

Aspects théoriques et numériques de l'équation de transport

Franck Boyer

Master 2ième année - Mathématiques et Applications

Université Paul Cézanne

2 décembre 2009

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre I	Prérequis	1
1	Convergences forte, faible, faible-* dans les espaces L^p	1
2	Rappels de théorie de l'intégration de Lebesgue et conséquences	2
2.1	Théorème d'Egoroff	2
2.2	Régularité de la mesure et densité des fonctions continues	2
2.3	Continuité de l'opérateur de translation. Convolution	3
3	L'espace $W^{1,p}(I)$, I intervalle de \mathbb{R}	4
3.1	Compacité	5
3.2	Espaces de Sobolev	5
PARTIE 1 ——— Aspects théoriques ———		7
Chapitre II	Données régulières	9
1	La méthode des caractéristiques	9
2	Le théorème du transport	12
3	Plus loin que Cauchy-Lipschitz	14
4	Solutions faibles	16
4.1	Existence dans le cas général	18
4.2	Le cas d'un champ régulier	19
4.3	Premiers éléments dans le cas général	21
Chapitre III	Solutions renormalisées et applications	25
1	Unicité des solutions faibles. Renormalisation	25
1.1	Propriétés qualitatives	35
2	Compacité - stabilité	37
3	Retour à l'équation caractéristique	39

PARTIE 2 — Aspects numériques —		45
Chapitre IV	Schémas numériques pour l'advection en 1D	47
1	Les schémas linéaires de base par une approche <i>différences finies</i>	47
1.1	Introduction	47
1.2	Les schémas d'ordre élevé	48
1.3	Stabilité L^2	50
1.4	Un mot sur les grilles non uniformes	52
2	Etude générale des schémas	52
2.1	Schémas conservatifs	52
2.2	Nouvelles propriétés qualitatives des schémas	54
2.3	Quelques mauvaises nouvelles	56
2.4	Convergence et estimation d'erreur	59
3	Approche volumes finis des schémas	61
3.1	Schémas avec limiteurs de flux	61
3.2	La méthode de Godunov pour les lois de conservation scalaires. Algorithme REA	63
RÉFÉRENCES		67

Chapitre I

PRÉREQUIS

1 Convergences forte, faible, faible-* dans les espaces L^p

Proposition I.1

Soit $(u_n)_n$ une suite **bornée** de $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, alors on peut extraire de la suite $(u_n)_n$ une sous-suite faiblement convergente, c'est-à-dire

$$\exists (u_{n_k})_k, \exists u \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega), \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_{n_k} \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \varphi \, dx.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, on a le résultat suivant :

Corollaire I.2

Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans L^p alors on a

$$\|u\|_{L^p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^p}.$$

Ce résultat est faux dans $L^1(\Omega)$ (car cet espace n'est pas réflexif), en revanche on a un résultat similaire dans $L^\infty(\Omega)$ à condition de considérer la topologie faible-* sur cet espace, qui est le dual de l'espace séparable $L^1(\Omega)$.

Proposition I.3

Soit $(u_n)_n$ une suite **bornée** de $L^\infty(\Omega)$, alors on peut extraire de la suite $(u_n)_n$ une sous-suite faiblement-* convergente, c'est-à-dire

$$\exists (u_{n_k})_k, \exists u \in L^\infty(\Omega), \forall \varphi \in L^1(\Omega), \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_{n_k} \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \varphi \, dx.$$

Le produit de deux suites faiblement convergentes ne converge pas nécessairement faiblement vers le produit des limites. En revanche, si l'une des convergences est forte, le résultat est vrai.

Proposition I.4

Soient p, q et r trois réels dans $[1, +\infty[$ tels que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Si $(u_n)_n$ est une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$, $(v_n)_n$ une suite de $L^q(\Omega)$ qui converge faiblement vers v dans $L^q(\Omega)$ alors la suite produit $(u_n v_n)_n$ converge faiblement vers uv dans $L^r(\Omega)$.

Remarque : Il y a en fait un résultat plus général qui dit que si B est une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G et que u_n cvge faiblement vers u dans E et v_n cvge fortement vers v dans F , alors $B(u_n, v_n)$ converge faiblement vers $B(u, v)$ dans G .

On a enfin le critère suivant de convergence forte.

Proposition I.5

Soient $1 < p < +\infty$, et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ qui converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$. Si on suppose

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p},$$

alors la suite $(u_n)_n$ converge fortement vers u .

D'après le corollaire I.2, l'hypothèse est équivalente à dire que la suite des normes $(\|u_n\|_{L^p})_n$ converge vers $\|u\|_{L^p}$.

La preuve dans le cas $p = 2$ découle immédiatement de l'identité du parallélogramme, elle est en revanche plus délicate dans le cas $p \neq 2$. Par ailleurs, cette propriété est fautive dans L^1 (le cas de la suite régularisante !) et dans L^∞ (le cas d'un $\tanh(x/\varepsilon)$ élégamment tronqué).

2 Rappels de théorie de l'intégration de Lebesgue et conséquences

2.1 Théorème d'Egoroff

Théorème I.6 (Egoroff)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers une fonction f , alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable A tel que $|A^c| \leq \varepsilon$ et $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A .

2.2 Régularité de la mesure et densité des fonctions continues

Proposition I.7

Toute mesure μ borélienne sur \mathbb{R}^d , finie sur les compacts (en particulier la mesure de Lebesgue) est régulière, c'est-à-dire que pour tout borélien A et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert U tels que

$$K \subset A \subset U, \text{ et } \mu(U \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Lemme I.8 (de Urysohn)

Soient K un compact et U un ouvert de \mathbb{R}^d tels que $K \subset U$. Il existe une fonction continue $0 \leq \varphi \leq 1$ telle que $\varphi = 1$ sur K et $\varphi = 0$ sur U^c .

La conséquence de ces deux résultats est la densité des fonctions continues à support compact dans L^p pour tout $p < +\infty$.

Théorème I.9

Pour tout $p \in [1, \infty[$ et tout Ω ouvert de \mathbb{R}^d , l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$.

Preuve :

Il suffit de démontrer le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. Pour cela on utilise la densité des fonctions étagées dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, ce qui ramène le problème à approcher l'indicatrice d'un borélien borné A par une fonction continue à support compact. Pour cela, par régularité de la mesure, on construit K et U tels que $K \subset A \subset U$ et $|U \setminus K| \leq \varepsilon$, on utilise ensuite le lemme d'Urysohn pour construire une fonction continue à support compact φ pour laquelle on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi - 1_A|^p dx \leq \int_{U \setminus K} |\varphi - 1_A|^p dx \leq 2^p |U \setminus K| \leq 2^p \varepsilon,$$

d'où on a $\|\varphi - 1_A\|_{L^p} \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ et le résultat est démontré. ■

2.3 Continuité de l'opérateur de translation. Convolution

Soit $h \in \mathbb{R}^d$ on définit l'opérateur de translation τ_h sur $L^p(\mathbb{R}^d)$, avec $p < +\infty$ par

$$\tau_h f(x) = f(x - h).$$

Cet opérateur est une isométrie de L^p .

Proposition I.10

Pour tout $f \in L^p$, on a

$$\tau_h f \xrightarrow{h \rightarrow 0} f, \text{ dans } L^p.$$

Preuve :

Démontrons tout d'abord le résultat pour une fonction $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ à support inclus dans un compact K . Une telle fonction est absolument continue (de module d'absolue continuité ω_f). Nous avons donc

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p} \leq |K|^{\frac{1}{p}} \omega_f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Soit maintenant $f \in L^p$ quelconque et $\varepsilon > 0$ fixé. D'après les résultats du paragraphe précédent, il existe f_ε continue à support compact telle que $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^p} &\leq \|\tau_h f - \tau_h f_\varepsilon\|_{L^p} + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \\ &\leq 2\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p} \leq 2\varepsilon + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Le réel ε étant fixé, on peut maintenant choisir h assez petit pour que le dernier terme soit plus petit que ε , ce qui démontre le résultat. ■

On déduit de tout cela la densité des fonctions régulières à support compact.

Théorème I.11

Soit $\rho \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et η un noyau régularisant, i.e. $\eta \geq 0$, C^∞ , à support compact tel que $\int \eta = 1$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction

$$\rho_\varepsilon = \rho \star \eta_\varepsilon,$$

avec $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \eta(x/\varepsilon)$, est de classe C^∞ et converge dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ vers ρ .
Si $\rho \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ on a la convergence de ρ_ε vers ρ dans $W^{1,p}$.

3 L'espace $W^{1,p}(I)$, I intervalle de \mathbb{R} **Lemme I.12**

Soient $g \in L^1(]a, b[)$ et $C \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f définie par

$$f(t) = C + \int_a^t g(s) ds.$$

Alors f est continue sur $[a, b]$, de plus $f \in W^{1,1}(]a, b[)$ et sa dérivée au sens des distributions est g .

Preuve :

Pour tout $t_0 \in [a, b[$ et $h > 0$ assez petit, on a

$$f(t_0 + h) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+h} g(s) ds = \int_a^b 1_{[t_0, t_0+h]}(s) g(s) ds \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Un raisonnement similaire avec $h < 0$ montre la continuité de f .

Il s'agit maintenant de vérifier que la dérivée de f au sens des distributions est bien la fonction g . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$, on a

$$-\int_a^b f(t) \varphi'(t) dt = -C \int_a^b \varphi'(t) dt - \int_a^b \left(\int_a^t g(s) \varphi'(t) ds \right) dt.$$

Le premier terme est nul car $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ et on applique le théorème de Fubini au second terme (la fonction $(t, s) \mapsto \varphi'(t)g(s)$ est bien intégrable par rapport aux deux variables), il vient :

$$\begin{aligned} -\int_a^b f(t) \varphi'(t) dt &= -\int_a^b \left(\int_a^b 1_{[a \leq s \leq t]} g(s) \varphi'(t) ds \right) dt \\ &= -\int_a^b \left(\int_a^b 1_{[a \leq s \leq t]} g(s) \varphi'(t) dt \right) ds \\ &= -\int_a^b \left(g(s) \int_s^b \varphi'(t) dt \right) ds = -\int_a^b (g(s)(\varphi(b) - \varphi(s))) ds \\ &= \int_a^b g(s) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien que $g = f'$ au sens des distributions et donc $f \in W^{1,1}(]a, b[)$. ■

Corollaire I.13

Toute fonction f de $W^{1,1}(\]a, b[)$ est égale presque partout à une fonction continue \tilde{f} sur $[a, b]$ et on a pour tous $x, y \in [a, b]$

$$\tilde{f}(y) = \tilde{f}(x) + \int_x^y f'(s) ds,$$

autrement dit, on a pour presque tous $x, y \in [a, b]$,

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(s) ds.$$

Preuve :

Soit $f \in W^{1,1}(\]a, b[)$. On introduit

$$g(t) = \int_a^t f'(s) ds.$$

- D'après le lemme I.12, la fonction g est continue, dans $W^{1,1}(\]a, b[)$ et sa dérivée au sens des distributions est f' . Ainsi, $f - g$ est une fonction dont la dérivée-distribution est nulle, on sait alors qu'il existe une constante C telle que $f - g = C$ presque partout. Si on pose $\tilde{f} = C + g$, on a bien montré que f coïncide avec la fonction continue \tilde{f} , presque partout.
- Par définition de \tilde{f} , il est clair que pour tout $x, y \in [a, b]$, on a

$$\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) = \left(C + \int_a^y f'(s) ds \right) - \left(C + \int_a^x f'(s) ds \right) = \int_x^y f'(s) ds.$$

■

3.1 Compacité

On dit qu'une application non-linéaire S d'un espace métrique X dans un espace métrique Y est compacte si l'image de tout borné par S est précompact.

Théorème I.14 (Point fixe de Schauder)

Soit X un espace de Banach et C un convexe fermé non vide de X . Toute application continue et compacte S qui envoie C dans C admet un point fixe dans C .

3.2 Espaces de Sobolev**3.2.1 Définitions et premières propriétés**

Pour ces différents points, on peut se référer, par exemple, au livre [Bre83].

- Définitions
- Théorèmes de trace pour $W^{1,p}(\Omega)$
- Continuité de la trace par rapport au domaine
- Théorèmes de relèvement de la trace
- Définition de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ et caractérisations équivalentes dans le cas d'un ouvert régulier.

3.2.2 Champs L^p à divergence L^p

On définit l'espace

$$E_p = \{v \in (L^p(\Omega))^d, \operatorname{div} v \in L^p(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{E_p} = (\|v\|_{L^p} + \|\operatorname{div} v\|_{L^p})^{\frac{1}{p}}.$$

Cet espace est un Banach et nous avons le résultat de densité suivant :

Théorème I.15

Soit Ω un ouvert borné régulier. L'ensemble des champs de vecteurs de classe $(C^\infty(\overline{\Omega}))^d$ est dense dans E_p .

Pour démontrer ce résultat on utilise une conséquence du théorème de Hahn-Banach.

Lemme I.16

Soit E un espace de Banach et F un sous-espace de E . Alors F est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue sur E qui s'annule sur F est identiquement nulle.

Proposition I.17

Soit Ω un ouvert lipschitzien de \mathbb{R}^d . L'application γ_ν qui à $u \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^d$ associe $(u \cdot \nu)|_{\partial\Omega}$ (où ν est la normale sortante au bord de l'ouvert Ω) se prolonge en une application linéaire continue de $E(\Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et on a la formule de Stokes suivante :

$$\forall u \in E(\Omega), \forall w \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Omega} w \operatorname{div} u \, dx = \langle \gamma_\nu u, \gamma_0 w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}},$$

où γ_0 est l'opérateur de trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Première partie

Aspects théoriques

Chapitre II

DONNÉES RÉGULIÈRES

1 La méthode des caractéristiques

Soient Ω un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^d , et $v(t, x)$ un champ de vecteurs donné Lipschitzien de $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ dans \mathbb{R}^d vérifiant $v \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$. On se donne également une fonction réelle Lipschitzienne $c(t, x)$ définie sur $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$. On s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy pour l'équation de transport-réaction :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho + c\rho = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), & \text{pour tout } x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Sous les hypothèses de régularité sur le champ de vecteurs v ci-dessus, on peut résoudre aisément (II.1) par la méthode des caractéristiques. Celle-ci revient à constater que la solution de (II.1), si elle existe et si elle est suffisamment régulière, vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre le long des trajectoires du flot associé à v . Ces trajectoires sont appelées les *courbes caractéristiques* de l'équation.

De façon plus précise, on introduit la fonction X solution de :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s, t, x) = v(s, X(s, t, x)), \\ X(t, t, x) = x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

La fonction X n'est rien d'autre que la position à l'instant s d'une particule fluide située au point x à l'instant t . Cette fonction est appelée le **flot** associé au champ de vecteurs v .

On a alors le résultat suivant :

Proposition II.1

La fonction X est définie pour tout $x \in \Omega$ et tous $t, s \in \mathbb{R}$, et on a

$$X(s, t, x) \in \Omega.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

1. Pour tous $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ on a $X(t_1, t_2, X(t_2, t_3, \cdot)) = X(t_1, t_3, \cdot)$.
2. Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et $x \in \Omega$, on a

$$\partial_t X(s, t, x) + \nabla X(s, t, x) \cdot v(t, x) = 0,$$

soit encore

$$\partial_t X_i(s, t, x) + v(t, x) \cdot \nabla X_i(s, t, x) = 0,$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, X_i est la i -ième composante de X .

