numerical analysis and computation of fluid flows”, Calais.  
<http://www-lmpa.univ-littoral.fr/~deuring/an-num-cfd.html>
- Août 2008 : Conférencier invité à l'école thématique “Challenges en mathématiques appliquées sur des problématiques en physique des lasers, mécanique des fluides multiphasiques, stockage des déchets nucléaires et physique des plasmas”, Roscoff.  
<http://chant.univ-rennes1.fr/roscoff08.html>
- Août 2009 : Conférencier invité (cours de 6h) à l'école d'été du GDR MOAD à Fréjus.  
<http://math.unice.fr/~sdescomb/MOAD/Frejus.html>
- Mars 2010 : Cours (avec TP) lors des journées Numériques à Lille.  
<https://rn10vf.lille.inria.fr/>

---

<sup>4</sup>Les transparents correspondant à ces exposés sont, pour la plupart, disponibles sur ma page WEB personnelle

- Juin 2010 : Conférencier invité (7h de cours) à l'école d'été "milieux poreux" à Tipaza, Algérie.  
<http://lem2i.ens-kouba.dz/ecole.htm>
- Novembre 2010 : Conférencier invité au "Workshop on Control of Parabolic Equations and systems. Applications to fluids", Institut Henri Poincaré, Paris.  
<http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/lerousseau/IHP10-Workshop3/>
- Février 2011 : Conférencier invité au colloque "Phase field models in fluid mechanics and related topics", Ratisbone, Allemagne  
[http://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat\\_Fak\\_I/Mat8/1st/workshop2011/](http://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat_Fak_I/Mat8/1st/workshop2011/)
- Juin 2011 : Conférencier invité au colloque "New Trends in Analysis and Control of Nonlinear PDEs", Rome, Italie.  
<http://events.math.unipd.it/ntacpde11/>
- Novembre 2011 : Conférencier invité au colloque "Level-Set, Champs de phases : théorie et applications", GDR CHANT, Grenoble.  
[http://www-ljk.imag.fr/membres/CHANT/consultation.php?INFO=CHANT2011\\_3](http://www-ljk.imag.fr/membres/CHANT/consultation.php?INFO=CHANT2011_3)
- Février 2012 : Conférencier invité au colloque "Two-Phase Fluid Flows. Modeling and Computational Methods", Paris.  
<http://philippelefloch.wordpress.com/2011/12/08/workshop-2012/>
- Mai 2012 : Conférencier invité au 41ième Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM 2012), Superbesse.  
<http://smai.emath.fr/canum2012/>
- Juillet 2012 : Conférencier invité dans deux "Special sessions" de la 9ième Conférence AIMS "Dynamical Systems, Differential Equations and Applications", Orlando, USA.  
<http://aimsciences.org/conferences/2012/index.html>  
SS 2 : "Nonlinear Evolution PDEs and Interfaces in Applied Sciences",  
Organisateurs : G. Caginalp, M. Grasselli, A. Miranville  
SS 34 : "Multi-phase Flows in Porous Media and Related Systems",  
Organisateurs : D. Ambrose, X. Wang, S. Wise
- Septembre 2012 : Conférencier invité à la conférence ADMAT2012 : "PDEs for advanced materials", Cortona, Italie.  
<http://www-dimat.unipv.it/pier/admat2012.html>
- Mars 2013 : Invitation au Workshop "Interfaces and Free Boundaries: Analysis, Control and Simulation", Oberwolfach, Allemagne.  
[http://www.mfo.de/occasion/1313/www\\_view](http://www.mfo.de/occasion/1313/www_view)

## ———— Séminaires nationaux récents et à venir ————

- Janvier 2005 : Séminaire Analyse Appliquée, Marseille.
- Janvier 2005 : Séminaire ACSIOM, Montpellier.
- Février 2005 : Séminaire LMC, Grenoble.
- Mars 2005 : Groupe de Travail Numérique, Orsay.
- Mai 2005 : 2ième congrès national de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI 2005), Evian.
- Octobre 2005 : Séminaire EDP, Clermont-Ferrand.
- Novembre 2005 : Séminaire du Laboratoire de Mécanique et Acoustique, Marseille.
- Juin 2006 : Poster au CANUM 2006, Guidel.
- Décembre 2006 : Séminaire MAPMO, Orléans.
- Décembre 2006 : Séminaire d'Analyse Numérique, Besançon.
- Janvier 2007 : Séminaire MMCS, Institut Camille Jordan, Lyon.
- Mars 2007 : Séminaire Laboratoire Jean Dieudonné, Nice.
- Avril 2007 : Groupe de Travail "Mécanique des Fluides", INSA de Toulouse.
- Janvier 2009 : Séminaire "Analyse Numérique et EDP", Université Paris-Sud, Orsay.
- Janvier 2009 : Séminaire Analyse Appliquée, Marseille.
- Avril 2009 : Séminaire EDP du Laboratoire LJK à Grenoble.
- Juin 2009 : Exposé lors d'une journée thématique organisée au MAPMO à Orléans.
- Février 2010 : Séminaire MIP à Toulouse.
- Février 2010 : Séminaire EDP et Modélisation à Lyon 1.
- Mars 2010 : Séminaire EDP à Clermont-Ferrand.
- Mai 2010 : Séminaire Calcul et Modélisation à Bordeaux.
- Mars 2011 : Séminaire EDP à l'université de Metz.
- Janvier 2012 : Séminaire MIP à Toulouse.
- Mars 2012 : Séminaire EDP à Nice.

## ———— Divers ————

- Janvier 2007 : Exposé d'introduction aux problèmes de modélisation et de calcul scientifique à destination des professeurs de Lycées dans le cadre de rencontres entre les enseignants-chercheurs du LATP et des professeurs du secondaire.

["De la modélisation à la simulation numérique. Illustrations sur un exemple simple mais instructif"](#)

- Décembre 2010 : Exposé dans le cadre des TIPE devant les élèves de terminale et de classes préparatoires du Lycée militaire d'Aix-en-Provence.

["A propos du contrôle et de l'optimisation de trajectoire"](#)

# Principales contributions scientifiques

Modélisation et simulation en mécanique des fluides multiphasiques

5 articles parus, 1 en préparation

- Etablissement et étude théorique de “bons modèles à interface diffuse” (*phase-field models*) pour les écoulements multiphasiques.

Cette activité a commencé durant ma thèse ([5]) où j’ai établi et étudié des modèles diphasiques de type Cahn-Hilliard / Navier-Stokes. Plus récemment, suite à des besoins industriels de mes collaborateurs de l’IRSN (Institut de Radioprotection et Sûreté Nucléaire) j’ai été amené à étudier des extensions de ces modèles à des écoulements à  $n$ -phases.

Ainsi dès le cas de  $n = 3$  phases (voir [12]), on aboutit sur des difficultés de modélisation nouvelles. Les tentatives de telles généralisations disponibles dans la littérature à cette époque souffraient de différents défauts:

- Ils pouvaient dépendre de la numérotation choisie pour les différentes phases (erreur de symétrie du modèle).
- Ils pouvaient ne pas être en mesure de capturer les écoulements à 2 phases, engendrant ainsi l’apparition non-physique d’une phase dans l’interface entre les deux autres lors d’un calcul (erreur de consistance du modèle)
- Les paramètres physiques objectifs (telles les tensions de surface) pouvaient ne pas être définis de façon explicite dans les modèles.

Avec C. Lapuerta, nous avons identifié les origines de ces défauts et proposé une méthode de dérivation du modèle de Cahn-Hilliard trois phases, à partir du modèle deux phases, qui ne souffre d’aucun des défauts ci-dessus. La notion centrale que nous avons dégagée est celle de **consistance**. On montre que l’on peut construire une famille de modèles consistants, bien posés et possédant de bonnes propriétés de stabilité.

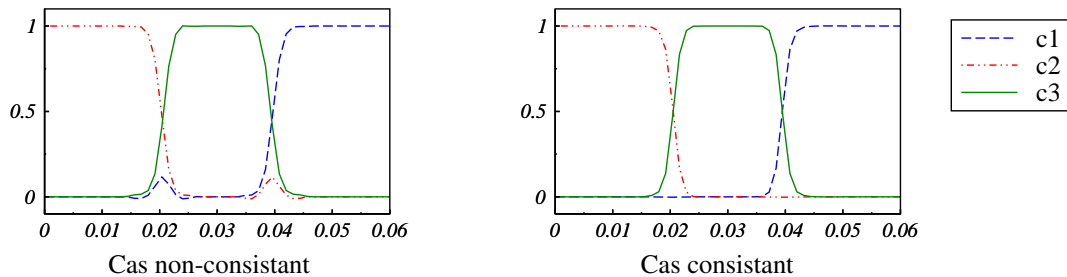


Figure 1: Comparaison entre les modèles consistants et non-consistants

Une fois introduit dans un modèle couplé avec l’hydrodynamique, on aboutit à un modèle complet pour les écoulements triphasiques incompressibles avec tension de surface. Ces modèles sont typiquement utilisés dans des contextes de forts contrastes de densité et de viscosité (bulles d’air / liquides lourds) ce qui explique l’importance de la propriété de consistance. Par exemple, la densité totale du fluide est calculée en tout point de l’espace par une moyenne des masses volumiques des phases pondérée par les paramètres d’ordre. Ainsi la présence non-physique de quelques pourcents de l’une des phases dans une interface peut modifier de façon très importante cette masse volumique

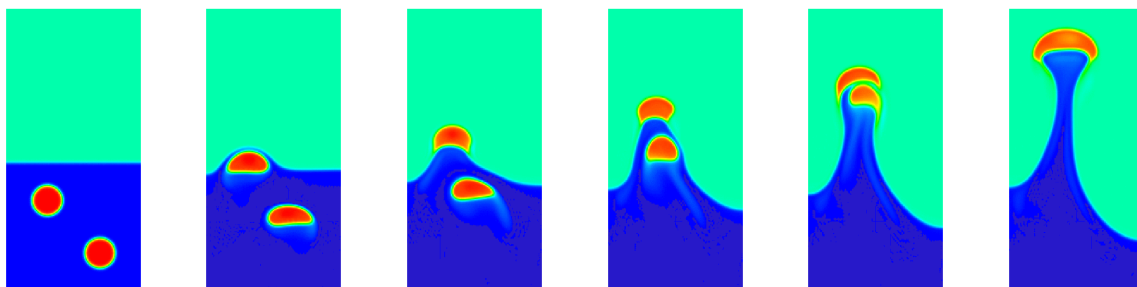


Figure 2: Exemple de montée de bulles à travers une interface liquide/liquide avec coalescence et entrainement du liquide lourd

Dans un travail en cours [29], avec S. Minjeaud, nous généralisons cette approche au cas  $n > 3$ . De nouvelles difficultés apparaissent, en particulier dans le choix d'un bon ansatz pour l'énergie libre de Cahn-Hilliard du modèle. In fine, nous aboutissons à une hiérarchie complète de modèles  $n$ -phases possédant deux à deux les bonnes propriétés de consistance.

Les premiers résultats sont encourageants. La figure 3 montre un exemple de calcul avec les modèles 4 phases consistant et non-consistant. La donnée initiale est purement triphasique (i.e.  $c_3(t = 0) = 0$ ) et on voit que le modèle non consistant produit des instabilités du paramètre  $c_3$ , il est donc incapable de rendre compte de situations 3 phases de façon fidèle.

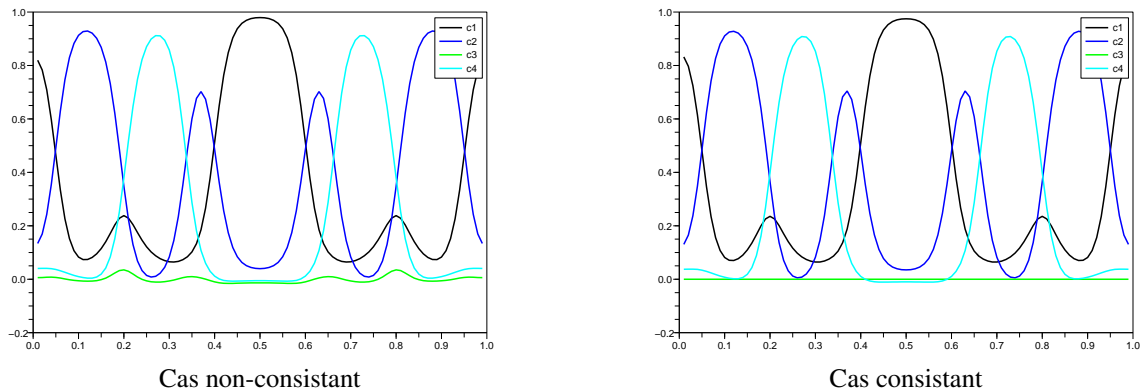


Figure 3: Calculs 4 phases

- Mise au point de méthodes numériques performantes pour ces modèles

En complément de l'étude théorique des modèles présentés ci-dessus, je me suis naturellement intéressé aux problèmes numériques liés à l'utilisation de cette approche. Cela a fait l'objet d'une collaboration suivie avec l'IRSN, concrétisée par 2 thèses soutenues (C. Lapuerta 2006, S. Minjeaud 2010) et par un contrat d'accompagnement.

Les points que nous avons en particulier abordés sont les suivants.

- Schémas en temps : Les modèles de Cahn-Hilliard que nous avons construits et utilisés sont des systèmes raides (présence de termes en  $1/\epsilon$ ) de type gradient. A ce titre le choix d'une bonne méthode de discrétisation en temps est crucial. Le schéma le plus naturel, totalement implicite, ne s'avère utilisable que pour des pas de temps très petits, ce qui contraint fortement son intérêt. A contrario, les schémas basés sur une décomposition convexe-concave du potentiel sont très robustes mais également très imprécis. Nous avons donc proposé et analysé dans [23] des schémas de type semi-implicites présentant un bon compromis entre robustesse et précision.

- Raffinement local adaptatif et solveurs multigrilles : La structure particulière des solutions attendues (l'essentiel de la difficulté numérique est localisée dans les interfaces) incite naturellement à proposer des méthodes adaptatives de résolution en espace.

Nous avons proposé d'utiliser la méthode CHARMS (Conforming Hierarchical Adaptive Refinement Method) dont le principe consiste à construire des espaces d'approximation multiniveaux **conformes** en (dé-)raffinant des fonctions de base plutôt que des éléments géométriques. Notre contribution (voir [18]) a consisté à poser des bases théoriques propres sur cette méthode et à montrer qu'elle pouvait s'appliquer efficacement aux modèles phase-field.

Les espaces multiniveaux ainsi créés à chaque pas de temps permettent de disposer d'une structure hiérarchique d'espaces d'approximation obtenus par des déraffinements uniformes successifs de chaque niveau de raffinement. Il est ensuite aisé de mettre en place un solveur/préconditionneur multigrilles sur cette base.

- Conditions aux limites : Dans un travail non encore publié en collaboration avec C. Introïni, F. Duval, J.C. Latché et B. Piar (qui a seulement fait l'objet d'une communication dans un congrès), nous avons travaillé sur la mise en place de conditions aux limites artificielles en sortie d'un écoulement multiphasique.

L'idée initiale est de pouvoir simuler dans un domaine fini le comportement d'un flux de bulles. Il faut donc prescrire des conditions aux limites en sortie du domaine qui "laisse les bulles sortir" avec un minimum d'influence sur l'écoulement.

Dans le cas d'une vitesse de convection  $u^*$  fixée dans le système de CH, la première idée consiste à remplacer la condition de Neuman habituelle sur les paramètres d'ordre par une formule du type

$$\nabla c_i \cdot n = -\frac{1}{(u^* \cdot n)^+} \frac{\partial c_i}{\partial t}.$$

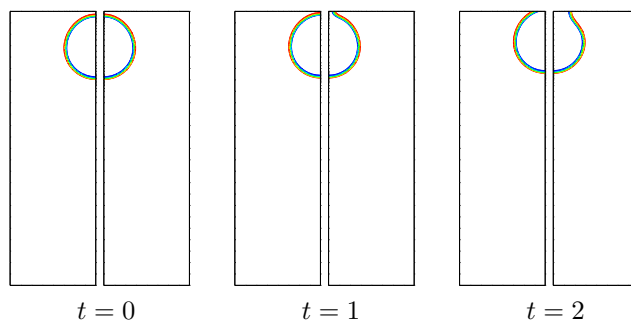


Figure 4: Modèle de Cahn-Hilliard avec vitesse de convection imposée : Neumann BC (gauche) / Improved BC (droite)

En sortie du domaine, la partie normale de la vitesse de convection est non nulle ce qui donne un sens à cette condition aux limites. La figure 4 montre le gain apporté par cette approche (partie gauche / partie droite de chaque image).

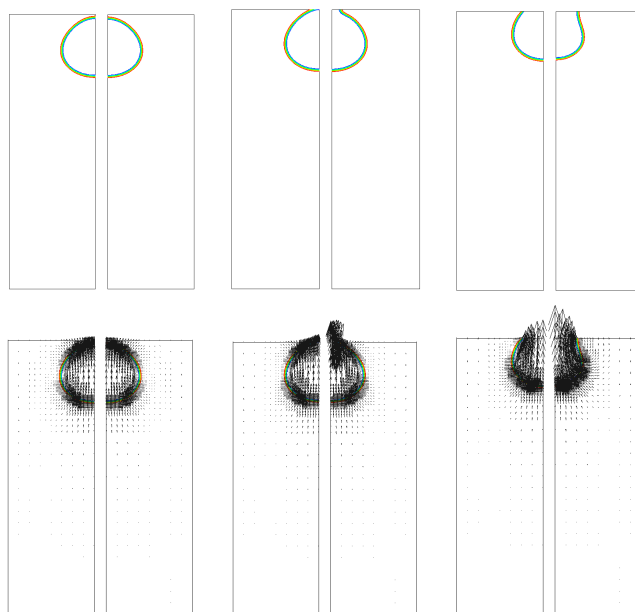


Figure 5: Modèle couplé CH / NS : Adapted outflow BC (gauche) / Standard BC (droite)

Dans le cas du modèle complet, on reprend l'idée précédente mais cette fois le champ  $u^*$  n'est pas fixé et il est remplacé par le champ d'advection calculé à l'instant  $n$ .

Pour la partie Navier-Stokes du système, on propose d'abord de précalculer une pression capillaire en sortie

$$\sqrt{\rho^{n+1}\rho^n} \frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} + \nabla p_{\text{cap}}^{n+1} = \mathcal{F}_{\text{cap}}^{n+1},$$

$$\text{div} \tilde{u} = \text{div} u^n,$$

où  $\mathcal{F}_{\text{cap}}^{n+1}$  contient les termes de couplage capillaire. On applique alors les conditions aux limites transparentes de Bruneau et Fabrie (voir plus loin) à la partie dynamique de la pression, c'est-à-dire au système de NS sans les termes capillaires.

Les résultats sont présentés dans la figure 5. On observe une très importante diminution de l'effet d'aspiration de la bulle que l'on peut observer quand on utilise des conditions aux limites non adaptées.