Preuve :

C'est ici qu'on utilise de façon cruciale la condition au bord sur le champ de vitesse.

Comme $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \bar{\Omega})$, c'est par définition la restriction à $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ d'une fonction \tilde{v} de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Comme $\tilde{v} \cdot \nu = v \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$, le champ de vitesse \tilde{v} est tangent à $\partial\Omega$, et donc les trajectoires de l'équation

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s, t, x) = \tilde{v}(s, X(s, t, x)), \\ X(t, t, x) = x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

posée sur \mathbb{R}^d tout entier, issues de points de $\partial\Omega$ restent dans $\partial\Omega$. Ceci montre que $X(s, t, x)$ ne peut se trouver sur le bord à aucun moment si $x \in \Omega$ (sinon par unicité toute la trajectoire serait dans $\partial\Omega$) et en particulier $s \mapsto X(s, t, x)$ ne peut quitter Ω .

Par ailleurs, il est clair que les trajectoires de l'équation définies par \tilde{v} qui sont dans Ω sont bien les trajectoires du système (II.2).

On a ainsi montré que les solutions de (II.2) sont globales, car le domaine Ω est borné et interdit donc toute explosion en temps fini pour le problème (II.3) avec données dans Ω .

Montrons les deux autres propriétés.

1. Ce n'est autre que la propriété de semi-groupe qui provient du théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $\varphi : s \mapsto X(s, t_2, X(t_2, t_3, x))$ est solution de l'équation différentielle caractéristique et vérifie $\varphi(t_2) = X(t_2, t_3, x)$, or $\psi : s \mapsto X(s, t_3, x)$ est aussi solution de l'équation caractéristique et vérifie $\psi(t_2) = X(t_2, t_3, x)$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces deux solutions sont nécessairement égales, ce qui donne le résultat.
2. Posons $\gamma(s, t, x) = \partial_t X(s, t, x) + \nabla X(s, t, x) \cdot v(t, x)$.

- On constate tout d'abord que $\gamma(t, t, x) = 0$ pour tout t et x . En effet, par définition on a $X(t, t, x) = x$ pour tout t et x , donc en dérivant par rapport au temps on obtient, en utilisant l'équation différentielle

$$0 = \partial_t X(t, t, x) + \partial_s X(t, t, x) = \partial_t X(t, t, x) + v(t, x).$$

De plus $\nabla X(t, t, x) = \text{Id}$, donc la relation précédente montre que $\gamma(t, t, x) = 0$ pour tout t et tout x .

- Montrons maintenant que γ vérifie une équation différentielle linéaire. On utilise pour cela les résultats classiques de dérivation des solutions d'une EDO par rapport à des paramètres et à la donnée initiale.

Il vient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds}\gamma(s, t, x) &= \frac{d}{ds}(\partial_t X(s, t, x) + \nabla X(s, t, x) \cdot v(t, x)) \\
 &= \frac{d}{dt}\partial_s X(s, t, x) + (\nabla \partial_s X(s, t, x)) \cdot v(t, x) \\
 &= \frac{d}{dt}(v(s, X(s, t, x))) + (\nabla(v(s, X(s, t, x)))) \cdot v(t, x) \\
 &= \nabla v(s, X(s, t, x)) \cdot \partial_t X(s, t, x) + \nabla v(s, X(s, t, x)) \cdot \nabla X(s, t, x) \cdot v(t, x) \\
 &= \nabla v(s, X(s, t, x)) \cdot \gamma(s, t, x).
 \end{aligned}$$

Ainsi $s \mapsto \gamma(s, t, x)$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre et de plus $\gamma(t, t, x) = 0$ donc γ est identiquement nulle. ■

Proposition II.2

Soit v un champ de vecteurs de classe C^1 de $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ dans \mathbb{R}^3 vérifiant la condition au bord $v \cdot \nu = 0$ et c une fonction réelle continue sur $\mathbb{R} \times \Omega$. Si ρ_0 est une fonction bornée de classe C^1 de Ω dans \mathbb{R} , alors l'unique solution de classe C^1 du problème linéaire (II.1) est donnée par

$$\rho(t, x) = \rho_0(X(0, t, x)) \times \exp\left(\int_0^t -c(s, X(s, t, x)) ds\right). \quad (\text{II.4})$$

Preuve :

1. Unicité :

Supposons qu'il existe deux solutions régulières ρ_1 et ρ_2 de (II.1), alors la différence $\rho = \rho_1 - \rho_2$ vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + c\rho = 0, \\ \rho(0) = 0. \end{cases}$$

En multipliant l'équation précédente par ρ et en intégrant sur Ω on obtient, comme $v \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho(t)\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \left(c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v\right) \rho^2 dx = 0.$$

Il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho(t)\|_{L^2}^2 \leq \left\| \left(c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v\right)^- \right\|_{L^\infty} \|\rho(t)\|_{L^2}^2,$$

et donc, en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient que

$$\|\rho(t)\|_{L^2} \leq \|\rho_0\|_{L^2} \times \exp\left(\int_0^t \left\| \left(c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v\right)^- \right\|_{L^\infty} ds\right),$$

ce qui montre en particulier que $\rho = 0$ et donc l'unicité des solutions de l'équation.

2. Existence :

Vérifions que la formule proposée dans l'énoncé vérifie bien l'équation.

On commence par montrer que pour toute fonction f régulière et tout $s \in \mathbb{R}$, on a

$$(\partial_t + v \cdot \nabla) \left(f(X(s, t, x)) \right) = \left(\partial_t X(s, t, x) + \nabla X(s, t, x) \cdot v(t, x) \right) \cdot \nabla f(X(s, t, x)) = 0,$$

d'après la propriété 2) de la Proposition II.1.

Ainsi, si on applique l'opérateur $(\partial_t + v \cdot \nabla)$ à la formule (II.4), on voit que le terme qui va concerner ρ_0 va s'annuler, de même que le terme de dérivation à l'intérieur de l'intégrale qui est dans l'exponentielle. Ainsi, il reste

$$\partial_t \rho + v(t, x) \cdot \nabla \rho = -c(t, x)\rho.$$

Le fait que $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ est clair. ■

Remarque II.3

On peut sans encombre appliquer la méthode précédente pour résoudre l'équation de transport avec un second membre $f(t, x)$ régulier (et un terme de réaction $c = 0$ pour simplifier). La solution s'écrit alors

$$\rho(t, x) = \rho_0(X(0, t, x)) + \int_0^t f(s, X(s, t, x)) ds.$$

Remarque II.4

Les résultats précédents permettent également de résoudre l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0,$$

il suffit pour cela de prendre $c = \operatorname{div} v$.

2 Le théorème du transport

On se place dans le cadre précédent et on note $\Phi_t(x) = X(t, 0, x)$, le flot issu de 0 associé au champ v .

Théorème II.5

Pour tout $\omega \subset \Omega$ ouvert, on note $\Omega_t = \Phi_t(\omega)$. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 dans les variables (t, X) définie sur $\mathbb{R} \times \Omega$. On a alors la formule suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(t, X) dX = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fv) \right) dX.$$

Preuve :

A t fixé, le changement de variables $X = \Phi_t(x)$ assure que

$$\int_{\Omega_t} f(t, X) dX = \int_{\omega} f(t, \Phi_t(x)) |J(t, x)| dx,$$

où $J(t, x)$ est le déterminant jacobien de l'application Φ_t au point x .

Par ailleurs, le déterminant est une application trilinéaire par rapport à la famille de ses 3 vecteurs lignes. Ainsi, en tenant compte de

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i(t, \Phi(t, x))),$$

on obtient, en omettant d'écrire les points où sont évaluées les dérivées,

$$\frac{d}{dt}J(t, x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Par la formule de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (v_k(t, \Phi(t, x))) = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial X_l}(t, \Phi(t, x)) \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_j}(t, x). \quad (\text{II.5})$$

Notons L_k et M_k les vecteurs lignes

$$L_k = \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_2}(t, x), \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_3}(t, x) \right),$$

$$M_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (v_k(t, \Phi(t, x))), \frac{\partial}{\partial x_2} (v_k(t, \Phi(t, x))), \frac{\partial}{\partial x_3} (v_k(t, \Phi(t, x))) \right).$$

La formule (II.5) montre que

$$M_k = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial X_l}(t, \Phi(t, x)) L_l,$$

ainsi, il vient

$$\begin{aligned} \det(M_1, L_2, L_3) &= \det \left(\sum_{l=1}^3 \frac{\partial v_1}{\partial X_l} L_l, L_2, L_3 \right) = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial v_1}{\partial X_l} \det(L_l, L_2, L_3) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial X_1} \det(L_1, L_2, L_3) = \frac{\partial v_1}{\partial X_1}(t, \Phi(t, x)) J, \end{aligned}$$

puisque le déterminant est trilineaire et alterné.

Par des calculs similaires, on a :

$$\det(L_1, M_2, L_3) = \frac{\partial v_2}{\partial X_2}(t, \Phi(t, x)) J, \quad \det(L_1, L_2, M_3) = \frac{\partial v_3}{\partial X_3}(t, \Phi(t, x)) J.$$

Or on a vu que l'on peut écrire

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \det(M_1, L_2, L_3) + \det(L_1, M_2, L_3) + \det(L_1, L_2, M_3).$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial J(t, x)}{\partial t} = (\operatorname{div} v)(t, \Phi(t, x)) J(t, x).$$

Par hypothèse, $\Phi(t)$ est un C^1 -difféomorphisme qui dépend continûment de t , donc son jacobien J ne s'annule pas, et prend donc toutes ses valeurs dans \mathbb{R}_*^+ ou dans \mathbb{R}_*^- , domaines sur lesquels la fonction "valeur absolue" est C^∞ et a pour dérivée la fonction "signe". Donc la fonction $|J|$ est dérivable, et

$$\frac{\partial |J|}{\partial t} = \operatorname{sgn}(J) \frac{\partial J}{\partial t} = \operatorname{sgn}(J) (\operatorname{div} v)(t, \Phi(t, x)) J = (\operatorname{div} v)(t, \Phi(t, x)) |J|.$$

En appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(t, X) dX &= \frac{d}{dt} \int_{\omega} f(t, \varphi(t, x)) |J(t, x)| dx \\ &= \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial t} (f(t, \varphi(t, x)) |J(t, x)|) dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f(t, \varphi(t, x)) |J(t, x)|) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, \Phi) |J| + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \cdot \nabla f |J| + f(t, \Phi) \frac{\partial}{\partial t} |J| \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \Phi) + v \cdot \nabla f + f(t, \Phi) (\operatorname{div} v)(t, \Phi(t, x)) \right) |J|. \end{aligned}$$

Par le changement de variables inverse du précédent, il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(t, X) dX &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f + f \operatorname{div} v \right) dX \\ &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} (fv) \right) dX. \end{aligned}$$

■

On déduit de ce résultat le théorème suivant.

Théorème II.6 (de Liouville)

Pour tout t, X , on note $j(t, X) = \operatorname{Jac}(\Phi_t^{-1})(X) = \frac{1}{J(t, \Phi_t^{-1}(X))}$. Alors la fonction j vérifie l'équation de continuité

$$\partial_t j + \operatorname{div} (jv) = 0,$$

et $j(0, x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$.

Preuve :

On applique le résultat précédent avec $f = j$ et on note que

$$\int_{\Omega_t} j(t, X) dX = \int_{\Omega_t} \operatorname{Jac}(\Phi_t^{-1})(X) dX = \int_{\omega} 1 dx = |\omega|,$$

est une quantité indépendante du temps.

■

Remarque II.7

Dans le cas, assez important, où le champ de vecteurs considéré est à divergence nulle, on obtient $J(t, x) = 1$ pour tout (t, x) et $j(t, X) = 1$.

3 Plus loin que Cauchy-Lipschitz

On sait bien que la continuité de v est suffisante pour avoir l'existence locale de solutions à l'équation différentielle (II.2). En revanche, l'unicité n'est pas assurée et donc aussi la régularité de la solution en fonction des données. Il est donc, *a priori* hors de question de pouvoir définir le flot X associé à v .

On peut quand même aller un peu plus loin. Pour cela on se donne une fonction ω vérifiant

$$\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ est continue, croissante, nulle en } 0 \text{ et strictement positive ailleurs telle que } \int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)} = +\infty. \quad (\text{II.6})$$

Définition II.8

Soient (X, d) un espace métrique et E un espace de Banach. On note $\mathcal{C}_\omega(X, E)$ l'ensemble des fonctions u continues et bornées de (X, d) dans E et telles que

$$\|u\|_{\mathcal{C}_\omega} = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y \in X} \frac{\|u(x) - u(y)\|_E}{\omega(d(x, y))} < +\infty.$$

Muni de cette norme, l'espace \mathcal{C}_ω est un espace de Banach.

Théorème II.9 (Chemin, Lerner [CL95, Che04])

Soient E un Banach, Ω un ouvert de E , I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Soit $v \in L^1_{loc}(I, \mathcal{C}_\omega(\Omega, E))$, avec ω vérifiant (II.6).

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et une unique application Lipschitzienne x telle que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds,$$

pour tout $t \in J$.

Admettons pour le moment le résultat suivant qui est une généralisation du lemme de Gronwall.

Lemme II.10 (Lemme d'Osgood)

Soit ω vérifiant (II.6) et u une fonction mesurable positive telle que

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t \alpha(s)\omega(u(s)) ds, \text{ pour presque tout } t \in I,$$

où $a \geq 0$ et $\alpha \in L^1_{loc}(I)$ est une fonction positive.

Alors, si $a = 0$ la fonction u est nulle presque partout. Si a est non nul, on a l'estimation

$$\Omega(u(t)) - \Omega(a) \leq \int_{t_0}^t \alpha(s) ds,$$

où

$$\Omega(x) = \int_1^x \frac{ds}{\omega(s)}.$$

Preuve (du Théorème):

- Pour l'unicité, il suffit de soustraire deux solutions, de prendre la norme et d'appliquer le lemme de Gronwall.
- Pour l'existence, on effectue un schéma de Picard

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, x_k(s)) ds.$$

Pour J assez petit, on peut assurer le fait que les fonctions x_k restent dans le domaine de définition de v et forment une suite bornée dans $L^\infty(J)$. Ensuite, on pose

$$\rho_{k,n}(t) = \|x_{k+n}(t) - x_k(t)\|_E.$$

Il vient en soustrayant deux itérations de Picard

$$0 \leq \rho_{k+1,n}(t) \leq \int_{t_0}^t \alpha(s)\omega(\rho_{k,n}(s)) ds.$$

On pose maintenant $\rho_k(t) = \sup_n \rho_{k,n}(t)$ et $\tilde{\rho}(t) = \sup_k \rho_k(t)$. Comme ω est croissante, il vient

$$0 \leq \rho_{k+1}(t) \leq \int_{t_0}^t \alpha(s) \omega(\rho_k(s)) ds.$$

En passant à la limite supérieure, par convergence dominée par exemple, on trouve :

$$0 \leq \tilde{\rho}(t) \leq \int_{t_0}^t \alpha(s) \omega(\tilde{\rho}(s)) ds,$$

et donc $\tilde{\rho} = 0$ d'après Gronwall. Ainsi, pour tout $t \in J$, la suite $(x_k(t))_k$ est de Cauchy et donc convergente. Il est ensuite aisé de passer à la limite dans la formulation intégrale. ■

Il nous reste à démontrer le Lemme II.10.