- Schéma découplé inconditionnellement stable pour le système complet : Dans un article issu de sa thèse (et dont je ne suis pas co-auteur), S. Minjeaud a trouvé un schéma de splitting en temps pour le système complet Cahn-Hilliard / Navier-Stokes qui possède toutes les bonnes propriétés:

- \* Découplage total des deux systèmes.
- \* Conservation exacte du volume des phases.
- \* Préservation de la symétrie des équations par rapport à la numérotation des phases.
- \* Couplage possible avec la méthode de projection incrémentale.
- \* Stabilité inconditionnelle.

\* Convergence en temps et espace (pour l'instant cette preuve n'a été faite que dans le cas de fluides de mêmes densité).

En conclusion, l'ensemble de ces travaux a jeté des bases théoriques et numériques solides pour l'utilisation de modèles phase-field dans des codes de simulation numérique directe d'écoulement multiphasiques incompressibles 2D et 3D.

J'ai été invité à exposer l'ensemble de ces travaux dans diverses conférences/workshops internationaux. L'exemple le plus récent est l'exposé que j'ai donné dans le cadre du workshop franco-allemand "Two-phase fluid flows. Modeling and computational methods" qui est disponible à l'adresse suivante

<http://philippelefloch.files.wordpress.com/2012/02/2012-february-frank-boyer.pdf>

Une thèse en cours à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (en collaboration avec l'IRSN) et dont je ne suis pas co-directeur, a pour objectif de mener de nombreuses comparaisons entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques obtenus par cette approche mais aussi par des approches différentes (de type level-set). Ces résultats sont très intéressants car ils montrent les points de satisfaction de la démarche proposée mais aussi les points de faiblesse qu'il va être nécessaire de travailler dans l'avenir.

• Etude des modèles de champ de phase

Ces travaux, essentiellement issus de ma thèse ([3],[4],[6],[7]) concerne l'étude théorique des modèles d'écoulements multiphasiques couplant les équations de Navier-Stokes et les systèmes de Cahn-Hilliard. On montre des résultats d'existence, unicité, de stabilité et divers comportements qualitatifs.

J'ai en particulier obtenu dans [4] le premier résultat d'existence de solutions de ce type de modèles dans le cas où les densités des deux phases ne sont pas égales. Plus précisément, le résultat concerne le cas où le contraste de densité est faible et, à ma connaissance, le cas général n'a toujours pas été résolu à ce jour.

• Problème des traces pour l'équation de transport

Dans l'article [10], je me suis intéressé à la problématique de la résolution de l'équation de transport-réaction linéaire

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) + c\rho = f, \tag{1}$$

dans un domaine borné de l'espace, dans le cas où le champ de vitesse  $v$  satisfait des hypothèses de régularité minimales et n'est pas tangent au bord du domaine. Plus précisément, dans l'article mentionné ci-dessus j'ai considéré seulement le cas  $c = \operatorname{div} v = 0$  mais l'extension d'une partie des résultats à ce cadre un peu plus général est proposée dans le livre [2] (voir plus loin).

Il s'agit donc de supposer que  $v$  a seulement une régularité de type Sobolev (ce qui est par exemple le cas si ce champ de vitesse est lui-même donné par une EDP, par exemple par le bilan de quantité de mouvement dans Navier-Stokes) ce qui exclut l'utilisation de la méthode des caractéristiques.

Dans le cas d'un champ tangent au bord du domaine et avec de bonnes hypothèses sur la divergence de  $v$ , la théorie des solutions renormalisées de DiPerna-Lions (1989) répond à la plupart des questions que l'on peut se poser sur ce problème : existence, unicité, stabilité de la solution faible associée à une donnée initiale (dans  $L^p(\Omega)$  par exemple). Mon travail a consisté à généraliser cette théorie pour le problème au bord. Cela nécessite plusieurs étapes:

- Preuve d'un théorème de traces pour les solutions faibles du problème : On montre, sous des hypothèses minimales sur  $v$  et  $c$ , que **toute** solution faible de l'équation admet une trace en un sens faible et que cette trace satisfait elle aussi la propriété de renormalisation que l'on pourrait résumer en la phrase suivante : le carré de la trace d'une solution est égal à la trace du carré de la solution. Cette propriété, triviale sur les solutions régulières, est beaucoup plus difficile à établir pour les solutions faibles et se trouve être à la base de toute la théorie qui s'en suit.
- Résolution du problème de Cauchy-Dirichlet pour le transport dans le cas  $L^\infty$  : Pour toute donnée initiale  $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$  et toute donnée au bord bornée  $\rho^{in}$ , on montre qu'il existe une unique solution faible  $\rho$  du problème vérifiant

$$\rho(0) = \rho_0, \text{ et } \rho = \rho^{in}, \text{ là où } (v \cdot n) < 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \partial\Omega.$$

Au passage, on étudie l'approximation visqueuse suivante de ce problème

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\epsilon + \operatorname{div}(\rho_\epsilon v) + c\rho_\epsilon - \epsilon \Delta \rho_\epsilon = f, \\ \rho_\epsilon(0) = \rho_0, \\ \epsilon \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial n} + (\rho_\epsilon - \rho^{in})(v \cdot n)^- = 0. \end{cases}$$

On démontre la convergence uniforme en temps de la solution  $\rho_\epsilon$  vers la solution faible  $\rho$  dans tous les espaces  $\mathcal{C}^0([0, T], L^p(\Omega))$ .

- Caractérisation des espaces de trace dans le cas  $L^p$  : Pour des solutions faibles  $L^\infty(]0, T[, L^p(\Omega))$  avec  $p < +\infty$ , on sait depuis les travaux de Bardos que la trace d'une telle solution peut ne pas appartenir à l'espace  $L^p(]0, T[ \times \partial\Omega, |v \cdot n| dt dx)$  contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer. On doit alors définir et analyser la notion de *temps de vie* dans  $\Omega$ , noté  $\tau$ , qui mesure le temps que mettrait une trajectoire issue du bord à ressortir du domaine. Cette définition doit être précisée car nous ne sommes pas dans un contexte permettant de définir *a priori*, la notion de trajectoire du système. On prouve alors que la trace de solutions  $L^\infty(]0, T[, L^p(\Omega))$  appartient à l'espace  $L^p(]0, T[ \times \partial\Omega, \tau |v \cdot n| dt dx)$ , et on peut alors construire la théorie d'existence et unicité du problème de Cauchy-Dirichlet associée.
- Stabilité par rapport au champ de vitesse :

On montre également un résultat de stabilité qui concerne les solutions  $(\rho_k)_k$  et leurs traces  $(\gamma \rho_k)_k$  du problème

$$\begin{cases} \partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k v_k) + c_k \rho_k = 0, \\ \rho_k(0) = \rho_0, \\ \rho_k = \rho^{in}, \text{ où } (v_k \cdot n) < 0. \end{cases}$$

Ainsi, en supposant seulement que  $v_k, v \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$ ,  $c_k, c \in L^1(]0, T[ \times \Omega)$  et que

$$c_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} c, \text{ dans } L^1 \text{ fort,}$$

$$v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v, \text{ dans } L^1 \text{ fort,}$$

$$v_k \cdot n \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v \cdot n, \text{ dans } L^1(]0, T[ \times \partial\Omega) \text{ fort,}$$

alors on montre que la suite  $(\rho_k)_k$  converge vers la solution limite  $\rho$  dans  $C^0([0, T], L^p(\Omega))$  pour tout  $p < +\infty$  et que la suite des traces  $(\gamma\rho_k)_k$  converge vers  $\gamma\rho$  dans  $L^p(]0, T[ \times \partial\Omega, |v \cdot n| dt dx)$ .

Il est important de noter qu'on ne demande pas la convergence de  $v_k$  vers  $v$  dans  $L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$  mais seulement dans  $L^1$ .

Ce théorème étend celui de DiPerna et Lions au cas des champs d'avection non tangents au bord.

- Régularité en espace de solutions faibles du transport : En étudiant de façon précise la façon dont la trace d'une solution faible dépend du domaine  $\Omega$  sur lequel l'équation est posée, j'ai pu établir des propriétés de régularité en espace des solutions faibles, analogues aux propriétés de continuité en temps bien connues.

De façon plus précise, j'ai montré que toute solution faible  $\rho$  par exemple dans  $L^\infty$  était continue par rapport à une variable d'espace quelconque (notée  $\xi$ ) à valeurs dans  $L^p(]0, T[ \times S)$  où  $S$  est l'espace orthogonal à la direction  $\xi$ , à condition que la composante selon  $\xi$  du champ  $v$  ne s'annule pas sur  $]0, T[ \times S$ .

### • Analyse du schéma upwind pour le transport

Dans la droite ligne des travaux précédents, j'ai récemment entrepris dans [25], l'analyse du schéma décentré amont pour le problème de Cauchy-Dirichlet associé à l'équation (1). Le schéma proposé est donc très classique mais la difficulté onside à en faire l'analyse sous les hypothèses les plus faibles possibles sur les données du problème et sur les maillage. De façon plus précise, j'ai résolu les questions suivantes.

- Prise en compte des termes de bord dans le schéma.
- Preuve de l'existence, unicité et monotonie des solutions approchées.
- Convergence forte des solutions approchées dans  $L^\infty(]0, T[, L^p(\Omega))$ , pour tout  $p < +\infty$ .

Le caractère uniforme en temps de la convergence est un point tout à fait nouveau et nécessite l'utilisation fine des techniques d'estimations de commutateurs de Friedrichs.

- Propriété de renormalisation discrète.

On montre par exemple que si  $\rho_{\Delta t, \mathcal{T}}$  est une solution approchée de l'équation associée à un maillage  $\mathcal{T}$  et un pas de temps  $\Delta t$ , alors  $\rho_{\Delta t, \mathcal{T}}^2$  est solution du schéma volumes finies associé à l'équation vérifiée par  $\rho^2$  à un terme de reste près qui est positif et qui tend vers 0 dans  $L^1(]0, T[ \times \Omega)$  fort.