Preuve (du Lemme):

- On commence par supposer $a > 0$. On pose alors $h(t) = a + \int_{t_0}^t \alpha(s) \omega(u(s)) dx$ qui est une fonction dans $W^{1,1}(I)$. De plus, on a

$$h'(t) = \alpha(t) \omega(u(t)) \leq \alpha(t) \omega(h(t)),$$

car ω est croissante et α positive. On en déduit que

$$(\Omega \circ h)'(t) \leq \alpha(t),$$

et donc par intégration

$$\Omega(h(t)) \leq \Omega(a) + \int_{t_0}^t \alpha(s) ds.$$

Mais par ailleurs, Ω est elle aussi croissante donc il vient

$$\Omega(u(t)) \leq \Omega(a) + \int_{t_0}^t \alpha(s) ds,$$

ce qui donne l'estimation attendue.

- Si $a = 0$, il est clair que u vérifie l'hypothèse pour n'importe quelle valeur strictement positive de a , on a donc l'estimation

$$\Omega(t) \leq \Omega(a) + \int_{t_0}^t \alpha(s) ds.$$

Si on fait tendre a vers 0, on a $\Omega(a) \rightarrow -\infty$, et on obtient donc que $\forall t \in I$, $\Omega(u(t)) = -\infty$, c'est-à-dire $u(t) = 0$. ■

En guise d'exemple au théorème précédent, on peut citer à nouveau [CL95]. D'après Fujita et Kato pour tout $v_0 \in (H^{\frac{d}{2}-1}(\Omega))^d$ à divergence nulle, il existe une unique solution maximale aux équations de Navier-Stokes $v \in L^2([0, T^*[, (H^{\frac{d}{2}}(\Omega))^d)$. Alors, Chemin et Lerner ont montré que $v \in L^1_{loc}([0, T^*[, \mathcal{C}_{\omega_\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ avec $\omega_\varepsilon(s) = s(1 - \log s)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Pour un tel champ de vecteurs, on peut donc définir le flot associé d'après le théorème ci-dessus.

4 Solutions faibles

La méthode des caractéristiques présentée ci-dessus ne peut fonctionner que si le champ de vecteurs v et la donnée initiale ρ_0 sont suffisamment réguliers (au moins lipschitziens). On obtient alors des solutions au sens classique de l'équation de transport.

Néanmoins, dans beaucoup d'applications (par exemple en mécanique des fluides) les données initiales ne sont pas régulières. Par exemple celle-ci peut prendre deux valeurs distinctes si elle modélise la densité dans un mélange

de deux fluides. Par ailleurs, le champ de vitesse peut lui aussi ne pas être régulier. Dans l'étude des équations de Navier-Stokes on trouve typiquement des champs v dans l'espace $L^2(]0, T[, (H^1(\Omega))^d)$.

On est donc amenés à s'intéresser à la notion de solution faible de l'équation de transport.

Définition II.11 (Solution faible - première version)

Soient Ω un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^d , $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $v \in L^1(]0, T[, (L^1(\Omega))^d)$ tel que $\operatorname{div} v \in L^1(]0, T[\times \Omega)$ et $v \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$ et enfin $c \in L^1(]0, T[\times \Omega)$.

On dit qu'une fonction $\rho \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)$ est solution faible de (II.1) si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \bar{\Omega})$ telle que $\varphi(T) = 0$ on a

$$\int_0^T \int_\Omega \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} v - c) \varphi \right) dt dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0, \cdot) dx = 0. \quad (\text{II.7})$$

On se contentera dans ce cours de la théorie du transport pour des données initiales L^∞ mais il est possible d'établir une théorie dans le cadre L^p , $p \in [1, +\infty[$ (voir par exemple [DL89]).

Proposition II.12

Toute solution faible ρ peut être modifiée sur un ensemble de mesure nulle de sorte que $\rho(t) \in L^\infty(\Omega)$ pour tout t et telle que ρ soit continue en temps à valeurs dans $L^\infty(\Omega)$ faible-*. De plus, on a $\rho(0, \cdot) = \rho_0$ et pour tous $t_1, t_2 \in [0, T]$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \bar{\Omega})$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} v - c) \varphi \right) dt dx + \int_\Omega \rho(t_1, x) \varphi(t_1, x) dx - \int_\Omega \rho(t_2, x) \varphi(t_2, x) dx = 0.$$

Preuve :

Soit $T^* \in]0, T[$. Pour tout $0 < \varepsilon < T - T^*$ et $t \in [0, T^*]$ on définit la fonction θ_ε^t qui est nulle sur $[0, t]$, qui vaut 1 sur $[t + \varepsilon, T^*]$ et qui est affine entre t et $t + \varepsilon$ (voir la figure II.1).

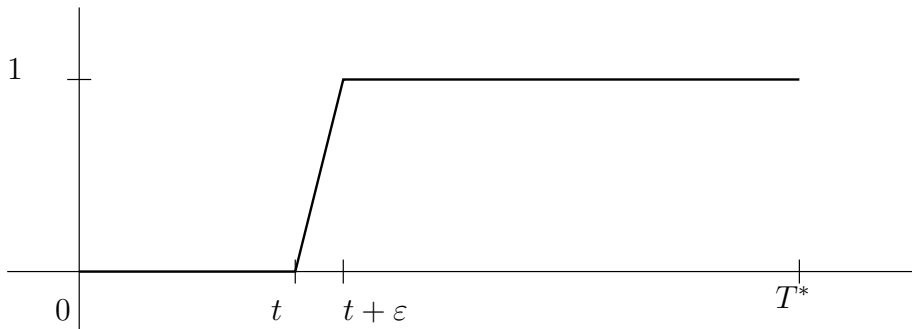


FIGURE II.1 – La fonction θ_ε^t

Pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ on définit sur $[0, T^*]$ la famille de fonctions

$$\rho_\varepsilon^\psi(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \int_t^{t+\varepsilon} \rho(s, x) \psi(x) dx ds,$$

qui est une fonction continue en temps et bornée pour tout ε et tout ψ . Montrons que cette famille de fonctions est équicontinue. Pour cela, on utilise la fonction test $\varphi(t, x) = (\theta_\varepsilon^{t_1}(t) - \theta_\varepsilon^{t_2}(t)) \psi(x)$ dans (II.7). On obtient

$$\rho_\varepsilon^\psi(t_1) - \rho_\varepsilon^\psi(t_2) = \int_0^T (\theta_\varepsilon^{t_1} - \theta_\varepsilon^{t_2}) g(t) dt, \quad (\text{II.8})$$

où g est la fonction de $L^1(]0, T[)$ définie par $g(t) = \int_\Omega \rho(v \cdot \nabla \psi + (\operatorname{div} v - c) \psi) dx$. Il vient

$$|\rho_\varepsilon^\psi(t_1) - \rho_\varepsilon^\psi(t_2)| \leq \int_{A_{\varepsilon, t_1, t_2}} g(t) dt,$$

où $A_{\varepsilon, t_1, t_2}$ est l'ensemble des temps où $\theta_{\varepsilon}^{t_1} \neq \theta_{\varepsilon}^{t_2}$. Cet ensemble vérifie $|A_{\varepsilon, t_1, t_2}| \leq |t_1 - t_2| + \varepsilon$. Ainsi on obtient l'équi-continuité de la famille $\rho_{\varepsilon}^{\psi}$.

D'après le théorème d'Ascoli, il existe une sous-famille, toujours notée $\rho_{\varepsilon}^{\psi}$ pour simplifier, qui converge uniformément sur $[0, T^*]$ vers une fonction continue $\rho^{\psi}(t)$.

Pour toute fonction $\eta \in \mathcal{C}_c^1(]0, T^*[)$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} \eta(t) \rho_{\varepsilon}^{\psi}(t) dt &= \int_{\Omega} \int_0^{T^*} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \rho(s, x) \psi(x) \eta(t) dt ds dx \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T \rho(s, x) \psi(x) \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{s-\varepsilon}^s \eta(t) dt \right) ds dx \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_0^T \eta(s) \rho(s, x) \psi(x) dx ds. \end{aligned}$$

Si on passe à la limite dans le premier terme on a obtenu

$$\int_0^{T^*} \eta(t) \rho^{\psi}(t) dt = \int_{\Omega} \int_0^T \eta(s) \rho(s, x) \psi(x) dx ds,$$

et donc la limite ρ^{ψ} ne dépend pas de la sous-suite choisie, ce qui montre la convergence uniforme de toute la suite $\rho_{\varepsilon}^{\psi}(t)$ vers $\rho^{\psi}(t)$ pour tout ψ .

Enfin, t étant fixé, il est clair que $|\rho^{\psi}(t)| \leq C \|\rho\|_{L^{\infty}} \|\psi\|_{L^1}$ et que l'application $\psi \mapsto \rho^{\psi}(t)$ est linéaire. Il existe donc, par le théorème de représentation de Riesz, un unique $\rho_t \in L^{\infty}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \rho_t(x) \psi(x) dx = \rho^{\psi}(t), \quad \text{et} \quad \|\rho_t\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|\rho\|_{L^{\infty}(\Omega)},$$

et comme $t \mapsto \rho^{\psi}(t)$ est continue, on a bien la continuité L^{∞} -faible étoile de $t \mapsto \rho_t$. Par ailleurs, en reprenant un calcul ci-dessus on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho_t(x) \varphi(t, x) dt dx = \int_0^T \int_{\Omega} \rho(t, x) \varphi(t, x) dt dx,$$

pour toute fonction φ régulière, ce qui montre que $\rho(t, x) = \rho_t(x)$ pour presque tout (t, x) .

La formulation faible entre les instants t_1 et t_2 est alors immédiate en passant à la limite dans (II.8). ■

4.1 Existence dans le cas général

En régularisant les données et en utilisant la méthode des caractéristiques introduites précédemment, il est assez aisé de construire des solutions faibles de l'équation de transport. Plus précisément on a le résultat suivant.

Théorème II.13

Pour toutes données Ω , ρ_0 , v et c comme dans la définition II.11, telles que de plus $c \in L^1(]0, T[, L^{\infty}(\Omega))$, il existe au moins une solution faible $\rho \in L^{\infty}(]0, T[\times \Omega)$ de l'équation de transport (II.1).

Preuve :

On peut montrer (Cf. par exemple un résultat similaire dans [BF06]) que l'ensemble des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^{∞} par rapport à (t, x) à support compact est dense dans l'ensemble des champs de vecteurs de $L^1(]0, T[, (L^1(\Omega))^d)$ à divergence L^1 et tels que $v \cdot \nu = 0$ sur le bord. Il existe donc une suite de champs de vecteurs réguliers $(v_n)_n$ vérifiant les conditions aux limites, qui converge vers v dans L^1 et tel que $\text{div } v_n$ converge vers $\text{div } v$ dans L^1 . De même on considère une famille $(c_n)_n$ de fonctions régulières, bornée dans $L^1(]0, T[, L^{\infty}(\Omega))$ et qui converge vers c dans $L^1(]0, T[\times \Omega)$.

De la même façon, par densité, il existe une suite de fonctions $(\rho_n^0)_n$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, bornée dans $L^{\infty}(\Omega)$ et qui converge vers ρ_0 dans tous les espaces $L^p(\Omega)$ avec $p < +\infty$ et dans $L^{\infty}(\Omega)$ faible-*.

On peut alors utiliser la proposition II.2 qui montre, pour tout n , l'existence d'une solution classique ρ^n de l'équation de transport pour les données v_n , c_n et ρ_0^n . Par ailleurs, d'après cette proposition on a

$$\|\rho^n\|_{L^\infty(]0,T[,L^\infty(\Omega))} \leq \|\rho_0^n\|_{L^\infty} e^{\|c_n\|_{L^1(L^\infty)}} \leq C.$$

Il existe donc une fonction $\rho \in L^\infty(]0,T[\times \Omega)$ et une sous-suite (toujours notée $(\rho^n)_n$ pour simplifier les notations) telle que

$$\rho^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \rho, \text{ dans } L^\infty(]0,T[\times \Omega) \text{ faible-}^*$$

Par ailleurs, comme ρ^n , v_n et c_n sont réguliers et vérifient l'équation de transport au sens classique ainsi que la condition au bord $v_n \cdot \nu = 0$, ce sont aussi des solutions faibles. Il vient donc pour toute fonction test φ

$$\int_0^T \int_\Omega \rho^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_n \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} v_n - c_n) \varphi \right) dt dx + \int_\Omega \rho_0^n \varphi(0, \cdot) dx = 0.$$

Par construction $(\rho_0^n)_n$ converge vers ρ_0 dans $L^1(\Omega)$ par exemple, ce qui permet de passer à la limite dans le second terme. Pour le premier terme, la convergence faible- * de $(\rho^n)_n$ dans L^∞ et la convergence forte de $(v_n)_n$, $(\operatorname{div} v_n)_n$ et $(c_n)_n$ dans L^1 permettent de passer également à la limite. Ceci montre que la fonction limite ρ est bien une solution faible de l'équation de transport attendue. ■

4.2 Le cas d'un champ régulier

On a vu que si ρ_0 , v et c sont réguliers alors il y a une unique solution régulière à notre problème donnée par (II.4). Cette solution régulière est alors également une solution faible du problème.

Proposition II.14

On se donne $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, et on suppose que v et c sont réguliers. Alors, la formule

$$\rho(t, x) = \rho_0(X(0, t, x)) \times \exp\left(-\int_0^t c(s, X(s, t, x)) ds\right),$$

définit une fonction $\rho \in L^\infty(]0,T[\times \Omega)$ qui est l'unique solution faible de l'équation de transport.

Preuve :

On approche la donnée ρ_0 par une suite de fonctions régulières $(\rho_0^n)_n$ qui converge dans L^∞ faible- * et dans tous les L^q vers ρ_0 . La solution $\rho^n(t, x) = \rho_0^n(X(0, t, x)) \exp^{-\int_0^t c(s, X(s, t, x)) ds}$ de l'équation de transport associée à ces données converge alors également faible étoile vers la solution ρ du problème limite. Il reste donc à identifier cette limite ρ .

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[\times \Omega)$, on a par changement de variables en x pour tout t

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \rho_0^n(X(0, t, x)) \varphi(t, x) dt dx &= \int_0^T \int_\Omega \rho_0^n(y) \varphi(t, X(t, 0, y)) J(t, y) dt dy \\ &= \int_\Omega \rho_0^n(y) \left(\int_0^T \varphi(t, X(t, 0, y)) J(t, y) dt \right) dy. \end{aligned}$$

L'intégrale en temps est une fonction de y dans $L^1(\Omega)$, on peut donc passer à la limite en n . On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \rho_0^n(X(0, t, x)) \varphi(t, x) dt dx &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_\Omega \rho_0(y) \left(\int_0^T \varphi(t, X(t, 0, y)) J(t, y) dt \right) dy \\ &= \int_0^T \int_\Omega \rho_0(X(0, t, x)) \varphi(t, x) dt dx \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau le théorème de Fubini et un changement de variables inverse.

Il reste à démontrer l'unicité. Cette propriété, duale de celle de l'existence, se démontre grâce à la remarque II.3. En effet, si ψ est une fonction régulière sur $]0,T[\times \Omega$, il existe une fonction φ régulière telle que $\varphi(T) = 0$ et $\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} v - c) \varphi = \psi$.

Ainsi, si ρ est n'importe quelle solution faible pour la donnée initiale $\rho_0 = 0$, on met cette fonction φ dans la formulation faible et il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho \psi \, dt \, dx = 0,$$

ceci étant vrai pour tout ψ régulier, on trouve bien $\rho = 0$. ■

Citons maintenant quelques propriétés de ces solutions faibles **dans le cas où le terme de réaction c est nul**.

Proposition II.15

On suppose ici que $c = 0$.

Soit $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, v régulier et ρ l'unique solution faible de l'équation de transport associée.

1. *Pour toute fonction continue bornée β la fonction $\beta(\rho)$ est l'unique solution faible de l'équation de transport associée à la donnée initiale $\beta(\rho_0)$.*
2. *L'application $t \mapsto \rho(t, \cdot)$ est bien définie pour tout t et continue à valeurs dans $L^\infty(\Omega)$ faible étoile et $L^q(\Omega)$ fort pour tout $q \in [1, +\infty[$. En conséquence, la formulation faible est encore valable entre deux instants t_1 et t_2 quelconques dans $[0, T]$.*
3. *Si ρ_0^1 et ρ_0^2 sont deux données initiales bornées, et ρ_1, ρ_2 les solutions faibles associées, on a*

$$\rho_0^1 \leq \rho_0^2 \Rightarrow \rho_1 \leq \rho_2,$$

et $\rho_1 \rho_2$ est l'unique solution faible associée à la donnée initiale $\rho_0^1 \rho_0^2$.

4. *Dans le cas particulier où v est à divergence nulle alors :*

- *Pour tout intervalle I de \mathbb{R} , et pour tout $t \in [0, T]$, on a*

$$|\{x \in \Omega, \rho(t, x) \in I\}| = |\{x \in \Omega, \rho_0(x) \in I\}|.$$

- *Pour tout $q \in [1, +\infty]$ la norme L^q de $\rho(t)$ est égale pour tout $t \in [0, T]$ à celle de ρ_0 .*

Preuve :

1. Cette propriété est évidente d'après la formule définissant la solution ρ . Notons que ce résultat est encore vrai avec une fonction β mesurable et bornée (**attention** : on ne parle pas ici de la classe d'équivalence presque partout de β !!).
2. Tout d'abord, cela a bien un sens de parler de $\rho(t, \cdot)$ car $X(0, t, \cdot)$ est un difféomorphisme de Ω . Ensuite il est clair que

$$\|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty} = \|\rho_0\|_{L^\infty}.$$

Pour le cas $q \in [1, +\infty[$, on fait le changement de variable

$$\int_{\Omega} |\rho(t, x)|^q \, dx = \int_{\Omega} |\rho_0(X(0, t, x))|^q \, dx = \int_{\Omega} |\rho_0(y)|^q \text{Jac}(t, y) \, dy \leq C \int_{\Omega} |\rho_0(y)|^q \, dy.$$

De plus, on voit que la norme L^q de ρ est continue par rapport au temps. Ceci fournit la continuité en temps à valeurs dans tous les L^q .

3. Cette propriété se lit de façon évidente sur la formule qui définit les solutions faibles.
4. Comme $\text{div } v = 0$, le jacobien $J(t, x)$ vaut identiquement 1, la propriété cherchée est donc une conséquence de la formule de changement de variable.

■

4.3 Premiers éléments dans le cas général

Contrairement au cas où le champ est lipschitzien, il n'y a pas unicité dans le cas général d'un champ de vecteurs peu régulier. Le chapitre suivant sera consacré en grande partie à l'étude du problème de l'unicité et des propriétés qualitatives des solutions pour des champs peu réguliers.

Théorème II.16 (voir aussi [CL02])

Soit $v \in L^1(]0, T[, L^1(\Omega)^d)$ un champ de vecteurs à divergence dans $L^1(]0, T[\times \Omega)$ et tel que $v \cdot v = 0$ sur $\partial\Omega$ et $c \in L^1(]0, T[\times \Omega)$. On suppose que $(\operatorname{div} v - c)^+ \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$. Alors toute solution faible **bornée positive** de l'équation de transport pour la donnée initiale nulle est identiquement nulle sur $]0, T[\times \Omega$.

Preuve :

On définit la fonction numérique $\alpha(t) = \|(\operatorname{div} v(t) - c(t))^+\|_{L^\infty}$ puis on prend $\varphi(t, x) = (T - t)e^{-\int_0^t \alpha}$ dans la formulation faible (II.7) (avec $\rho_0 = 0$), on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \rho (\partial_t \varphi + (\operatorname{div} v - c)\varphi) dt dx = 0,$$

ce qui donne

$$\int_0^T \int_\Omega \rho e^{-\int_0^t \alpha} \underbrace{(-1 - (\alpha(t) - \operatorname{div} v + c)(T - t))}_{\leq -1 < 0} dt dx = 0.$$

Comme ρ est supposée positive, la fonction sous l'intégrale est négative ou nulle, elle est donc identiquement nulle. On obtient bien $\rho \equiv 0$. ■

Ce résultat *pourrait* impliquer l'unicité des solutions si la propriété dite **de renormalisation** était vraie, c'est-à-dire si pour toute solution bornée ρ de l'équation de transport pour la donnée ρ_0 alors ρ^2 est aussi solution pour la donnée initiale ρ_0^2 et le coefficient de réaction $2c$. Dans le cas de solutions régulières, cette propriété est triviale et résulte de la formule de dérivation des fonctions composées.

On va donner maintenant un contre-exemple à l'unicité des solutions bornées, qui montre donc également que la propriété de renormalisation n'est pas vraie en général pour les solutions faibles.

Théorème II.17 (N. Depauw, [Dep03])

Il existe un champ de vecteurs $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ borné, à divergence nulle telle que l'équation de transport

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0,$$

admette une solution bornée non triviale pour la donnée initiale nulle.

Le contre-exemple proposé est donné dans \mathbb{R}^2 tout entier mais en fait, on peut l'adapter à la géométrie d'un ouvert borné bien choisi (par exemple un pavé).

Preuve :

On se place en dimension $d = 2$ et on prend un temps final $T = 1$.

On note $Q =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^2$ le carré unité centré en 0. On pose ensuite

$$c(x) = \begin{cases} (-4x_2, 0) & \text{là où } |x_1| < |x_2| < \frac{1}{4} \\ (0, 4x_1) & \text{là où } |x_2| < |x_1| < \frac{1}{4} \\ (0, 0) & \text{en dehors de } \frac{1}{2}Q. \end{cases}$$

Ce champ de vecteurs est bien à divergence nulle au sens des distributions.

De plus, on peut définir un flot associé à c (qui est autonome). Il existe une application $\zeta_c(\tau, x)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $\tau \mapsto \zeta_c(\tau, x)$ est Lipschitzienne et telle que

$$\zeta_c(t, x) = x + \int_0^t c(\zeta_c(s, x)) ds.$$

De plus, l'application $\zeta_c(\frac{1}{2}, \cdot)$ a une géométrie simple : c'est l'identité en dehors de $\frac{1}{2}Q$ et la rotation d'angle $\pi/2$ dans le carré $\frac{1}{2}Q$.

On pose ensuite

$$b(x) = \sum_{k \in \Lambda} c(x - k),$$

où $\Lambda = \mathbb{Z}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est le réseau engendré par les coins de Q . En d'autres termes, tous les termes dans la somme qui définit b sont disjoints. Comme le flot associé à c est constant sur les bords des carrés, on voit que les choses se passent bien et qu'on peut définir sans problème le flot ζ_b associé au champ de vecteurs b . De plus, $\zeta_b(\frac{1}{2}, \cdot)$ agit comme l'identité en dehors du damier $\sum_{k \in \Lambda} k + \frac{1}{2}Q$ et comme la rotation d'angle $\pi/2$ dans chaque carré de ce damier.

Définissons maintenant le champ de vecteurs $v(t, x)$ pour $t \in]0, 1[$ par $v(t, x) = b(2^j x)$ pour $t \in I_j =]2^{-(j+1)}, 2^{-j}[$. Le flot du champ v (qui lui n'est plus autonome) est obtenu pour $t \in]0, 1[$ en collant bout à bout (par continuité aux instants $t_j = 2^{-j}$) les flots du champ b après scaling.

On voit donc qu'on définit un flot Lipschitzien en t sur les instants positifs $\Phi(t, s, x)$ pour tout $s, t \in]0, 1[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Ce flot vérifie

$$\Phi(t, s, x) = x + \int_s^t v(\tau, \Phi(\tau, s, x)) d\tau.$$

On construit maintenant l'unique fonction ρ_T \mathbb{Z}^2 -périodique définie par $\rho_0(x) = \text{sgn}(x_1 x_2)$ pour $x \in Q$. On définit maintenant pour tout $t > 0$:

$$\rho(t, x) = \rho_T(\Phi(1, t, x)).$$

Il est clair que ρ n'est pas identiquement nulle. On va maintenant s'assurer qu'elle vérifie l'équation de transport avec la donnée initiale nulle.

On veut donc démontrer que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi(T) = 0$, on a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t, x) (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) dt dx = 0 \left(= \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{0}_{\text{donnée initiale nulle}} \times \varphi(0, x) dx \right). \quad (\text{II.9})$$

Pour cela, on commence par constater que, ρ étant bornée et φ régulière à support compact, on a

$$\int_0^{t_j} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t, x) (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) dt dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0,$$

car $t_j \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow \infty$. Pour montrer (II.9), il suffit donc de montrer que

$$\int_{t_j}^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t, x) (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) dt dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

Utilisons la définition de ρ et le fait que pour tout $t > 0$, $x \mapsto \Phi(1, t, x)$ est bijective d'inverse $y \mapsto \Phi(t, 1, y)$ et de Jacobien 1. Il vient (via Fubini)

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t, x) (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) dt dx &= \int_{t_j}^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho_T(\Phi(1, t, x)) (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) dt dx \\ &= \int_{t_j}^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho_T(y) (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) (\Phi(t, 1, y)) dt dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \rho_T(y) \left(\int_{t_j}^T (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) (\Phi(t, 1, y)) dt \right) dy. \end{aligned}$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \Phi(t, 1, y)$ est Lipschitzienne, de sorte qu'en composant par φ qui est régulière on a

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, \Phi(t, 1, y)) = \partial_t \varphi + (\partial_t \Phi) \cdot \nabla \varphi = \partial_t \varphi(t, \Phi(t, 1, y)) + v(t, \Phi(t, 1, y)) \cdot \nabla \varphi(t, \Phi(t, 1, y)).$$

Il vient donc (en utilisant le fait que $\varphi(T, \cdot) = 0$)

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t, x) (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) dt dx &= - \int_{\mathbb{R}^2} \rho_T(y) \varphi(t_j, \Phi(t_j, 1, y)) dy. \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \rho_T(\Phi(1, t_j, x)) \varphi(t_j, x) dx. \end{aligned}$$

Posons maintenant $\rho_j(x) = \rho_T(\Phi(1, t_j, x))$. En utilisant la définition du champ v et de la donnée finale ρ_T , on montre *aisément* que $\rho_j(x) = \rho_T(2^j x)$. Par ailleurs, en utilisant le fait que ρ_T est bornée et que φ est régulière en temps, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\rho_T(2^j x)| |\varphi(t_j, x) - \varphi(0, x)| dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

On est donc ramené à démontrer que l'intégrale

$$I_j = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_T(2^j x) \varphi(x) dx,$$

tend vers 0 quand j tend vers l'infini pour toute fonction $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$. Pour cela, on effectue le changement de variables $y = 2^j x$ on trouve

$$I_j = 2^{-2j} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_T(y) \varphi(2^{-j} y) dy.$$

On utilise ensuite la \mathbb{Z}^2 -périodicité de ρ_T (et le fait que φ est à support compact) pour écrire

$$I_j = 2^{-2j} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \int_Q \rho_T(y) \varphi(2^{-j}(y+k)) dy.$$

Le point crucial consiste à observer maintenant que ρ_T est à moyenne nulle. On a donc

$$I_j = 2^{-2j} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \int_Q \rho_T(y) \left[\varphi(2^{-j}(y+k)) - \varphi(2^{-j}(k)) \right] dy.$$

Soit maintenant G une fonction positive, régulière à support compact et telle que $G \geq 1$ sur tous les points à distance inférieure ou égale à 1 du support de φ . Par le théorème des accroissements finis (et comme $\|\rho_T\|_\infty = 1$), on obtient la majoration

$$\begin{aligned} |I_j| &\leq C \|\nabla \varphi\|_\infty 2^{-2j} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \int_Q 2^{-j} G(2^{-j}(y+k)) dy \\ &\leq C \|\nabla \varphi\|_\infty 2^{-j} \int_{\mathbb{R}^d} G(x) dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

■

Remarque II.18

- Ce résultat implique que la solution ρ ainsi construite n'est pas une solution renormalisée (sinon $\rho^2 = 1$ serait solution pour la donnée initiale nulle, ce qui n'est évidemment pas le cas).
- Cela prouve également qu'il est important, dans la définition de la renormalisation, d'inclure aussi la propriété de renormalisation de la donnée initiale.

Chapitre III

SOLUTIONS RENORMALISÉES ET APPLICATIONS

1 Unicité des solutions faibles. Renormalisation

On a vu dans le chapitre précédent que, dès que le champ de vitesse n'est pas suffisamment régulier (disons qui n'est pas Lipschitzien), alors on peut perdre l'unicité des solutions faibles. Par ailleurs, comme on ne peut *a priori* plus définir un flot X on ne dispose plus de la formule qui donne *explicitement* la solution en fonction de la donnée initiale.

Pour obtenir l'unicité de telles solutions, on aurait envie de soustraire les deux formulations faibles qu'elles vérifient puis de prendre comme fonction test la différence de ces deux solutions comme on l'a fait pour les solutions régulières. Ceci semble bien sûr voué à l'échec ici car la différence de deux solutions faibles est seulement dans L^∞ ce qui est très insuffisant pour justifier ce calcul.

La méthode des solutions renormalisées (due à R. Di Perna et P.L. Lions, voir [DL89]) apporte un remède à ce problème en montrant que, sous des hypothèses de régularité de type Sobolev pour v (beaucoup plus faibles que Lipschitzien), le calcul ébauché ci-dessus peut être justifié, c'est-à-dire que pour toute solution faible ρ de l'équation, on a "le droit" de prendre n'importe quelle fonction de ρ comme fonction test dans l'équation. Le résultat exact est le suivant.