- Stabilité de l'approximation par rapport aux données.

On montre que les résultats de convergence obtenus ci-dessus persistent si les données du problème (en particulier le champ  $v$  et le coefficient  $c$ ) ne sont connus que de façon approchée. Les hypothèses nécessaires sur la convergence des données approchées sont similaires à celles évoquées dans les résultats de stabilité de la solution du transport par rapport aux données. En particulier, il n'est pas nécessaire que le champ de vitesse approché converge vers le vrai champ  $v$  dans un espace de Sobolev discret.

Ces derniers résultats sont importants en vue du couplage du problème de transport avec d'autres équations (Navier-Stokes, Vlasov, etc ...)

### • Solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable avec des conditions aux limites peu réfléchissantes en sortie

Dans l'article [15] avec P. Fabrie, nous nous intéressons aux équations de Navier-Stokes incompressibles non-homogènes (aussi appelé modèle d'écoulement dilatable) dans lequel les conditions aux limites sur  $v$  ne sont pas de type Dirichlet homogène.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \operatorname{div}(\underbrace{2\mu(\rho)D(v) - p\operatorname{Id}}_{=\sigma(v,p)}) = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \rho(0) = \rho_0, v(0) = v_0, \end{cases}$$

Plus précisément, on suppose que le champ de vitesse  $v$  est donné sur une partie du domaine (inflow) et que l'écoulement est libre sur une autre partie du domaine (outflow). La densité  $\rho$  est imposée en entrée et inconnue en sortie. Sur la partie outflow, on considère une condition aux limites non-linéaire peu réfléchissante introduite dans le cas des fluides homogènes par C.H. Bruneau et P. Fabrie. Celle-ci s'écrit

$$\sigma(v, p) \cdot n = \sigma_{\text{ref}} \cdot n - \frac{1}{2} \rho^{\text{in}} (v - v_{\text{ref}})(v \cdot n)^-,$$

où  $\sigma(v, p)$  est le tenseur des contraintes dans l'écoulement et  $v_{\text{ref}}, \sigma_{\text{ref}}$  sont des vitesses et des contraintes de référence données.

On montre que les équations obtenues admettent une solution faible pour tout choix de l'écoulement de référence. Une attention particulière est portée à l'interprétation de la condition aux limites en sortie car, *a priori*, la quantité  $\sigma(v, p)$  est seulement dans  $L^2$  en temps et espace et ne possède donc pas de trace.

On montre que, sur le bord de  $\Omega$ , les moyennes transverses (i.e. dans la direction normale) sur une zone de taille  $\epsilon$  de cette contrainte normale convergent faiblement vers  $\sigma_{\text{ref}} \cdot n - \frac{1}{2} \rho^{in} (v - v_{\text{ref}})(v \cdot n)^-$  quand  $\epsilon$  tend vers 0.

Si l'écoulement de référence choisi est proche de la solution attendue alors l'écoulement calculé va être une bonne approximation de l'écoulement réel, en particulier dans le cas d'un écoulement chahuté.

- Construction et analyse de convergence de schémas de volumes finis pour le  $p$ -laplacien sur maillages cartésiens

Nous nous intéressons ici (ainsi que dans le paragraphe suivant) à la mise au point et à l'étude de schémas volumes finis pour le  $p$ -laplacien, c'est-à-dire pour l'équation elliptique non-linéaire

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f \in L^{p'}(\Omega),$$

pour  $1 < p < +\infty$ , assortie de conditions aux limites de Dirichlet homogène par exemple. La discrétisation de ce type d'équations par des méthodes éléments finis a beaucoup été étudiée mais à notre connaissance, l'utilisation de méthodes volumes finis pour ce problème était tout à fait nouvelle à l'époque. Comme dans le cas linéaire, les avantages à utiliser une méthode de volumes finis sont nombreux (consistance des flux, conservativité locale, simplicité de mise en oeuvre, potentialité de considérer des maillages généraux - voir le paragraphe suivant).

Dans un premier temps, avec B. Andreianov et F. Hubert, nous avons étudié le cas des maillages cartésiens 2D.

- Construction et analyse de convergence pour les solutions régulières : Dans [8], nous avons identifié tous les schémas à 9 points possibles qui préservent la structure variationnelle du problème. Nous avons montré que ces schémas étaient bien posés et qu'ils convergeaient à l'ordre attendu dans le cas où la solution approchée est supposée dans  $W^{2,p}(\Omega)$ .
- Estimation d'erreur pour les solutions peu régulières : Dans un second travail [9] et [14], nous avons montré une estimation d'erreur (qui semble optimale !) dans le cas où la solution du problème ne possède que la régularité elliptique naturelle qui est celle l'espace de Besov  $B_{\infty}^{1+\frac{1}{p-1},p}(\Omega)$  qui est quasiment égal à  $W^{1+\frac{1}{p-1},p}(\Omega)$ . L'idée nouvelle est de démontrer une estimation Besov discrète pour les solutions approchées obtenues à partir du schéma de volumes finis. Celle-ci s'obtient en adaptant la méthode des translations de Nirenberg au cas discret. Une fois cette estimation démontrée, on peut utiliser à nouveau la structure variationnelle du problème pour établir l'estimation d'erreur optimale.
- Enfin, dans [11], nous avons au contraire poussé l'analyse d'erreur pour ces schémas dans le cas où la solution est supposée très régulière et le maillage uniforme. On profite alors de symétries dans le schéma qui permettent d'accéder à divers résultats de super-convergence (incluant la convergence à l'ordre 2 en norme  $H^1$  discrète dans le cas linéaire).

- Analyse de la méthode Discrete Duality Finite Volume (DDFV) pour les problèmes elliptiques non-linéaires sur maillages généraux

Afin d'étendre aux maillages non structurés et à des problèmes plus généraux les résultats obtenus précédemment, j'ai contribué à la construction et à l'analyse de la méthode DDFV pour résoudre des problèmes elliptiques généraux de la forme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u(x))) = f(x), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

La méthode DDFV a été initialement proposée par Domelevo et Omnès pour résoudre l'équation de Laplace sur des maillages non-admissibles au sens usuel des volumes finis (c'est-à-dire ne satisfaisant pas une condition géométrique d'orthogonalité assez contraignante). Avec B. Andreianov et F. Hubert nous avons, dans [13], proposé une analyse complète de la méthode dans le cas non-linéaire évoqué ci-dessus.

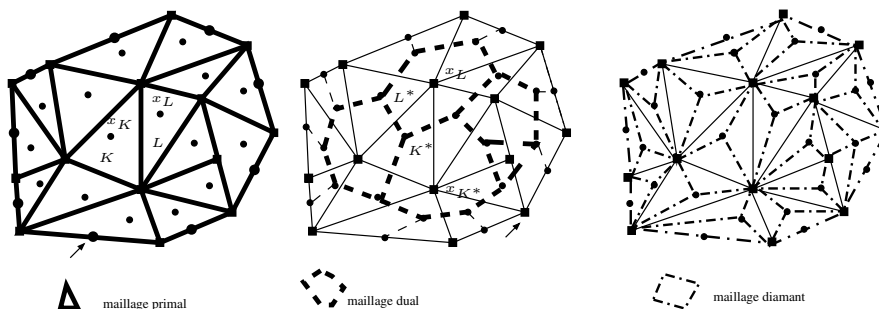


Figure 6: Exemple de maillages considérés

Le principe général de la méthode est de considérer un double jeu d'inconnues : au centre des volumes de contrôle mais aussi aux sommets du maillage (voir la Figure 6). Il s'agit alors d'écrire un double jeu d'équations. Ces équations sont liées au travers de cellules particulières (dites cellules diamant) sur lesquelles sont naturellement définis les opérateurs discrets mis en jeu.

Nos principaux résultats sont la preuve de l'existence et unicité de solutions, une preuve de convergence du schéma dans les espaces d'énergie sans hypothèse sur la solution exacte et enfin une estimation de l'erreur dans le cas de solutions plus régulières.

Dans [16], avec F. Hubert, nous avons proposé une amélioration très substantielle de la méthode, appelée m-DDFV, pour prendre en compte de façon plus subtile les hétérogénéités dans les coefficients du problème considéré (cas de la diffusion anisotrope hétérogène). L'idée est de modifier la définition des flux numériques sur chaque cellule diamant pour prendre en compte le saut des coefficients de part et d'autre de l'arête considérée. Les formules obtenues généralisent la très célèbre formule de la moyenne harmonique pour la perméabilité équivalente d'un milieu poreux bicouche en géométrie cartésienne.

Nous montrons que le schéma m-DDFV ainsi construit admet bien une unique solution et que l'ordre de convergence de la méthode est bien l'ordre optimal attendu (i.e. l'ordre 1 en norme  $H^1$  discrète dans le cas linéaire par exemple). Un exemple de courbes de convergence obtenues sur un cas-test non-linéaire (de type 3-laplacien) avec coefficients hétérogènes est montré sur la figure 7. On observe bien un gain très important dans les ordres de convergence (et aussi dans la précision sur maillage grossier !).

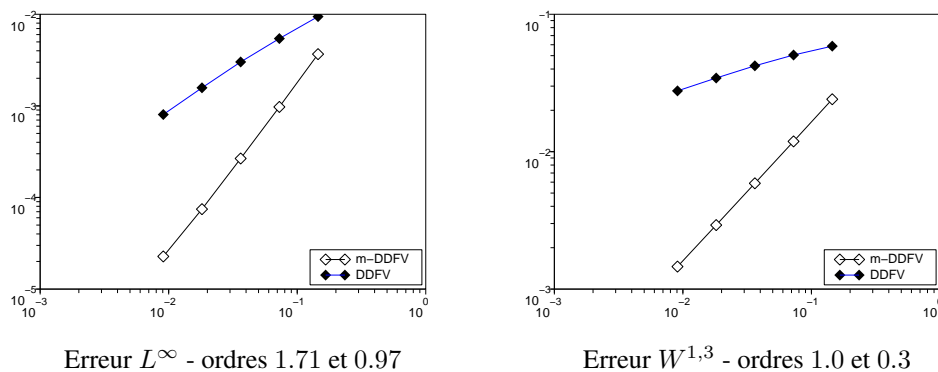


Figure 7: Schéma DDFV usuel (en bleu et  $\blacklozenge$ ) et schéma m-DDFV (en noir et  $\blacklozenge$ )

Dans le cas linéaire, le schéma proposé a le même stencil que le schéma initial et il consiste essentiellement à changer les coefficients de la matrice du problème.

Dans le cas non-linéaire, le schéma est *a priori* très non-linéaire et difficile à résoudre par les méthodes usuelles (calculer la jacobienne du système par exemple peut s'avérer complexe). Nous avons donc adapté à ce problème la méthode de décomposition-coordination de Glowinski donc nous montrons la convergence.

Dans un dernier travail [19] avec F. Hubert et S. Krell, nous avons étudié l'adaptation d'algorithme de décomposition de domaine de type Schwarz sans recouvrement à la résolution de ce type de schéma (ou au moins à la construction de préconditionneurs efficaces). Ce travail s'est avéré plus délicat qu'on ne pouvait l'imaginer et il a été nécessaire de proposer une prise en compte adaptée des conditions de transmission de type Robin sur ce problème.

- Discrétisation DDFV pour le problème de Stokes

Fort des résultats obtenus sur la méthode DDFV pour les problèmes elliptiques scalaires, nous avons, avec F. Hubert, encadré la thèse de S. Krell qui concernait l'étude des méthodes DDFV pour le problème de Stokes et ses variantes. Plusieurs contributions très intéressantes sont issues de cette thèse, en particulier dans le cas où la viscosité n'est pas constante dans le modèle et qui ont nécessité de développer de nouveaux outils.

Il restait néanmoins une question ouverte autour de la stabilité Inf-Sup de la méthode, qu'on ne savait ni prouver ni réfuter. Les différents calculs effectués par S. Krell ne montraient néanmoins aucun problème d'instabilité et toute l'analyse menée dans cette thèse a été faite *modulo* un terme de stabilisation dont on soupçonnait qu'il n'était pas toujours utile.

Il s'agit donc de comprendre le comportement, quand on raffine le maillage  $\mathcal{T}$ , de la "constante" inf-sup définie par

$$\beta_{\mathcal{T}} = \inf_{p^{\mathcal{D}}} \left( \sup_{v^{\mathcal{T}}} \left( \frac{\int_{\Omega} p^{\mathcal{D}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(v^{\mathcal{T}}) dx}{\|p^{\mathcal{D}}\|_{L^2} \|v^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}} \right) \right),$$

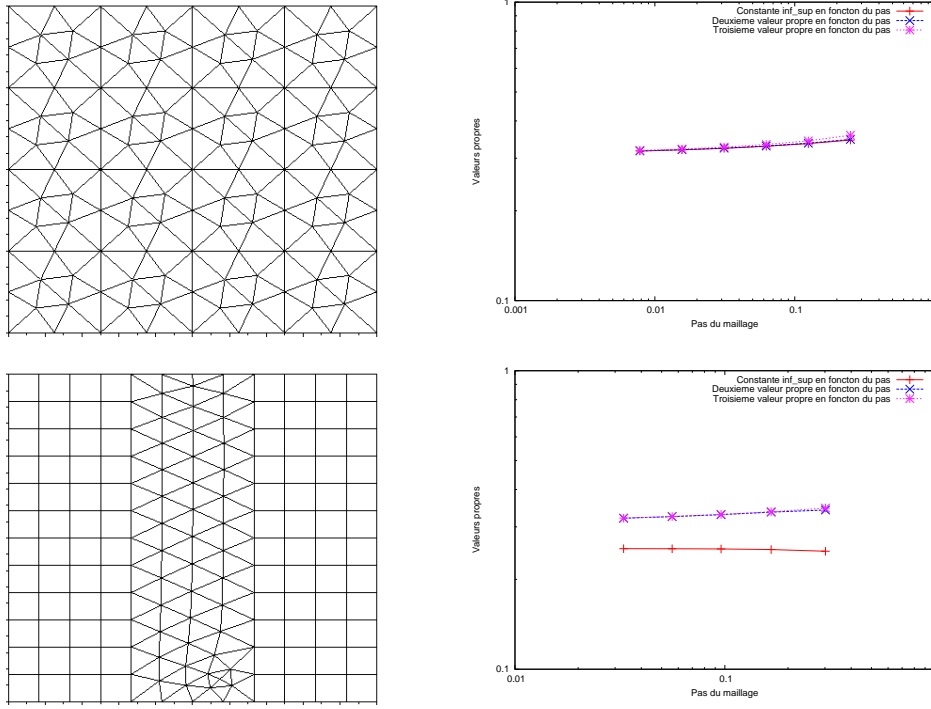


Figure 8: Cas de stabilité inf-sup de DDFV

où l'infimum est pris sur l'ensemble des pressions à moyenne nulle (définies sur les diamants) et le supremum est pris sur l'ensemble des vitesses discrètes nulles au bord. La notation  $\text{div}^D$  désigne l'opérateur de divergence discrète DDFV.

Dans un travail en cours [28] avec S. Krell et F. Nabet, nous répondons à ces questions de diverses manières:

- Nous prouvons la stabilité inf-sup de DDFV, c'est-à-dire une minoration non triviale de  $\beta_{\mathcal{T}}$  quand le pas du maillage  $\mathcal{T}$  tend vers 0, dans le cas de maillages cartésien modulo le mode en damier que l'on doit nécessairement enlever, car celui-ci annule le gradient de pression discret.
- Nous prouvons que, sur un maillage cartésien localement raffiné, la stabilité inf-sup tombe en défaut mais, en réalité, qu'un seul mode parasite est responsable de cet état de fait. C'est, d'un certain point de vue, la *trace* du mode en damier dans le cas cartésien non localement raffiné. Voir les figures ci-dessous.

On montre alors que l'on peut construire un mode instable "approché" explicite de sorte que la stabilité inf-sup soit vérifiée sur l'espace des pressions de co-dimension 1 constitué par le supplémentaire orthogonal de ce mode instable.

Ceci justifie le fait que, en pratique, même sans stabilisation, on observe de bonnes performance du schéma.

- Nous prouvons la stabilité inf-sup du schéma sur des maillages triangles quelconques.
- Dans les cas pour lesquels l'analyse est encore hors de portée (notamment le cas de maillages quadrangles quelconques), nous proposons une étude numérique complète de la stabilité inf-sup.

Il s'agit de transformer le problème du calcul de la constante inf-sup associée à un maillage donné en un problème de calcul de valeurs propres. Plus précisément, on montre que l'on a

$$\beta_{\mathcal{T}}^2 = \inf \text{Sp} \left( M_{\mathcal{T}}^{-\frac{1}{2}} B_{\mathcal{T}} R_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathcal{T}} M_{\mathcal{T}}^{-\frac{1}{2}} \right),$$

où  $M_{\mathcal{T}}$  et  $R_{\mathcal{T}}$  sont respectivement les matrices de masse et rigidité en vitesse pour le schéma considéré et  $B_{\mathcal{T}}$  est la matrice de l'opérateur de divergence discrète.

On résout alors ce problème par une méthode d'itération de sous-espaces avec projection de Rayleigh-Ritz pour obtenir les plus petites valeurs propres de cette matrice. La plus petite d'entre elle est le carré de la constante inf-sup mais, dans le cas où  $\beta_{\mathcal{T}}$  tend vers 0, les valeurs propres suivantes sont intéressantes et nous renseignent sur le nombre de modes instables présents dans le système.

Quelques exemples de cas où le schéma est inf-sup stable sont montrés dans la figure 8. Quelques exemples de cas d'inf-sup instabilité sont montrés dans la figure 9 ainsi que l'allure de l'**unique** mode instable que nous avons identifié dans chaque cas (Figure 10).