Théorème III.1

Soient Ω un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^d , $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $v \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$ tel que $v \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$ et enfin $c \in L^1(]0, T[\times \Omega)$. Si ρ est une solution faible quelconque dans $L^\infty(]0, T[\times \Omega)$ de l'équation de transport (II.1) pour ces données, on a :

- i) La fonction ρ est dans^a $C^0([0, T], L^p(\Omega))$ pour tout $p \in [1, +\infty[$, et de plus $\rho(0) = \rho_0$. Par ailleurs, pour tous $t_1, t_2 \in [0, T]$ et toute fonction test $\varphi \in C^1([0, T] \times \bar{\Omega})$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} v - c) \varphi \right) dt dx + \int_{\Omega} \rho(t_1, \cdot) \varphi(t_1, \cdot) dx = \int_{\Omega} \rho(t_2, \cdot) \varphi(t_2, \cdot) dx. \quad (\text{III.1})$$

- ii) Pour toute fonction numérique $\beta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 , la fonction $\beta(\rho)$ est une solution faible de l'équation de transport pour le champ de vecteurs v , un coefficient de réaction nul, le terme source $-\rho\beta'(\rho)c$ et la donnée initiale $\beta(\rho_0)$.

a. plus exactement : "admet un représentant p.p. dans"

Ce théorème fournit tout d'abord un résultat de régularité en temps sur les solutions faibles, qui sont *a priori* seulement mesurables et bornées. En outre, le point ii) est évidemment trivial pour les solutions de l'équation au sens classique. En effet, si ρ est une solution régulière de (II.1) alors on peut multiplier l'équation par $\beta'(\rho)$ ce qui donne de façon élémentaire

$$0 = \beta'(\rho) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + c\rho \right) = \frac{\partial \beta(\rho)}{\partial t} + v \cdot \nabla \beta(\rho) + c\rho\beta'(\rho).$$

Le point clé de la preuve du théorème ci-dessus consiste à justifier ce calcul pour des solutions non régulières.

Remarquons également que la conclusion du point ii) reste valable pour des fonctions $\beta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ telles que tout point de \mathbb{R} est un point de Lebesgue de β' , par exemple pour les fonctions $s \mapsto |s|$ ou $s \mapsto s^+$.

Preuve :

• **Étape 1 :** On note $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}, \bar{c}$ les prolongements par 0 respectifs de ρ_0, ρ et c en dehors de Ω . De même, on choisit $\bar{v} \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\mathbb{R}^d))^d)$ un prolongement (que l'on peut prendre à support compact) de v à tout \mathbb{R}^d . On peut le construire de sorte que $\operatorname{div} \bar{v} = 0$ en dehors de Ω .

D'après (II.7), on a pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} \bar{v} - \bar{c}) \varphi \right) dt dx + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_0 \varphi(0, \cdot) dx = 0. \quad (\text{III.2})$$

Remarquons également que $\bar{\rho}_0$ est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et même dans tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty[$. De même, $\bar{\rho} \in L^\infty(]0, T[, L^p(\mathbb{R}^d))$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Ainsi, $\bar{\rho}$ est une solution faible de l'équation de transport dans tout \mathbb{R}^d pour la donnée initiale $\bar{\rho}_0$, le champ de vecteurs \bar{v} et le coefficient de réaction \bar{c} .

• **Étape 2 :** On veut convoler l'équation avec un noyau de régularisation en espace. Considérons donc une fonction $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans la boule unité de \mathbb{R}^d , positive, radiale et telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$\bar{\rho}_\varepsilon(t) = \bar{\rho}(t) \star \eta_\varepsilon, \quad \text{et} \quad \bar{\rho}_0^\varepsilon = \bar{\rho}_0 \star \eta_\varepsilon.$$

On rappelle ici sans démonstration les propriétés de ces fonctions régularisées en espace.

Lemme III.2

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\|\bar{\rho}_\varepsilon\|_{L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}^d)} \leq \|\bar{\rho}\|_{L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}^d)}, \text{ et } \|\bar{\rho}_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|\bar{\rho}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

$$\forall k \geq 0, \bar{\rho}_\varepsilon \in L^\infty(]0, T[, \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)), \text{ et } \bar{\rho}_0^\varepsilon \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d).$$

Par ailleurs, on a les convergences

$$\bar{\rho}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\rho} \text{ dans } L^p(]0, T[\times \mathbb{R}^d) \text{ pour tout } p < +\infty,$$

$$\bar{\rho}_0^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\rho}_0 \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^d) \text{ pour tout } p < +\infty,$$

ainsi que les convergences L^∞ faible-*

Pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^d)$, et pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on construit une nouvelle fonction test φ par

$$\varphi(t, x) = \psi(t, y)\eta_\varepsilon(x - y),$$

que l'on introduit dans la formulation (III.2). On intègre ensuite cette formulation par rapport à y , ce qui donne

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) \eta_\varepsilon(x - y) dt dx dy + \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_0(x) \psi(0, y) \eta_\varepsilon(x - y) dx dy \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x) \left[(\operatorname{div} \bar{v})(t, x) - \bar{c}(t, x) \right] \eta_\varepsilon(x - y) \psi(t, y) dt dx dy \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x) \psi(t, y) \bar{v}(t, x) \cdot \nabla_x (\eta_\varepsilon(x - y)) dt dx dy = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de $\bar{\rho}_\varepsilon$, le fait que $\nabla_x (\eta_\varepsilon(x - y)) = -\nabla_y (\eta_\varepsilon(x - y))$ et la parité du noyau η , il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon(t, y) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) dt dy + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_0^\varepsilon(y) \psi(0, y) dy + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{\rho}(\operatorname{div} \bar{v} - \bar{c})) \star \eta_\varepsilon \psi(t, y) dt dy \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x) \psi(t, y) \bar{v}(t, x) \cdot \nabla_y (\eta_\varepsilon(x - y)) dt dx dy = 0. \end{aligned}$$

L'idée est de "remplacer" $\bar{v}(t, x)$ dans le dernier terme par $\bar{v}(t, y)$ en rajoutant au second membre de l'équation le terme correcteur nécessaire. On obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon(t, y) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) dt dy + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_0^\varepsilon(y) \psi(0, y) dy + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{\rho}(\operatorname{div} \bar{v} - \bar{c})) \star \eta_\varepsilon \psi(t, y) dt dy \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x) \psi(t, y) \bar{v}(t, y) \cdot \nabla_y (\eta_\varepsilon(x - y)) dt dx dy \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x) \psi(t, y) (\bar{v}(t, x) - \bar{v}(t, y)) \cdot \nabla_y (\eta_\varepsilon(x - y)) dt dx dy. \end{aligned}$$

On peut maintenant intégrer par parties le quatrième terme par rapport à y (car \bar{v} est suffisamment régulier en espace et ψ est à support compact en y), ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon(t, y) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) dt dy + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_0^\varepsilon(y) \psi(0, y) dy + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{\rho}(\operatorname{div} \bar{v} - \bar{c})) \star \eta_\varepsilon \psi(t, y) dt dy \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x) \operatorname{div}_y (\bar{v}(t, y) \psi(t, y)) \eta_\varepsilon(x - y) dt dx dy \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x) \psi(t, y) (\bar{v}(t, x) - \bar{v}(t, y)) \cdot \nabla_y (\eta_\varepsilon(x - y)) dt dx dy. \end{aligned}$$

D'après la définition de $\bar{\rho}_\varepsilon$, on a finalement obtenu

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon(t, y) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) + \operatorname{div}_y(\bar{v}(t, y)\psi(t, y)) - \bar{c}(t, y)\psi(t, y) \right) dt dy + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_0^\varepsilon(y)\psi(0, y) dy = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} R_\varepsilon(t, y)\psi(t, y) dt dy, \quad (\text{III.3})$$

où on a noté pour tout (t, y) :

$$R_\varepsilon(t, y) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x)(\bar{v}(t, x) - \bar{v}(t, y)) \cdot \nabla_y(\eta_\varepsilon(x - y)) dx}_{=R_\varepsilon^1(t, y)} - \underbrace{\left[\bar{\rho}(\operatorname{div} \bar{v}) \right] \star \eta_\varepsilon}_{=R_\varepsilon^2(t, y)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x)(\bar{c}(t, x) - \bar{c}(t, y))\eta_\varepsilon(x - y) dx}_{=R_\varepsilon^3(t, y)} \quad (\text{III.4})$$

Comme (III.3) est vraie pour toute fonction test ψ , on a ainsi montré que $\bar{\rho}_\varepsilon$ est solution faible de l'équation

$$\frac{\partial \bar{\rho}_\varepsilon}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{\rho}_\varepsilon + \bar{c} \bar{\rho}_\varepsilon = -R_\varepsilon, \quad (\text{III.5})$$

avec la donnée initiale $\rho_\varepsilon(0) = \bar{\rho}_0^\varepsilon$.

• **Etape 3** : Il s'agit maintenant d'estimer le terme de reste R_ε . Le terme le plus délicat étant R_ε^1 qui doit être vu comme un commutateur entre l'opérateur différentiel peu régulier $\bar{v} \cdot \nabla$ et l'opérateur de convolution par le noyau η_ε , appliqué à $\bar{\rho}$. *A priori*, comme $\bar{\rho}$ est seulement dans $L^\infty(]0, T[\times \Omega)$, ce commutateur semble vivre dans un espace de Sobolev d'exposant négatif ce qui ne permettrait pas d'avancer dans l'étude. En fait, comme souvent dès que l'on travaille sur des commutateurs entre opérateurs différentiels, on ne perd pas autant de dérivées que prévu. Le résultat exact est le suivant.

Lemme III.3

Sous les hypothèses du théorème, le terme R_ε tend vers 0 quand ε tend vers 0 dans l'espace $L^1(]0, T[\times \Omega)$.

Preuve :

Commençons par étudier le terme R_ε^1 qui intervient dans la définition de R_ε . En explicitant le terme en η_ε et en effectuant le changement de variables $z = \frac{x-y}{\varepsilon}$ dont le jacobien est $\frac{1}{\varepsilon^d}$, il vient

$$R_\varepsilon^1(t, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}(t, x) \frac{\bar{v}(t, y) - \bar{v}(t, x)}{\varepsilon} \cdot \nabla \eta \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon^d} dx = \int_{|z| \leq 1} \bar{\rho}(t, y + \varepsilon z) \frac{\bar{v}(t, y) - \bar{v}(t, y + \varepsilon z)}{\varepsilon} \cdot \nabla \eta(z) dz.$$

Commençons par supposer que $\bar{\rho}$ et \bar{v} sont très réguliers en temps et en espace, alors la fonction de z sous le signe intégral ci-dessus est bornée par $\|\bar{\rho}\|_\infty \|\nabla \bar{v}\|_\infty \|\nabla \eta\|_\infty$ et converge quand ε tend vers 0 et pour tout (t, y, z) vers

$$-\bar{\rho}(t, y)(\nabla \bar{v}(t, y) \cdot z) \cdot \nabla \eta(z).$$

Ainsi par convergence dominée, nous avons

$$R_\varepsilon^1(t, y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\bar{\rho}(t, y) \int_{|z| \leq 1} (\nabla \bar{v}(t, y) \cdot z) \cdot \nabla \eta(z) dz.$$

En intégrant par parties en z dans cette dernière intégrale on trouve que la limite de $R_\varepsilon^1(t, y)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t, y) \int_{|z| \leq 1} \eta(z) \operatorname{div}_z (\nabla \bar{v}(t, y) \cdot z) dz &= \bar{\rho}(t, y) \operatorname{Tr}(\nabla \bar{v}(t, y)) \int_{|z| \leq 1} \eta(z) dz \\ &= \bar{\rho}(t, y)(\operatorname{div} \bar{v})(t, y). \end{aligned}$$

Par convergence dominée à nouveau, cela montre bien que R_ε^1 tend vers $\bar{\rho}(\operatorname{div} \bar{v})$ dans $L^1(]0, T[, L^1(\mathbb{R}^d))$ sous l'hypothèse de régularité de $\bar{\rho}$ et de \bar{v} .

Par ailleurs, le terme R_ε^2 converge également vers $\bar{\rho}(\operatorname{div} \bar{v})$ dans $L^1(]0, T[\times\Omega)$.

De même, si on suppose que \bar{c} est continu à support compact, alors le terme R_ε^3 se majore par

$$\|R_\varepsilon^3\|_{L^1} \leq \|\bar{\rho}\|_{L^\infty} \omega_\varepsilon(\varepsilon),$$

où ω est le module d'uniforme continuité de \bar{c} .

Ainsi, on a démontré que si $\bar{\rho}$, \bar{v} et \bar{c} sont suffisamment réguliers on a bien la convergence vers 0 de $R_\varepsilon = R_\varepsilon^1 - R_\varepsilon^2 + R_\varepsilon^3$ dans L^1 .

Si $\bar{\rho}$ et \bar{v} ont seulement la régularité du théorème, alors on a

$$\begin{aligned} |R_\varepsilon^1(t, y)| &\leq C \int_{|z|\leq 1} |\bar{\rho}(t, y + \varepsilon z)| \left| \frac{\bar{v}(t, y) - \bar{v}(t, y + \varepsilon z)}{\varepsilon} \cdot \nabla \eta(z) \right| dz \\ &\leq C \|\bar{\rho}\|_{L^\infty} \|\nabla \eta\|_{L^\infty} \int_{|z|\leq 1} \left| \frac{\bar{v}(t, y) - \bar{v}(t, y + \varepsilon z)}{\varepsilon} \right| dz, \end{aligned}$$

d'où il vient

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |R_\varepsilon^1(t, y)| dt dy \leq C \|\bar{\rho}\|_{L^\infty} \|\nabla \eta\|_{L^\infty} \int_{|z|\leq 1} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\bar{v}(t, y) - \bar{v}(t, y + \varepsilon z)}{\varepsilon} \right| dt dy \right) dz.$$

Pour tout $z \in B(0, 1)$ et $\varepsilon > 0$ fixés, en utilisant la formule de Taylor (d'abord pour des \bar{v} réguliers puis en raisonnant par densité), on voit que l'intégrale en (t, y) dans le membre de droite ci-dessus est majorée par

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \bar{v}(t, x)| dt dx.$$

Ainsi, on a montré une borne uniforme en ε qui s'écrit

$$\|R_\varepsilon^1\|_{L^1(]0, T[\times\mathbb{R}^d)} \leq C \|\bar{\rho}\|_{L^\infty} \|\nabla \eta\|_{L^\infty} \|\nabla \bar{v}\|_{L^1(]0, T[\times\mathbb{R}^d)}.$$

De la même façon par l'inégalité de Young on obtient

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |R_\varepsilon^2(t, y)| dt dy \leq \int_0^T \|\bar{\rho}(t) \operatorname{div} \bar{v}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} dt \leq \|\bar{\rho}\|_{L^\infty} \|\operatorname{div} \bar{v}\|_{L^1}.$$

Enfin, concernant le troisième terme, l'inégalité de Young nous fournit encore

$$\|R_\varepsilon^3\|_{L^1} \leq \|\bar{\rho}\|_{L^\infty} \|\bar{c}\|_{L^1}.$$

En réalité, on obtient également pour tout $1 < p < +\infty$ (et p' l'exposant conjugué) les estimations

$$\begin{aligned} \|R_\varepsilon^1\|_{L^1} + \|R_\varepsilon^2\|_{L^1} &\leq C \|\nabla \eta\|_{L^\infty} \|\bar{\rho}\|_{L^p} \|\nabla \bar{v}\|_{L^{p'}}, \\ \|R_\varepsilon^3\|_{L^1} &\leq C \|\bar{\rho}\|_{L^p} \|\bar{c}\|_{L^{p'}}. \end{aligned}$$

On conclut alors par un argument de densité. En effet, on a montré que l'application bilinéaire Ψ_ε qui à $(\bar{\rho}, \bar{v}) \in L^\infty(]0, T[\times\mathbb{R}^d) \times L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\mathbb{R}^d))^d)$ associe le terme $R_\varepsilon^1 - R_\varepsilon^2 \in L^1(]0, T[\times\mathbb{R}^d)$ est continue pour les topologies de cet espace mais aussi pour la topologie de $L^p(]0, T[\times\Omega) \times L^{p'}(]0, T[, (W^{1,p'}(\mathbb{R}^d))^d)$ **uniformément** en ε et que par ailleurs $\Psi_\varepsilon(\bar{\rho}, \bar{v}) \rightarrow 0$ quand ε tend vers 0 dès que $\bar{\rho}$ et \bar{v} sont suffisamment réguliers.