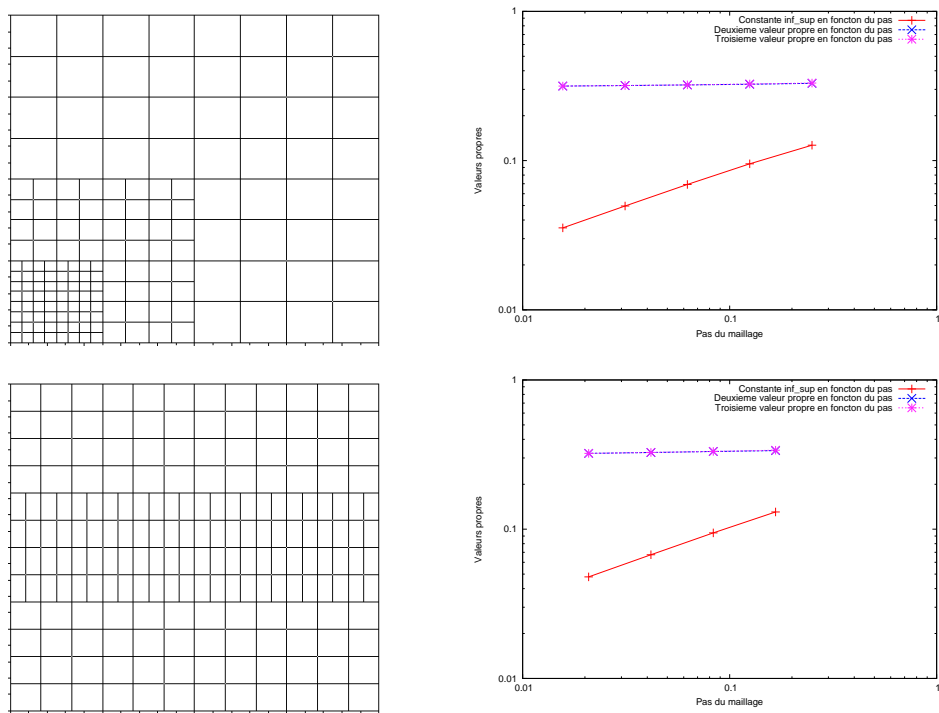


Figure 9: Cas de non stabilité inf-sup de DDFV

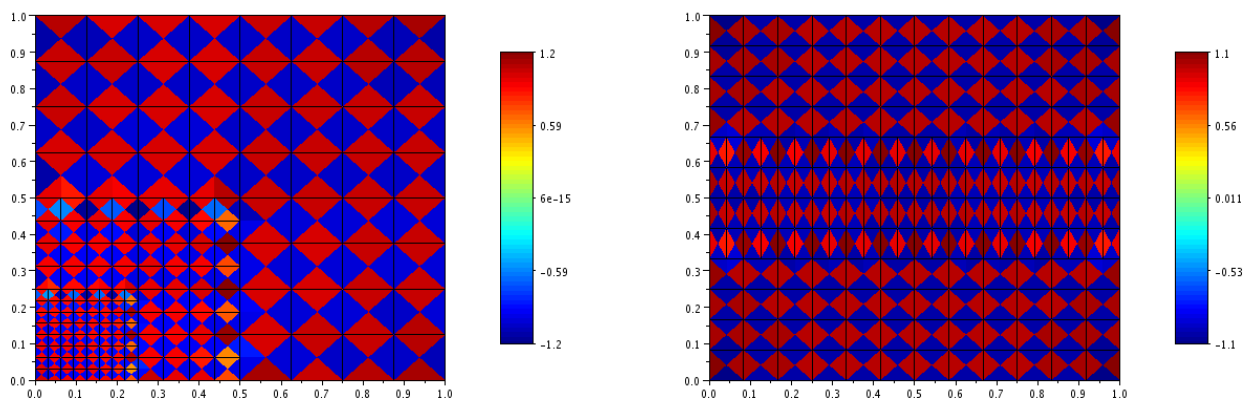


Figure 10: Modes instables dans les deux cas présentés dans la figure 9

- Construction et analyse d'un modèle et d'un schéma VF associé pour la simulation numérique d'écoulements en milieux poreux présentant des fractures internes

Dans ce travail avec P. Angot et F. Hubert (voir [17] et [34]), on propose la mise en place et l'analyse d'un modèle d'écoulement en milieux poreux fracturés.

Dans un milieu poreux supposé homogène et isotrope (pour simplifier), on souhaite modéliser la présence de fractures internes (ne touchant pas nécessairement le bord), c'est-à-dire de zones de très faible épaisseur dans laquelle la perméabilité est très différente de celle de la matrice environnante et potentiellement très anisotrope.

La résolution de l'équation de Darcy globale (i.e. sur l'ensemble du domaine de calcul) nécessite un raffinement important près de la fracture pour prendre en compte les phénomènes qui s'y produisent à une échelle beaucoup plus petite que celle du domaine de calcul complet. On propose donc dans ce travail un modèle multi-échelles couplant le problème de Darcy 2D dans la matrice à un problème de Darcy 1D dans chacune des fractures, le couplage ayant lieu par l'intermédiaire de termes de saut et de termes sources.

On montre que ce problème elliptique multi-échelle est bien posé dans les espaces d'énergie naturels. Ceci n'est pas complètement immédiat car le domaine fracturé n'est pas un "domaine" au sens usuel du terme (l'ouvert dans lequel l'équation est posé est localement situé des deux côtés de la fracture). Il faut donc prendre un soin particulier à bien définir les traces, les termes de saut, etc ... Notre analyse généralise par plusieurs aspects celles existant dans la littérature pour des modèles similaires, en particulier par le fait que nos fractures sont supposées ne pas toucher le bord, ce qui induit les difficultés évoquées ci-dessus.

Outre cette analyse théorique du modèle, nous proposons un schéma de Volumes Finis pour en calculer les solutions. Cette approche est très adaptée car la notion de saut de flux est très naturelle dans ce contexte. L'écriture et la mise en oeuvre du schéma est relativement simple en comparaison avec des méthodes d'éléments finis par exemple, qui nécessite des formulations mixtes un peu délicates à manipuler.

On démontre alors la convergence du schéma et on mène un certain nombre de comparaisons numériques avec les solutions du modèle global (obtenues sur un maillage très raffiné près des fractures), avec des solutions plus ou moins analytiques.

Des exemples de résultats sont donnés dans la figure 11 pour une configuration à 4 fractures dont une extrémité touche le bord. Pour divers types de conditions aux limites et diverses valeurs des perméabilités (voir le détail dans l'article [17]), on montre:

- En haut : le calcul global avec les lignes de courant de la vitesse,
- Au milieu : les valeurs de la pression le long de chaque fracture (en train plein le calcul global et trait pointillés le calcul par notre modèle asymptotique),
- En bas : les valeurs de la pression en coupe le long de la droite  $\{x = 0.65\}$ .

On observe une très bonne adéquation des résultats, conformément à ce que prévoit la théorie.

- Mise en oeuvre des méthodes et benchmarks

Tous les schémas étudiés dans cette thématique ont été codés en FORTRAN 90 au sein d'un code de calcul interne au laboratoire qui nous permet de tester et de mieux comprendre les schémas mais aussi de participer à divers benchmarks (avec F. Hubert et S. Krell).

[http://www.latp.univ-mrs.fr/latp\\_numerique/](http://www.latp.univ-mrs.fr/latp_numerique/)

Dans le cadre de mini-cours avec TP que j'ai été amené à faire (à Lille puis en Algérie), j'ai écrit un code en Scilab (en réalité un code 1D et un code 2D) plus facile d'accès aux non-spécialistes et permettant d'illustrer la plupart des propriétés de ces schémas mais aussi de faire de vrais calculs sur des maillages pas trop fins.

Ce code est disponible à l'adresse

[http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/VF\\_scilab.tar.gz](http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/VF_scilab.tar.gz)

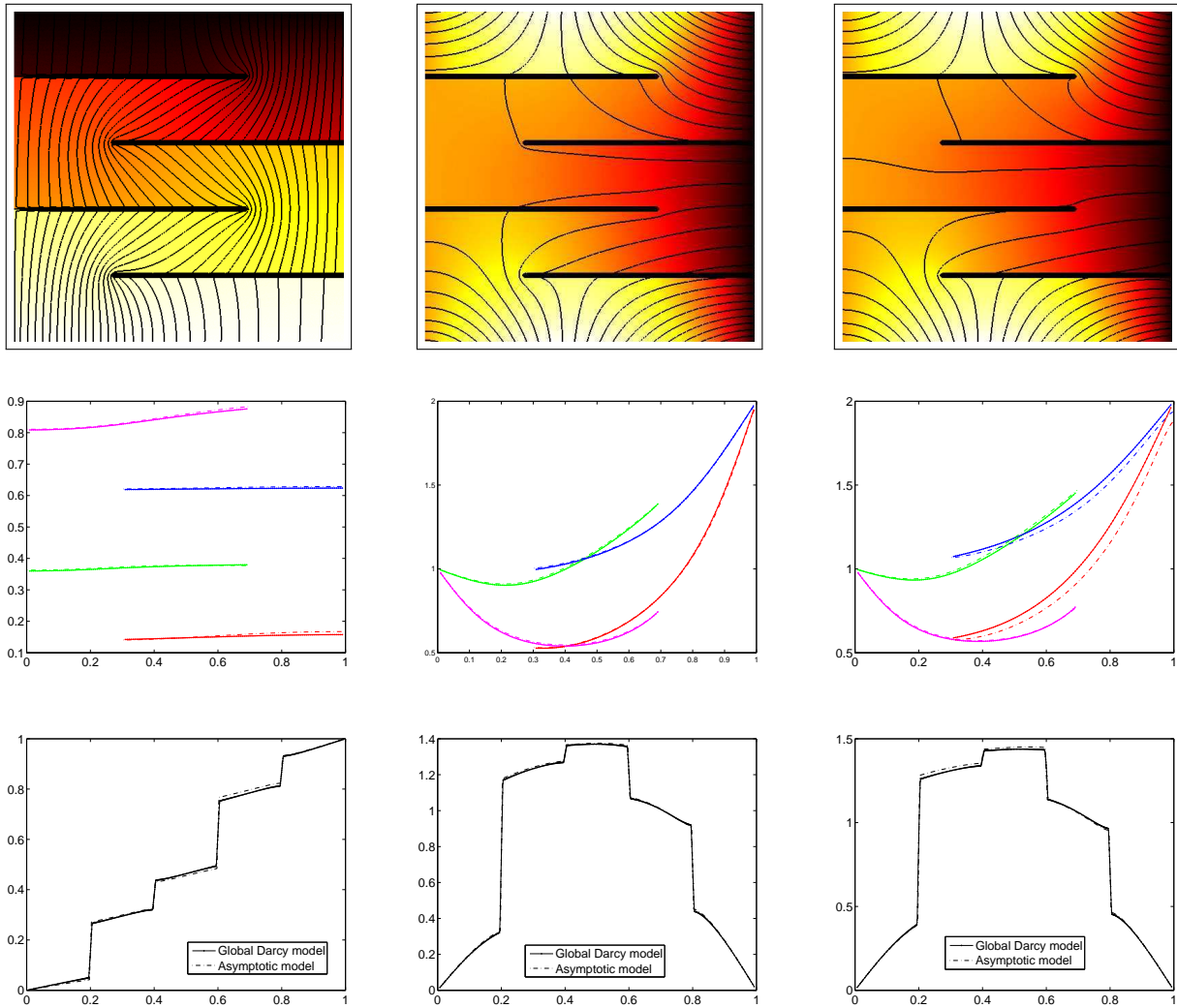


Figure 11: Champ de pression et lignes de courant (en haut), Pression le long des quatre fractures (au milieu), Coupe de pression le long de la ligne  $\{x = 0.65\}$  (en bas)

On considère une équation parabolique de la forme

$$(S) \begin{cases} \partial_t y + Ay = 1_\omega v, & \text{dans } \Omega, \\ y = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où  $A$  est un opérateur elliptique,  $v$  est un contrôle qui agit sur le domaine de contrôle  $\omega \subset \Omega$ . Sous de bonnes hypothèses, on sait classiquement que ce problème est contrôlable à 0 au temps  $T > 0$  (i.e. on peut trouver un  $v$  dans  $L^2$  tel que la solution de  $(S)$  vérifie  $y(T) = 0$ ) si et seulement si l'inégalité d'observabilité

$$\|q(0)\|_{L^2}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |q|^2 dx dt,$$

est satisfaite par toute solution du problème adjoint  $-\partial_t q + A^*q = 0$  sur  $]0, T[$ .