Détaillons l'argument. Soient $(\bar{\rho}, \bar{v}) \in L^\infty(]0, T[\times\mathbb{R}^d) \times L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\mathbb{R}^d))^d)$. Pour tout $\eta > 0$, il existe $v_\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, T[\times\mathbb{R}^d)$ tel que $\|\bar{v} - v_\eta\|_{L^1(W^{1,1})} \leq \eta$. Ensuite, il existe $\rho_\eta \in L^2(]0, T[\times\mathbb{R}^d)$ tel que $\|\bar{\rho} - \rho_\eta\|_{L^2} \leq \frac{\eta}{\|v_\eta\|_{L^2(H^1)}}$. On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|\Psi_\varepsilon(\bar{\rho}, \bar{v})\|_{L^1} &\leq \|\Psi_\varepsilon(\bar{\rho}, \bar{v}) - \Psi_\varepsilon(\bar{\rho}, v_\eta)\|_{L^1} + \|\Psi_\varepsilon(\bar{\rho}, v_\eta) - \Psi_\varepsilon(\rho_\eta, v_\eta)\|_{L^1} + \|\Psi_\varepsilon(\rho_\eta, v_\eta)\|_{L^1} \\ &\leq C \|\bar{\rho}\|_{L^\infty} \|\bar{v} - v_\eta\|_{L^1(W^{1,1})} + C \|\bar{\rho} - \rho_\eta\|_{L^2} \|v_\eta\|_{L^2(H^1)} + \|\Psi_\varepsilon(\rho_\eta, v_\eta)\|_{L^1} \\ &\leq C \|\bar{\rho}\|_{L^\infty} \eta + C \eta + \|\Psi_\varepsilon(\rho_\eta, v_\eta)\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Pour tout $\eta > 0$, comme ρ_η et v_η sont réguliers, le dernier terme tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On obtient donc

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\Psi_\varepsilon(\bar{\rho}, \bar{v})\|_{L^1} \leq C\|\bar{\rho}\|_{L^\infty}\eta + C\eta,$$

ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, on a bien démontré la convergence vers 0 de $R_\varepsilon^1 - R_\varepsilon^2$ pour tout $\bar{\rho}$ et \bar{v} .

On raisonne de la même façon pour le terme R_ε^3 . ■

Revenons maintenant à la preuve du théorème. Pour tout $\varepsilon > 0$, les fonctions $\bar{\rho}_\varepsilon$ sont dans $L^\infty(]0, T[, \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d))$ (d'après le lemme III.2) et vérifient l'équation (III.5) avec un second membre $-R_\varepsilon$ dans L^1 . Ceci prouve en particulier que $\frac{\partial \bar{\rho}_\varepsilon}{\partial t}$ est dans $L^1(]0, T[\times \Omega)$ et donc $\bar{\rho}_\varepsilon$ est dans l'espace $\mathcal{C}^0([0, T], L^1(\Omega))$.

Grâce à la régularité des différents termes on voit que la formulation (III.3) peut se prolonger par densité aux fonctions tests ψ dans l'espace

$$X = \left\{ \psi \in \mathcal{C}^0([0, T], L^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(]0, T[, \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)), \text{ telles que } \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^1(]0, T[\times \mathbb{R}^d) \right\}. \quad (\text{III.6})$$

• **Etape 4 :**

Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Pour tout $\delta > 0$ assez petit, on introduit la fonction $\theta_\delta(t)$ qui vaut 0 pour $t \leq t_1$ et $t \geq t_2$, qui vaut 1 sur l'intervalle $[t_1 + \delta, t_2 - \delta]$ et qui est affine sur $[t_1, t_1 + \delta]$ et $[t_2 - \delta, t_2]$. Pour toute fonction test $\varphi \in X$, on construit la fonction test $\psi(t, y) = \theta_\delta(t)\varphi(t, y)$ qui est également dans X . On met alors cette fonction ψ dans la formulation (III.3) et il vient

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \theta_\delta(t) \bar{\rho}_\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}\varphi) - \bar{c}\varphi \right) dt dy + \frac{1}{\delta} \int_{t_1}^{t_1+\delta} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon \varphi dy \right) dt - \frac{1}{\delta} \int_{t_2-\delta}^{t_2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon \varphi dy \right) dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \theta_\delta(t) R_\varepsilon \varphi dt dy. \end{aligned}$$

Il est clair que $\theta_\delta(t)$ converge vers 1 quand δ tend vers 0 pour tout $t \in [t_1, t_2]$, ce qui permet de passer à la limite aisément par rapport à δ dans le premier terme et dans le second membre par convergence dominée. Enfin, comme $\bar{\rho}_\varepsilon \varphi$ est une fonction continue en temps à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, les termes avec les facteurs $\frac{1}{\delta}$ tendent respectivement vers

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon(t_1, \cdot) \varphi(t_1, \cdot) dy, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon(t_2, \cdot) \varphi(t_2, \cdot) dy.$$

Ainsi, on a obtenu pour toute fonction test $\varphi \in X$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}\varphi) - \bar{c}\varphi \right) dt dy + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon(t_1, \cdot) \varphi(t_1, \cdot) dy - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon(t_2, \cdot) \varphi(t_2, \cdot) dy = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} R_\varepsilon \varphi dt dy. \quad (\text{III.7})$$

En prenant $t_1 = 0$, $t_2 = T$ et une fonction test φ qui s'annule au temps T , et en comparant à (III.3), on obtient en particulier $\bar{\rho}_\varepsilon(t = 0) = \bar{\rho}_0^\varepsilon$.

• **Etape 5 :**

Soient maintenant $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Formons la différence entre la formulation (III.7) prise pour $\varepsilon = \varepsilon_1$ et celle pour $\varepsilon = \varepsilon_2$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{\rho}_{\varepsilon_1} - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} \bar{v} - \bar{c}) \varphi \right) dt dy + \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{\rho}_{\varepsilon_1}(t_1, \cdot) - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}(t_1, \cdot)) \varphi(t_1, \cdot) dy \\ - \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{\rho}_{\varepsilon_1}(t_2, \cdot) - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}(t_2, \cdot)) \varphi(t_2, \cdot) dy = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) \varphi dt dy. \end{aligned}$$

Or, nous avons vu que $\bar{\rho}_{\varepsilon_1}$ et $\bar{\rho}_{\varepsilon_2}$ sont régulières et plus précisément sont dans l'espace de fonctions tests X défini en (III.6). Ainsi nous pouvons prendre $\varphi = \bar{\rho}_{\varepsilon_1} - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}$ dans l'équation précédente. En utilisant (III.5), il vient

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{\rho}_{\varepsilon_1} - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}) (R_{\varepsilon_2} - R_{\varepsilon_1}) dt dy + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} (\operatorname{div} \bar{v} - 2\bar{c}) (\bar{\rho}_{\varepsilon_1} - \bar{\rho}_{\varepsilon_2})^2 dt dy \\ + \int_{\mathbb{R}^d} |\bar{\rho}_{\varepsilon_1}(t_1, \cdot) - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}(t_1, \cdot)|^2 dy - \int_{\mathbb{R}^d} |\bar{\rho}_{\varepsilon_1}(t_2, \cdot) - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}(t_2, \cdot)|^2 dy = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) (\bar{\rho}_{\varepsilon_1} - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}) dt dy, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, avec $t_1 = 0$ et en prenant le sup en t_2 :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\bar{\rho}_{\varepsilon_1}(t, \cdot) - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|\bar{\rho}_0^{\varepsilon_1} - \bar{\rho}_0^{\varepsilon_2}\|_{L^2}^2 + 4\|\bar{\rho}\|_{L^\infty} \|R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}\|_{L^1} + \int_0^T \int_\Omega |\operatorname{div} \bar{v} - 2\bar{c}| |\bar{\rho}_{\varepsilon_1}(t) - \bar{\rho}_{\varepsilon_2}(t)|^2 dx dt. \quad (\text{III.8})$$

D'après les lemmes III.2 et III.3, on sait que la suite $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans $L^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ et $(\bar{\rho}_0^\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, en particulier ces suites sont de Cauchy dans ces espaces. En conséquence, les deux premiers termes du membre de droite de (III.8) sont aussi petits que l'on veut pour ε_1 et ε_2 proches de 0.

Par ailleurs, quitte à prendre $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dans une suite qui tend vers 0 bien choisie, on a la convergence presque partout de $\bar{\rho}_{\varepsilon_1}$ et $\bar{\rho}_{\varepsilon_2}$ vers ρ (d'après la "réciproque" du théorème de Lebesgue). Par le théorème de convergence dominée (comme $\operatorname{div} \bar{v}$ et \bar{c} sont L^1), le troisième terme dans (III.8) peut également être rendu petit.

In fine, on a donc montré que, quitte à extraire une sous-suite (ce qu'on ne mentionne pas explicitement ici pour simplifier les écritures), la famille $(\bar{\rho}_\varepsilon)_\varepsilon$ est de Cauchy dans $C^0([0, T], L^2(\mathbb{R}^d))$. Ainsi $(\bar{\rho}_\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans $C^0([0, T], L^2(\mathbb{R}^d))$ mais sa limite ne peut être que $\bar{\rho}$ d'après le lemme III.2. Ceci prouve que la fonction limite $\bar{\rho}$ est bien dans l'espace $C^0([0, T], L^2(\mathbb{R}^d))$.

Il est maintenant aisé de passer à la limite dans (III.7) pour obtenir (III.1) en utilisant le lemme III.3. Ceci prouve la première partie du théorème.

Par ailleurs, comme $\bar{\rho}$ est nulle en dehors de Ω , la fonction ρ est bien dans $C^0([0, T], L^2(\Omega))$ et même dans $C^0([0, T], L^p(\Omega))$ pour tout $p < +\infty$ car elle est bornée par hypothèse.

• **Étape 6 :**

Soit f une fonction numérique réelle de classe C^1 . D'après ce qui précède si $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, alors $\psi = f(\bar{\rho}_\varepsilon)\varphi$ est dans l'espace X et donc peut être choisie comme fonction test dans (III.3). Par ailleurs, $\bar{\rho}_\varepsilon$ est suffisamment régulière pour justifier que l'on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \right) (f(\bar{\rho}_\varepsilon)\varphi) &= \varphi f'(\bar{\rho}_\varepsilon) \left(\frac{\partial \bar{\rho}_\varepsilon}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{\rho}_\varepsilon \right) + f(\bar{\rho}_\varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \varphi \right) \\ &= -\varphi f'(\bar{\rho}_\varepsilon)(R_\varepsilon + \bar{c}\bar{\rho}_\varepsilon) + f(\bar{\rho}_\varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \varphi \right). \end{aligned}$$

En reportant ce calcul dans (III.3), il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_\varepsilon f(\bar{\rho}_\varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} \bar{v}) \varphi \right) dt dy + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho}_0^\varepsilon f(\bar{\rho}_0^\varepsilon) \varphi(0, \cdot) dy \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (R_\varepsilon + \bar{c}\bar{\rho}_\varepsilon) (f(\bar{\rho}_\varepsilon) + \bar{\rho}_\varepsilon f'(\bar{\rho}_\varepsilon)) \varphi dt dy. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\beta \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $\beta(0) = 0$ (cette restriction sera levée par la suite). On pose $f(x) = \frac{\beta(x)}{x}$ qui est bien de classe C^1 . Avec ce choix de f , on a $f(x) + x f'(x) = \beta'(x)$ de sorte que la formule ci-dessus devient

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \beta(\bar{\rho}_\varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}\varphi) \right) dt dy + \int_{\mathbb{R}^d} \beta(\bar{\rho}_0^\varepsilon) \varphi(0, \cdot) dy = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (R_\varepsilon + \bar{c}\bar{\rho}_\varepsilon) \beta'(\bar{\rho}_\varepsilon) \varphi dt dy. \quad (\text{III.9})$$

Ceci montre, ε étant fixé, que l'équation (III.5) implique l'égalité suivante

$$\frac{\partial \beta(\bar{\rho}_\varepsilon)}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \beta(\bar{\rho}_\varepsilon) = -\beta'(\bar{\rho}_\varepsilon)(R_\varepsilon + \bar{c}\bar{\rho}_\varepsilon),$$

au sens des distributions. Autrement dit, on a justifié le calcul formel qui consiste à multiplier (III.5) par $\beta'(\bar{\rho}_\varepsilon)$.

Il suffit maintenant de montrer que l'on peut passer à la limite quand ε tend vers 0 dans (III.9). Comme on l'a vu plus haut la suite $(\bar{\rho}_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers $\bar{\rho}$ dans $C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^d))$ pour tout p fini et donc presque partout (à une sous-suite près). Ceci justifie le passage à la limite dans le premier terme de (III.9) en utilisant le théorème de convergence dominée. Le passage à la limite dans le second terme se fait exactement de la même façon en utilisant le lemme III.2. Enfin, le terme contenant R_ε dans le membre de droite dans (III.9) est majoré par

$$\left(\sup_{[-\|\bar{\rho}\|_\infty, \|\bar{\rho}\|_\infty]} |\beta'| \right) \|\varphi\|_{L^\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |R_\varepsilon| dt dy,$$

et donc converge vers 0 quand ε tend vers 0 d'après le lemme III.3. A la limite on a donc obtenu

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \beta(\bar{\rho}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}\varphi) \right) dt dy - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\rho} \beta'(\bar{\rho}) \bar{c} \varphi dt dy + \int_{\mathbb{R}^d} \beta(\bar{\rho}_0) \varphi(0, \cdot) dy = 0,$$

mais on a supposé que $\beta(0) = 0$ et comme $\bar{\rho} = 0$ et $\bar{\rho}_0 = 0$ en dehors de Ω , ceci implique

$$\int_0^T \int_{\Omega} \beta(\rho) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(v\varphi) \right) dt dy - \int_0^T \int_{\Omega} \rho \beta'(\rho) c \varphi dt dy + \int_{\Omega} \beta(\rho_0) \varphi(0, \cdot) dy = 0, \quad (\text{III.10})$$

pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty([0, T[\times \bar{\Omega})$. Par ailleurs, par intégration par parties nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(v\varphi) \right) dt dy + \int_{\Omega} \varphi(0, \cdot) dy = 0,$$

et donc si on rajoute n'importe quelle constante à la fonction β la formulation (III.10) reste vraie. Le second point du théorème est donc démontré pour toute fonction $\beta \in C^2(\mathbb{R})$. ■

Les conséquences du théorème précédent sont nombreuses et très importantes. La première d'entre elles est l'unicité des solutions faibles de l'équation de transport que nous démontrons ci-dessous.

On se donne une fonction ω vérifiant (II.6).

Définition III.4

On définit l'ensemble $L^1(0, T, L_\omega^1(\Omega))$ des fonctions f de $L^1(]0, T[\times \Omega)$ telles qu'il existe $\alpha \in L^1(]0, T[)$ positive telle que pour tout borélien A de Ω on a

$$\text{pour presque tout } t \in]0, T[, \quad \left| \int_A f(t, x) dx \right| \leq \alpha(t) \omega(|A|).$$

Exemple III.5

- Toute fonction $f \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$ est dans l'espace $L^1(]0, T[, L_\omega^1(\Omega))$ avec $\omega(r) = r$.
- Toute fonction f telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant $e^{C|f|} \in L^1(]0, T[\times \Omega)$ est dans l'espace $L^1(]0, T[, L_\omega^1(\Omega))$ avec par exemple

$$\omega(r) = \frac{1 + |\ln |\Omega||}{C|\Omega|} r(1 + \ln r),$$

et dans ce cas la fonction α qui intervient dans la définition est donnée par $\alpha(t) = \int_{\Omega} e^{C|f(t,x)|} dx$ pour presque tout $t \in]0, T[$.

Corollaire III.6

Soient Ω un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^d , $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $v \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$ et $v \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$, et $c \in L^1(]0, T[, L^1(\Omega))$.

1. Si $(\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0, T[, L^1_\omega(\Omega))$ pour un certain ω comme ci-dessus, alors il existe une unique solution faible $\rho \in L^\infty(]0, T[\times\Omega)$ de l'équation de transport pour ces données au sens de la définition II.11.

Par ailleurs, cette solution est continue en temps à valeurs dans tous les espaces $L^p(\Omega)$ pour $p < +\infty$ et pour toute fonction $\beta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, la fonction $\beta(\rho)$ est l'unique solution faible de l'équation de transport pour la donnée initiale $\beta(\rho_0)$.

2. Si de plus, on a $c \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$ alors pour tout $t \in [0, T]$ et presque tout $x \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \left(\inf_{\Omega} \rho_0\right)^+ \times \exp\left(-\int_0^t \sup_{\Omega} c \, ds\right) - \left(\inf_{\Omega} \rho_0\right)^- \times \exp\left(-\int_0^t \inf_{\Omega} c \, ds\right) \\ \leq \rho(t, x) \leq \\ \left(\sup_{\Omega} \rho_0\right)^+ \times \exp\left(-\int_0^t \inf_{\Omega} c \, ds\right) - \left(\sup_{\Omega} \rho_0\right)^- \times \exp\left(-\int_0^t \sup_{\Omega} c \, ds\right). \end{aligned}$$

3. Si on suppose maintenant $(\operatorname{div} v - c)^+ \in L^1(]0, T[, L^\infty)$, alors on a l'estimation L^1 suivante

$$\forall t \in [0, T], \|\rho(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\rho_0\|_{L^1(\Omega)} \exp\left(\int_0^t \|(\operatorname{div} v - c)^+\|_{L^\infty(\Omega)} \, ds\right).$$

Preuve :

1. L'existence d'une solution est donnée par le théorème II.13, il reste donc à montrer l'unicité de celle-ci.

L'équation étant linéaire, il suffit de démontrer que 0 est la seule solution faible pour la donnée initiale nulle. Soit donc $\rho \in L^\infty(]0, T[\times\Omega)$ une solution faible pour la donnée initiale nulle. D'après le point ii) du théorème III.1 appliqué avec n'importe quelle fonction β de classe \mathcal{C}^2 telle que $\beta(0) = 0$ et $t_1 = 0$, on a pour tout $t_2 \in [0, T]$ et toute fonction test φ

$$\int_0^{t_2} \int_{\Omega} \beta(\rho) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(v\varphi) \right) dt \, dx - \int_0^{t_2} \int_{\Omega} \rho \beta'(\rho) c \varphi dt \, dx - \int_{\Omega} \beta(\rho(t_2, \cdot)) \varphi(t_2, \cdot) dx = 0.$$

Prenons $\varphi = 1$ dans cette expression, il vient

$$\forall t_2 \in [0, T], \int_{\Omega} \beta(\rho(t_2, x)) \, dx = \int_0^{t_2} \int_{\Omega} (\beta(\rho) \operatorname{div} v - \rho \beta'(\rho) c) dt \, dx.$$

Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , positive telle que $\psi = 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $\psi = 1$ sur $[1, +\infty[$. On pose $\beta_\varepsilon(s) = \psi(s/\varepsilon)$ et on applique la formule ci-dessus à cette fonction β_ε . Il vient

$$\forall t_2 \in [0, T], \int_{\Omega} \beta_\varepsilon(\rho(t_2, x)) \, dx = \int_0^{t_2} \int_{\Omega} (\beta_\varepsilon(\rho) \operatorname{div} v - \rho \beta'_\varepsilon(\rho) c) dt \, dx.$$

On voit que $\beta_\varepsilon(\rho(t_2, x))$ converge presque partout vers l'indicatrice de l'ensemble $A_{t_2} = \{x, \rho(t_2, x) > 0\}$. De plus, $\rho \beta'_\varepsilon(\rho) = \frac{\rho}{\varepsilon} \psi'(\rho/\varepsilon)$ converge presque partout vers 0 quand ε tend vers 0. Ainsi, par convergence dominée, on obtient

$$\forall t_2 \in [0, T], |A_{t_2}| \leq \int_0^{t_2} \left(\int_{A_t} (\operatorname{div} v(t, x))^+ dx \right) \leq \int_0^{t_2} \alpha(t) \omega(|A_t|) dt,$$

par hypothèse sur $(\operatorname{div} v)^+$, on peut alors appliquer le Lemme d'Osgood II.10 et obtenir que $|A_t| = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Par définition de A_t , cela montre que $\rho \leq 0$ pour presque tout (t, x) . Un raisonnement similaire montre que $\rho \geq 0$ et donc que $\rho = 0$.

Les propriétés de continuité en temps et de renormalisation sont données par le théorème III.1.

2. Démontrons maintenant les bornes infinies sous la nouvelle hypothèse $c \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$. Pour cela, soit $\gamma \in L^1(]0, T[)$ une fonction numérique. En prenant $\varphi(t, x) \times \exp(\int_0^t \gamma)$ dans la formulation faible du problème, on obtient que la fonction bornée $R(t, x) = \rho(t, x) \times \exp(\int_0^t \gamma)$ vérifie l'équation de transport suivante

$$\partial_t R + v \cdot \nabla R + (c - \gamma)R = 0,$$

avec la donnée initiale $R(0) = \rho_0$.

- **Cas où $\sup_\Omega \rho_0 \geq 0$:**

On choisit une fonction $\beta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , positive croissante et telle que $\beta(s) = 0$ si et seulement si $s \leq \sup_\Omega \rho_0$.

D'après la propriété de renormalisation appliquée à R , nous avons

$$\partial_t \beta(R) + v \cdot \nabla \beta(R) + (c - \gamma)R\beta'(R) = 0,$$

avec $\beta(R(0)) = \beta(\rho_0) = 0$ par construction de β . Intégrons l'équation obtenue sur $]0, t[\times \Omega$, il vient

$$\int_\Omega \beta(R(t)) dx + \int_0^t \int_\Omega (c - \gamma)R\beta'(R) ds dx - \int_0^t \int_\Omega (\operatorname{div} v)\beta(R) ds dx = 0. \quad (\text{III.11})$$

Si on choisit γ de telle sorte que $c - \gamma$ soit positive presque partout (c'est le cas avec $\gamma(t) = \inf_\Omega c(t)$) alors le second terme est positif et on a finalement

$$\int_\Omega \beta(R(t)) dx \leq \int_0^t \int_\Omega (\operatorname{div} v)^+ \beta(R) ds dx.$$

Ceci est vrai pour toute fonction β telle que $\beta(s) = 0$ pour $s \leq \sup_\Omega \rho_0 = \rho_{max}$. On prend maintenant $\beta_\varepsilon(s) = \psi((s - \rho_{max})/\varepsilon)$ et on fait tendre ε vers 0. On trouve

$$\forall t \in [0, T], |A_t| \leq \int_0^t \alpha(s)\omega(|A_s|) ds,$$

où $A_t = \{R(t, \cdot) > \rho_{max}\}$. Par le Lemme d'Osgood II.10, on conclut que $|A_t| = 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et donc on en déduit que $R(t, x) \leq \sup_\Omega \rho_0$ pour presque tout (t, x) , ce qui conclut la preuve de la majoration dans ce cas.

- **Cas où $\sup_\Omega \rho_0 < 0$:**

On choisit cette fois une fonction β toujours de classe \mathcal{C}^2 , positive et telle que $\beta(s) = 0$ si et seulement si $s \leq \sup_\Omega \rho_0$, mais on demande en plus que $\beta = 1$ sur $[0, +\infty[$. La conclusion s'obtiendra de la même façon.

D'après (III.11), le second terme sera positif dès que $c - \gamma$ est négatif partout, ce qui est assuré si on prend $\gamma(t) = \sup_\Omega c(t)$, et on obtient le second terme de la majoration.

Les minoration s'obtiennent en changeant ρ en $-\rho$.

3. Démontrons maintenant l'estimation L^1 à l'aide de la nouvelle hypothèse sur $(\operatorname{div} v - c)^+$. On repart de la propriété de renormalisation qui donne

$$\int_\Omega \beta(\rho(t, x)) dx = \int_\Omega \beta(\rho_0) + \int_0^t \int_\Omega (\operatorname{div} v - c)\rho\beta'(\rho) ds dx.$$

Par un argument maintenant usuel d'approximation, on vérifie que l'on peut utiliser la formule précédente avec $\beta(s) = |s|$ et $s\beta'(s) = |s|$ (en prenant par exemple $\beta_\varepsilon(s) = \sqrt{s^2 + \varepsilon^2}$). Ainsi, on a

$$\int_\Omega |\rho(t, x)| dx = \int_\Omega |\rho_0| + \int_0^t \int_\Omega (\operatorname{div} v - c)|\rho| ds dx,$$

d'où

$$\|\rho(t)\|_{L^1} \leq \|\rho_0\|_{L^1} + \int_0^t \|(\operatorname{div} v - c)^+(s)\|_{L^\infty} \|\rho(s)\|_{L^1} ds,$$

et on conclut par le lemme de Gronwall.

■

Remarque III.7

- *On peut raffiner le résultat précédent de plusieurs manières. Par exemple, si on suppose seulement que $c^- \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$, alors on a*

$$\|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \|\rho_0\|_{L^\infty} \exp\left(\int_0^t \sup_{\Omega} c^-(s, \cdot) ds\right).$$

- Equation d'advection seule : Dans le cas où $c = 0$ on obtient

$$\inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho(t, x) \leq \sup_{\Omega} \rho_0.$$

- Cas général :

- Si $\sup_{\Omega} \rho_0 < 0$ alors $\sup_{]0, T[\times \Omega} \rho(t, x) < 0$.
- Si $\inf_{\Omega} \rho_0 > 0$ alors $\inf_{]0, T[\times \Omega} \rho(t, x) > 0$.

1.1 Propriétés qualitatives

Toujours en utilisant la renormalisation, on démontre aisément les propriétés suivantes :

Proposition III.8

Sous les hypothèses qui assurent la renormalisation, nous avons :

- **Principe de comparaison** : Si $\rho_0^1 \leq \rho_0^2$ sont deux données initiales alors les solutions ρ_1 et ρ_2 associées vérifient $\rho_1 \leq \rho_2$.

- **Principe de produit** : Si ρ_1 et ρ_2 sont solutions de

$$\partial_t \rho_1 + v \cdot \nabla \rho_1 + c_1 \rho_1 = 0,$$

$$\partial_t \rho_2 + v \cdot \nabla \rho_2 + c_2 \rho_2 = 0,$$

alors le produit $\rho_1 \rho_2$ vérifie

$$\partial_t(\rho_1 \rho_2) + v \cdot \nabla(\rho_1 \rho_2) + (c_1 + c_2)\rho_1 \rho_2 = 0.$$

- **Convergence forte de l'approximation parabolique** :

On suppose de plus que $(\operatorname{div} v - 2c)^+ \in L^1([0, T], L^\infty(\Omega))$ (cette hypothèse n'est probablement pas optimale). Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère l'unique solution $\tilde{\rho}_\varepsilon$ du problème

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}_\varepsilon + v \cdot \nabla \tilde{\rho}_\varepsilon + c \tilde{\rho}_\varepsilon - \varepsilon^2 \Delta \tilde{\rho}_\varepsilon = 0, \\ \frac{\partial \tilde{\rho}_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \\ \tilde{\rho}_\varepsilon = \rho_0. \end{cases}$$

Alors, si on note ρ la solution du problème limite, on a la convergence forte

$$\|\tilde{\rho}_\varepsilon - \rho\|_{C^0([0, T], L^p(\Omega))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

pour tout $p \in [1, +\infty[$.

En particulier si ρ_1 est solution de l'équation de transport $\partial_t \rho_1 + v \cdot \nabla \rho_1 = 0$ et ρ_2 une solution de l'équation de continuité $\partial_t \rho_2 + \operatorname{div}(\rho_2 v) = 0$ alors le produit $\rho_1 \rho_2$ est aussi solution de l'équation de continuité.

Preuve :

Les deux premières propriétés se prouvent de façon maintenant standard.

Étudions l'approximation parabolique proposée. L'idée est d'utiliser l'approximation par convolution $\tilde{\rho}_\varepsilon$ construite et étudiée précédemment. On a en effet démontré au cours de la preuve du théorème principal que $\tilde{\rho}_\varepsilon$ convergeait dans tous les espaces $C^0([0, T], L^p(\Omega))$ vers la solution ρ du problème limite.

On peut tout d'abord montrer aisément un **principe du maximum** pour ce problème qui fournit une borne L^∞ sur les $\tilde{\rho}_\varepsilon$. On peut donc extraire une sous-suite qui converge dans L^∞ faible-* et on peut voir facilement que cette limite est solution faible du problème limite. Cette limite étant unique, toute la famille converge faiblement vers ρ . De plus, de la même façon on montre que pour tout $t \in [0, T]$, $\tilde{\rho}_\varepsilon(t)$ converge faiblement dans tous les L^p vers $\rho(t)$. Tout le problème est donc maintenant d'obtenir la convergence forte.

Remarquons tout d'abord qu'en changeant $\tilde{\rho}_\varepsilon$ en $\tilde{\rho}_\varepsilon \times \exp\left(\int_0^t \gamma(s) ds\right)$, on obtient la même équation où $c(t, x)$ est remplacé par $c(t, x) - \gamma(t)$. Ainsi en choisissant

$$\forall t \in [0, T], \quad \gamma(t) = -1 - \sup_{x \in \Omega} \left(\operatorname{div} v(t, x) - 2c(t, x) \right)^+,$$

qui est bien une fonction L^1 par hypothèse, on peut se ramener au cas où $2c - \operatorname{div} v \geq 1$ pour presque tout (t, x) . On suppose maintenant que cette propriété est vérifiée.