Une façon *constructive* de le démontrer (c'est l'approche dite HUM pour Hilbert Uniqueness Method) consiste à considérer la fonctionnelle suivante

$$q_F \in L^2(\Omega) \longmapsto J_\epsilon(q_F) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |q|^2 dx dt + (y_0, q(0)) + \frac{\epsilon}{2} \|q_F\|_{L^2}^2,$$

dans laquelle  $q$  est la solution du problème adjoint associé à la donnée finale  $q_F$ . Celle-ci a clairement un unique minimiseur  $q_{F,\epsilon}$ . Grâce à l'inégalité d'observabilité, on peut alors montrer que  $v_\epsilon = 1_\omega q_\epsilon$  est un contrôle approché pour le problème  $(S)$  qui vérifie

$$\|v_\epsilon\|_{L^2} \leq C \|y_0\|_{L^2}, \quad \|y_\epsilon(T)\| \leq C\sqrt{\epsilon}.$$

Ainsi toute valeur d'adhérence  $L^2$ -faible de la suite  $(v_\epsilon)_\epsilon$  est un contrôle à 0 pour le problème  $(S)$ . On peut montrer qu'en réalité toute la suite converge vers un contrôle qui est, de plus, celui de norme  $L^2$  minimale.

Le problème que j'ai étudié avec mes collaborateurs (F. Hubert et J. Le Rousseau) concerne l'utilisation de cette approche en vue d'une approximation numérique effective du problème de contrôle. Ainsi, en considérant une semi-discrétisation en espace de  $(S)$  sous la forme

$$(S_h) \begin{cases} \partial_t y_h + A_h y_h = 1_\omega v_h, \\ y_h(0) = y_{0,h}, \end{cases}$$

on se demande s'il existe un contrôle semi-discret  $v_h$  qui amène à 0 la solution de ce problème, avec des bornes uniformes, et comment on peut le calculer.

Nous avons analysé comment la méthode HUM se comportait vis à vis de la discrétisation (approche déjà proposée par Glowinski et Lions il y a une vingtaine d'années). IL s'agit ici de minimiser la fonctionnelle

$$J_{\epsilon,h}(q_F) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |q_h|^2 dx dt + (y_{0,h}, q_h(0)) + \frac{\epsilon}{2} \|q_F\|_{L^2}^2,$$

où  $q_h$  est solution du problème adjoint discret  $-\partial_t q_h + A_h^* q_h = 0$  et à considérer le contrôle  $v_{\epsilon,h} = 1_\omega q_{\epsilon,h}$ . Ce calcul, à  $h$  et  $\epsilon$  fixés, peut être effectué par une méthode de gradient conjugué par exemple, ce qui donne un algorithme de calcul effectif.

Nos contributions ont, en particulier, consisté à analyser le comportement de cette méthode en fonction des deux paramètres  $h$  (le pas de la discrétisation) et  $\epsilon$  (le paramètre de pénalisation de la fonctionnelle HUM).

Ce problème est délicat car on sait (sur des exemples explicites) que le problème semi-discret  $(S_h)$  peut ne pas être contrôlable à 0. Ainsi, dans ces cas là on aura nécessairement

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|v_{h,\epsilon}\|_{L^2} = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|y_{h,\epsilon}(T)\|_{L^2} = +\infty.$$

Nos premiers résultats sur le sujet ont consisté à montrer des inégalités d'observabilité discrètes relaxées de la forme

$$\|q_h(0)\|_{L^2}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |q_h|^2 dx dt + e^{-\frac{C}{h^2}} \|q_F\|_{L^2}^2,$$

pour toute solution du problème adjoint semi-discret, où la constante  $C$  ne dépend pas de  $h$ .

Ceci permet de prouver que, dans la méthode HUM, on peut choisir  $\epsilon = \phi(h) \rightarrow 0$  dès lors que  $\phi(h)$  n'est pas plus petit que le terme exponentiel  $e^{-C_1/h^2}$ . D'un point de vue numérique, il est en général suffisant de choisir  $\phi(h) = h^p$  où  $p$  est lié à l'ordre d'approximation de la discrétisation choisie.

Pour aboutir à ces résultats nous avons utilisé deux types d'approches, toutes deux basées sur des inégalités de Carleman discrète.

- Méthode de Lebeau-Robbiano :

Il s'agit ici de montrer une inégalité spectrale concernant les modes propres de l'opérateur elliptique discret  $A_h$ . Cette inégalité permet de quantifier le défaut d'orthogonalité dans  $L^2(\omega)$  des fonctions propres de l'opérateur  $A_h$  (qui sont bien sûr orthogonales dans  $L^2(\Omega)$ ). On montre que, pour tout  $\mu \leq C_1/h^2$ , on a

$$\|u_h\|_{L^2(\omega)} \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \|u_h\|_{L^2(\Omega)},$$

pour toute fonction discrète  $u_h$  ne contenant que des fréquences inférieures ou égales à  $\mu$  et pour  $C, C_1 > 0$  indépendants de  $h$ , de  $u_h$  et de  $\mu$ .

A partir de cette inégalité, on peut utiliser la construction de Lebeau et Robbiano pour montrer les inégalités d'observabilité relaxées et donc toutes les propriétés de contrôlabilité uniforme en  $h$  énoncées plus haut.

Pour prouver l'inégalité spectrale ci-dessous nous nous basons sur une inégalité de Carleman globale pour un opérateur *elliptique* semi-discret. C'est ainsi que nous avons développé toute une analyse précise de ce type d'inégalité. Il s'agit d'estimations d'énergie à poids exponentiel de la forme  $e^{s\phi(x)}$ , pour  $\phi > 0$  fixé bien choisi et pour  $s > 0$  grand. Elles permettent, entre autres, de quantifier le principe de continuation unique pour ces opérateurs. Il est absolument essentiel de pouvoir prendre le paramètre  $s$  **grand** dans ces estimations, ce qui rend le poids de plus en plus singulier et induit ainsi des erreurs de discrétisation de plus en plus importantes. Il faut donc mener une analyse fine des opérateurs discrets et de leurs propriétés de commutation, de conjugaison avec les poids (eux-même discrétisés !).

Nous avons mené à bien ce programme en prenant soin de maîtriser le comportement de tous les (nombreux) termes apparaissant dans ces inégalités de façon uniforme par rapport aux paramètres  $h$  et  $s$ . Il est alors apparu que les inégalités de Carleman discrètes dont nous avons besoin étaient valables sous l'hypothèse que le produit  $sh$  soit inférieur à un seuil ne dépendant que des données du problème (i.e. les coefficients de l'opérateur essentiellement). De façon plus précise, nous avons étudié ce problème pour la méthode des différences finies en 1D ([21]) puis en multi-D ([22]).

Les techniques introduites dans ces deux articles ont depuis connu des développements dans de nouveaux problèmes (notamment des travaux de S. Ervedoza et ses collaborateurs sur la discrétisation de problèmes inverses pour l'équation des ondes, ou sur le problème de Calderon discret).

- Le problème de la discrétisation en temps :

Dans un troisième travail ([24]), nous étudions la problématique évoquée ci-dessus dans le cadre complètement discrétisé temps/espace, ce qui est bien sûr le cas d'intérêt en pratique (le calcul semi-discret n'étant concrètement abordable que dans des cas très particuliers, et surtout en 1D).

Nous avons essentiellement considéré le cas du schéma d'Euler implicite et le schéma de Crank-Nicolson et obtenu les résultats suivants:

- Ecriture de la méthode HUM totalement discrète. Cela nécessite d'identifier le bon problème adjoint, ce qui n'est pas si évident. On peut alors écrire les inégalités d'observabilités relaxées que l'on peut espérer prouver.
- Adaptation de la construction du contrôle de Lebeau-Robbiano au cas discret en temps. Les difficultés essentielles sont liées, en particulier pour le schéma de Crank-Nicolson, aux mauvaises propriétés de dissipation parabolique de ces schémas.
- Résultats de contrôlabilité uniforme en fonction du pas de temps et du pas d'espace.
- Convergence et estimation de l'erreur du schéma en temps, à maillage fixé.

- Méthode de Fursikov et Imanuvilov

Dans l'article [27], on prolonge notre étude des inégalités de Carleman discrètes en considérant le cas des opérateurs paraboliques (et non plus elliptiques comme précédemment). En dehors de la difficulté liée à la structure parabolique de l'opérateur, la nouveauté principale provient de la singularité du poids qu'il est maintenant nécessaire de considérer aux bornes de l'intervalle de temps.

Comme précédemment, ces inégalités ne sont valables que pour des grands paramètres  $s$  liés au paramètre de discrétisation  $h$  par une borne sur le produit  $sh$ . Elles permettent alors de montrer les inégalités d'observabilité relaxées et les résultats de contrôlabilité associés.

L'intérêt de cette nouvelle approche est d'une part qu'elle s'adapte plus facilement à des cas plus généraux (coefficients dépendant du temps par exemple) et d'autre part qu'elle permet d'accéder à des résultats de contrôlabilité pour des problèmes semi-linéaires.

On montre ainsi dans cet article des théorèmes de contrôlabilité uniforme pour des équations paraboliques semi-linéaires en dimension quelconques.

- **Mise en oeuvre et investigations numériques**

J'ai programmé les méthodes numériques étudiées ci-dessus en 1D et 2D structuré et non-structuré, pour des problèmes scalaires linéaires et non-linéaires et pour des systèmes paraboliques linéaires.

Nous avons donc pu étudier assez finement le comportement des solutions en fonction des divers paramètres numériques des méthodes mais aussi étudier des cas non encore compris d'un point de vue théorique. L'extension de ce code à des problèmes de contrôle frontière et mixte (une partie des contrôles agit sur la frontière, une autre de manière distribuée) est en cours (avec G. Olive).

Des exemples de tels calculs ont été par exemple présentés dans l'exposé suivant :

<http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/exposes/IHP10.pdf>

- Résumé et objectifs

Ce livre est une version révisée, étendue et en anglais du livre [1]. Par rapport à la première édition elle compte environ 150 pages supplémentaires. La préparation de cette nouvelle édition a été sollicitée par l'éditeur.

L'objectif que nous visons dans cet ouvrage est double :

- Il s'agit d'une part d'introduire le lecteur à l'analyse des équations de Stokes et de Navier-Stokes, dans le cas stationnaire et le cas d'évolution. Nous traitons particulièrement le cas où ces équations sont posées dans un domaine borné de l'espace, en insistant notamment sur les problèmes que peuvent engendrer différents types de conditions aux limites.
- D'autre part, l'analyse de ces modèles donne l'occasion d'utiliser de nombreuses techniques d'analyse des EDP non-linéaires et nous avons voulu profiter de cet ouvrage pour présenter ces méthodes de façon détaillée et auto-contenue.  
Ainsi, à l'exception de quelques résultats d'analyse fonctionnelle très classiques, nous donnons des preuves complètes pour l'ensemble des résultats présentés dans ce livre.

Nous espérons ainsi qu'au delà du cadre des équations de la mécanique des fluides, tout lecteur désireux d'appréhender l'analyse de telles EDP pourra y trouver une source d'informations utiles.

- Table des matières commentée

### Chapter I : The equations of fluid mechanics

1. Lagrangian and Eulerian coordinates
2. The transport theorem
3. Conservation equations
4. Fundamental laws: Newtonian fluids and thermodynamics laws
5. Summary of the equations
6. Incompressible models
7. Some exact steady solutions

Nous donnons ici les principales étapes de la modélisation en mécanique des fluides, en particulier dans le cas visqueux incompressible. On montre le théorème du transport puis on établit les différentes équations de conservation de base. On démontre ensuite le théorème de Cauchy sur le tenseur des contraintes et on introduit la loi de Newton sur le comportement rhéologique des fluides usuels. Quelques exemples de solutions exactes sont données.

### Chapter II : Analysis tools

1. Main notation
2. Fundamental results from functional analysis
3. Basic compactness results
4. Functions of one real variable
5. Spaces of Banach-valued functions
6. Some results in spectral analysis of unbounded operators

Ce chapitre rassemble les définitions et résultats d'analyse utilisés dans ce livre. Parmi ceux-ci on peut citer : les notions de convergence faible, les résultats de compacité, les inégalités de type Gronwall et Gronwall-uniforme, l'intégrale de Bochner, les espaces  $L^p$ , quelques résultats de théorie des distributions et de théorie spectrale.

### Chapter III : Sobolev spaces

1. Domains
2. Sobolev spaces on Lipschitz domains
3. Calculus near the boundary of domains
4. The Laplace problem

Dans ce gros chapitre d'une centaine de pages, on démontre toutes les propriétés utiles des espaces de Sobolev sur des domaines lipschitziens bornés de  $\mathbb{R}^d$ .

Après les définitions essentielles, on introduit des opérateurs de régularisation adaptés à la géométrie du domaine de type Friedrichs dont on prouve les principales propriétés. Ces opérateurs seront utilisés à plusieurs endroits dans la suite du livre, notamment dans la preuve de résultats de densité ou dans l'étude de l'équation de transport.

On peut ensuite établir les résultats de trace, de relèvement, de prolongement, caractériser les espaces duaux et prouver les fondamentales inégalités de Poincaré et de Hardy.

On étudie ensuite les domaines dans  $L^p$  des opérateurs différentiels du premier ordre. Ces opérateurs interviennent de façon cruciale dans la suite, en particulier les opérateurs divergence et rotationnel.

Dans une seconde partie du chapitre, on propose un formalisme permettant de différencier les composantes tangentielles et normales de fonctions définies dans le voisinage du bord d'un domaine. En fonction de la régularité du domaine, on caractérise en particulier les espaces de Sobolev tangentiels et on donne les outils utiles pour démontrer les propriétés de régularité elliptique des différents opérateurs que l'on rencontrera dans la suite. Ces techniques sont illustrées dans un paragraphe dédié aux équations de Laplace avec conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann.

#### **Chapter IV : Steady Stokes equations**

1. Nečas inequality
2. Characterisation of gradient fields. De Rham's theorem
3. The divergence operator and related spaces
4. The curl operator and related spaces
5. The Stokes problem
6. Regularity of the Stokes problem
7. The Stokes problem with stress boundary conditions
8. The interface Stokes problem
9. The Stokes problem with vorticity boundary conditions

Ce chapitre, central dans le livre, s'attaque enfin aux problématiques spécifiques aux équations de la mécanique des fluides en commençant par les équations de Stokes stationnaires et diverses de leurs variantes.

Le premier point fondamental abordé dans le chapitre réside dans la preuve de l'inégalité de Nečas dans des domaines lipschitziens. Celle-ci permet d'établir le théorème de De Rham et également l'existence d'un inverse à droite continu pour l'opérateur divergence (avec condition de Dirichlet au bord). Ces propriétés sont cruciales dans l'étude du terme de pression dans le contexte des écoulements visqueux incompressibles.

Dans un second temps, on procède à l'étude d'espaces fonctionnels adaptés aux équations de Stokes (et qui trouvent aussi des applications dans d'autres contextes) en lien avec les opérateurs divergence et rotationnel.

Munis ces outils, on détaille alors l'analyse des équations de Stokes avec divers types de conditions aux limites : Dirichlet, Neumann, conditions en contrainte, conditions en vorticité et même le problème de Stokes bi-fluide.

Nous détaillons particulièrement l'interprétation des conditions aux limites et la preuve des propriétés de régularité elliptique dans chaque cas.

#### **Chapter V : Navier-Stokes equations for homogeneous fluids**

1. Leray's Theorem
2. Strong solutions
3. The steady Navier-Stokes equations

Ce chapitre est dédié aux équations de Navier-Stokes incompressibles. On commence par étudier le problème d'évolution en temps en démontrant le théorème de Leray sur l'existence et l'unicité (en 2D) de solutions faibles. On poursuit en établissant un certain nombre de propriétés de régularité.

Enfin, on étudie les équations de Navier-Stokes stationnaires avec des conditions de Dirichlet homogène et non-homogène. Des propriétés de stabilité de ces solutions sont données.

#### **Chapter VI : Non-homogeneous fluids**

1. Weak solutions of the transport equation
2. The non-homogeneous incompressible Navier-Stokes equations

Dans ce chapitre, on s'intéresse au modèle de Navier-Stokes incompressible à densité variable. Le fait que la densité et la viscosité du fluide ne soient plus constantes entraîne de nouvelles difficultés liées d'une part aux nouvelles non-linéarités dans les équations et d'autre part au couplage entre une équation hyperbolique et une équation parabolique.

A cette occasion, on commence par montrer les principaux résultats de la théorie des solutions renormalisées permettant d'étudier les solutions faibles bornées de l'équation de transport associée à un champ de vitesse peu régulier. On étudie en particulier le cas où le champ de vitesse n'est pas tangent sur le bord du domaine, ce qui amène naturellement à étudier le problème des traces pour ces solutions faibles.

A l'aide de ces résultats, on prouve ensuite l'existence de solutions faibles au modèle complet, y compris dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet non-homogène.

## **Chapter VII : Boundary conditions modeling**

1. Outflow boundary conditions
2. Dirichlet boundary conditions by penalty

Dans ce dernier chapitre, on propose l'analyse de deux modèles d'écoulements dans lesquels la prise en compte des conditions aux limites est une question centrale.

On étudie d'abord un modèle de conditions aux limites peu réfléchissantes utilisables en sortie d'un écoulement, typiquement sur une partie artificielle (non-physique) d'un domaine de calcul. Il s'agit d'une condition aux limites non-linéaire liant la contrainte en sortie et le flux de quantité de mouvement.

On étudie ensuite la méthode de pénalisation permettant de prendre en compte les conditions aux limites de Dirichlet sur un domaine à géométrie complexe par le biais d'un calcul sur un domaine fictif à géométrie plus simple contenant le domaine physique. On décrit ainsi précisément le phénomène de couches limites associé qui mène à une estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution pénalisée.