Écrivons alors l'estimation d'énergie pour le problème parabolique

$$\frac{1}{2} \|\tilde{\rho}_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_\Omega \left(c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v \right) |\tilde{\rho}_\varepsilon|^2 dx ds + \varepsilon^2 \int_0^t \|\nabla \tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^2}^2 ds = \frac{1}{2} \|\rho_0\|_{L^2}^2. \quad (\text{III.12})$$

En passant à la limite supérieure, il vient

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \|\tilde{\rho}_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_\Omega \left(c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v \right) |\tilde{\rho}_\varepsilon|^2 dx ds \right) \leq \frac{1}{2} \|\rho_0\|_{L^2}^2.$$

Notons que la suite $\tilde{\rho}_\varepsilon \sqrt{c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v}$ converge faiblement dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$ vers $\rho \sqrt{c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v}$. Par ailleurs, en appliquant la propriété de renormalisation à l'équation vérifiée par ρ on obtient l'estimation d'énergie

$$\frac{1}{2} \|\rho(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_\Omega \left(c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v \right) |\rho|^2 dx ds = \frac{1}{2} \|\rho_0\|_{L^2}^2.$$

En combinant les résultats ci-dessus, on a la propriété de convergence faible et de convergence en norme qui implique la convergence forte de $\tilde{\rho}_\varepsilon(t)$ vers $\rho(t)$ pour tout t , ainsi que la convergence forte de $\tilde{\rho}_\varepsilon \sqrt{c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v}$ dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$.

Ceci ne donne pas la convergence uniforme donnée dans l'énoncé. Pour la démontrer, on revient à (III.12) qui nous donne maintenant, avec les convergences fortes obtenues ci-dessus,

$$\varepsilon \nabla \tilde{\rho}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad \text{dans } L^2(]0, T[\times \Omega).$$

Soustrayons maintenant l'équation parabolique à l'équation de transport vérifiée par $\bar{\rho}_\varepsilon$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t(\tilde{\rho}_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon) + v \cdot \nabla(\tilde{\rho}_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon) + c(\tilde{\rho}_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon) - \varepsilon^2 \Delta \tilde{\rho}_\varepsilon &= R_\varepsilon, \\ (\tilde{\rho}_\varepsilon(0) - \bar{\rho}_\varepsilon(0)) &= \rho_0 - \bar{\rho}_0^\varepsilon. \end{aligned}$$

Si on multiplie cette équation par $(\tilde{\rho}_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon)$, ce qui est licite au vu de la régularité des fonctions en jeu, on obtient (en utilisant les bornes L^∞ dans le terme contenant R_ε)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{\rho}_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \int_0^T \int_\Omega \left(c - \frac{1}{2} \operatorname{div} v \right) |\tilde{\rho}_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon|^2 ds dx + \varepsilon^2 \int_0^T \int_\Omega \nabla \tilde{\rho}_\varepsilon \cdot \nabla(\tilde{\rho}_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon) dt dx \\ \leq \frac{1}{2} \|\rho_0 - \bar{\rho}_0^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|R_\varepsilon\|_{L^1}. \quad (\text{III.13}) \end{aligned}$$

Le terme délicat à contrôler est le terme contenant les gradients. La première partie de ce terme est de la forme $\varepsilon^2 \|\nabla \tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^2}^2$ qui tend vers 0 comme on vient de le voir (en réalité cette contribution a le bon signe, on n'était donc pas obligé de le contrôler).

Pour la seconde partie de ce terme il est nécessaire d'estimer le gradient de $\bar{\rho}_\varepsilon$. On dispose pour cela de l'estimation

$$\|\nabla \bar{\rho}_\varepsilon\|_{L^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\rho\|_{L^\infty},$$

obtenue en faisant porter la dérivation sur le noyau de convolution dans la définition de $\bar{\rho}_\varepsilon$ et ainsi on a

$$\varepsilon^2 \int_0^T \int_\Omega \nabla \tilde{\rho}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{\rho}_\varepsilon dt dx \leq \varepsilon \|\nabla \tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^2} \|\rho\|_{L^\infty} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, (III.13) montre bien la convergence forte vers 0 de $\tilde{\rho}_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon$ dans l'espace $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$. Par ailleurs, comme $\rho \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$, il est facile de voir que la suite des régularisations en espace $(\bar{\rho}_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers ρ , dans l'espace $\mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$. On obtient le résultat annoncé en mettant bout à bout les convergences obtenues.

La convergence dans $\mathcal{C}^0([0, T], L^p(\Omega))$ pour tout $p < \infty$ est alors immédiate. ■

2 Compacité - stabilité

La méthode des solutions renormalisées présentée ici permet également d'obtenir un résultat fondamental de compacité sur des familles de solutions de l'équation de transport.

Théorème III.9

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne ρ_0^n dans $L^\infty(\Omega)$, v_n dans $L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$ tel que $v_n \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$ et c_n dans $L^1(]0, T[\times\Omega)$. On suppose que :

- La suite $(\rho_0^n)_n$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et converge dans $L^1(\Omega)$ vers une fonction $\rho_0 \in L^\infty$.
- Pour tout n , il existe ω_n telle que $(\operatorname{div} v_n)^+ \in L^1(]0, T[, L^1_{\omega_n}(\Omega))$.
- La suite $(v_n)_n$ converge dans $L^1(]0, T[\times\Omega)$ vers un champ de vecteurs v tel que
 - $v \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$.
 - Il existe ω tel que $(\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0, T[, L^1_\omega(\Omega))$.
- La suite $(\operatorname{div} v_n)_n$ converge dans $L^1(]0, T[\times\Omega)$ vers $\operatorname{div} v$.
- La suite $(c_n^-)_n$ est bornée dans $L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$ et $(c_n)_n$ converge dans $L^1(]0, T[\times\Omega)$ vers une fonction c telle que $c^- \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note ρ_n l'unique solution faible du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + v_n \cdot \nabla \rho_n + c_n \rho_n = 0, \\ \rho_n(0) = \rho_0^n. \end{cases}$$

Alors, la suite $(\rho_n)_n$ converge **fortement** dans $L^p(]0, T[\times\Omega)$ pour tout p fini vers l'unique solution faible ρ du problème limite

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + c \rho = 0, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases}$$

et de plus, pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\rho_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \rho(t), \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ pour tout } p < +\infty.$$

Remarquons que nous avons besoin de la régularité de type Sobolev en espace sur v_n et sur v pour assurer l'unicité des solutions faibles et les propriétés de renormalisation obtenues dans les théorèmes précédents. Par contre nous demandons seulement que la convergence forte de $(v_n)_n$, $(\operatorname{div} v_n)_n$ et (c_n) ait lieu dans $L^1(]0, T[\times\Omega)$. Notons également que le champ de vecteurs limite v vérifie nécessairement $v \cdot \nu = 0$ sur le bord.

Preuve :

Tout d'abord, comme la suite des données initiales $(\rho_0^n)_n$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et que $(c_n^-)_n$ est bornée dans $L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$, alors d'après la remarque III.7 (suite au corollaire III.6), la suite des solutions faibles $(\rho_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times\Omega)$ et donc on peut en extraire une sous-suite $(\rho_{n_k})_k$ qui converge dans $L^\infty(]0, T[\times\Omega)$ faible- \star vers une certaine fonction ρ .

De plus, les propriétés de convergence des suites $(v_n)_n$, $(\operatorname{div} v_n)_n$ et $(c_n)_n$, et $(\rho_0^n)_n$ permettent aisément de passer à la limite dans la formulation faible de l'équation de transport (en utilisant la proposition I.4) et donc de montrer que la fonction ρ est bien une solution faible de l'équation de transport pour le champ de vecteurs v , le coefficient de réaction c et la donnée initiale ρ_0 .

D'après les hypothèses sur v et $\operatorname{div} v$, cette solution est unique. Donc, par un argument classique, toute la suite $(\rho_n)_n$ converge dans L^∞ faible- \star vers ρ . Ceci implique également la convergence faible dans tous les espaces $L^p(]0, T[\times\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Maintenant, d'après la propriété de renormalisation (appliquée sur l'équation numéro n), on sait que ρ_n^2 solution du problème de transport pour le champ v_n , la donnée initiale $(\rho_0^n)^2$ et le terme de réaction $2c_n$. Comme $(\rho_0^n)^2$ converge dans L^1 vers $(\rho_0)^2$, on déduit du raisonnement précédent que $(\rho_n)^2$ converge faiblement vers l'unique solution R du problème de transport

$$\partial_t R + v \cdot \nabla R + 2cR = 0, \quad R(0) = \rho_0^2.$$

D'après la propriété de renormalisation appliquée à ρ , cette solution R n'est autre que ρ^2 . On a donc finalement obtenu la convergence faible de $(\rho_n^2)_n$ vers ρ^2 dans tous les L^p et dans L^∞ faible-*. Ceci montre en particulier que $\|\rho_n\|_{L^2(]0, T[\times \Omega)}^2 \rightarrow \|\rho\|_{L^2(]0, T[\times \Omega)}^2$ et donc la convergence forte de $(\rho_n)_n$ vers ρ dans $L^2(]0, T[\times \Omega)$. En utilisant les bornes infinies, on a immédiatement le résultat dans tous les L^p qui en découle.

Le raisonnement est similaire pour l'étude de la convergence de $(\rho_n(t))_n$ pour tout t . ■

3 Retour à l'équation caractéristique

On utilise ici les résultats précédents pour définir une notion *convenable* de flot pour l'équation caractéristique. Pour éviter tout phénomène d'explosion en temps fini, on ne va considérer ici que des champs de vecteurs qui sont bornés.

On notera $Q_T =]0, T[\times \Omega$.

Définition III.10

On dit qu'une application mesurable $\Phi : [0, T] \times \Omega \mapsto \Omega$ est un **flot lagrangien régulier** pour un champ de vecteurs borné v défini sur Q_T si et seulement si

1. La mesure positive μ_Φ définie par

$$\mu_\Phi(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{Q_T} f(t, x) d\mu_\Phi(t, x) = \int_0^T \int_\Omega f(t, \Phi(t, x)) dt dx, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(Q_T),$$

vérifie

$$\mu_\Phi \leq C \lambda_{Q_T},$$

où C est une constante positive et λ_{Q_T} est la mesure de Lebesgue sur Q_T .

2. Le problème $\partial_t \Phi(t, x) = v(t, \Phi(t, x))$, $\Phi(0, x) = x$ est satisfait au sens des distributions de Q_T , i.e.

$$\int_0^T \int_\Omega \Phi(t, x) \cdot \partial_t \psi(t, x) dt dx + \int_0^T \int_\Omega \psi(t, x) \cdot v(t, \Phi(t, x)) dt dx + \int_\Omega \psi(0, x) \cdot x dx = 0, \quad (\text{III.14})$$

pour toute fonction test vectorielle ψ régulière telle que $\psi(T) = 0$.

La première hypothèse implique que la fonction $(t, x) \mapsto v(t, \Phi(t, x))$ est bien définie même si v est définie presque partout. En effet si \tilde{v} est une fonction égale à v presque partout. On note $A = \{(t, x), v(t, x) \neq \tilde{v}(t, x)\}$ qui est donc de mesure de Lebesgue nulle. Par l'hypothèse 1 de la définition ci-dessus, on a $\mu_\Phi(A) = 0$ et donc

$$\int_0^T \int_\Omega 1_A(t, \Phi(t, x)) dt dx = 0,$$

ce qui signifie que l'ensemble des $(t, \Phi(t, x))$ qui appartiennent à A est de mesure nulle. Ainsi $v(t, \Phi(t, x)) = \tilde{v}(t, \Phi(t, x))$ pour presque tout (t, x) .

Proposition III.11

Soit v comme dans la définition précédente et Φ un flot lagrangien régulier pour v . Alors pour presque tout $x \in \Omega$, l'application $t \mapsto \Phi(t, x)$ est dans $W^{1, \infty}(]0, T[)$, elle est donc égale presque partout à une fonction Lipschitzienne Φ_x . On a alors pour de tels $x \in \Omega$

- $\text{Lip}(\Phi_x) \leq \|v\|_{L^\infty}$.
- $\Phi_x(0) = x$ et $\Phi'_x(t) = v(t, \Phi_x(t))$ pour presque tout $t \in]0, T[$.

Preuve :

Soit $(\alpha_n)_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, avec $\alpha_n(T) = 0$ une suite de fonctions dense dans $\{f \in W^{1,1}([0, T]), f(T) = 0\}$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. On applique alors la formulation faible (III.14) à la fonction test $\alpha_n(t)\psi(x)$. On obtient ainsi pour tout n et tout ψ

$$\alpha_n(0) \int_{\Omega} \psi(x) \cdot x \, dx + \int_{\Omega} \psi(x) \left(\int_0^T \partial_t \alpha_n(t) \Phi(t, x) \, dt \right) dx + \int_{\Omega} \psi(x) \left(\int_0^T \alpha_n(t) v(t, \Phi(t, x)) \, dt \right) dx = 0.$$

Ainsi pour tout n , il existe un ensemble de mesure nulle $A_n \subset \Omega$ tel que pour tout $x \notin A_n$ on a

$$\alpha_n(0)x + \int_0^T \partial_t \alpha_n(t) \Phi(t, x) \, dt + \int_0^T \alpha_n(t) v(t, \Phi(t, x)) \, dt = 0.$$

Par densité des α_n , on obtient que pour tout $x \notin \bigcup A_n$ (c'est-à-dire pour presque tout $x \in \Omega$) on a

$$\alpha(0)x + \int_0^T \partial_t \alpha(t) \Phi(t, x) \, dt + \int_0^T \alpha(t) v(t, \Phi(t, x)) \, dt = 0.$$

Le reste de la preuve est immédiat. ■

D'après le théorème de Radon-Nykodim, on peut donner la définition suivante.

Définition III.12

Soit Φ est un flot régulier Lagrangien pour un champ v . Comme $\mu_{\Phi} \leq C\lambda_{Q_T}$, il existe une fonction $j \in L^{\infty}([0, T] \times \Omega)$, avec $\|j\|_{L^{\infty}} \leq C$, telle que

$$\int_0^T \int_{\Omega} f(t, y) j(t, y) \, dt \, dy = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, \Phi(t, x)) \, dt \, dx,$$

pour toute fonction f mesurable bornée. Cette fonction j est appelée la densité du flot Φ .

De façon similaire, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème III.13 (Flot régulier lagrangien et solutions faibles de l'équation de continuité)

Pour toute fonction mesurable bornée $\rho_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ il existe une unique fonction $\rho \in L^{\infty}([0, T] \times \Omega)$ telle que

$$\int_0^T \int_{\Omega} f(t, y) \rho(t, y) \, dt \, dy = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, \Phi(t, x)) \rho_0(x) \, dt \, dx,$$

pour toute fonction f mesurable bornée. De plus cette fonction ρ est solution faible de l'équation de continuité $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0$ pour la donnée initiale ρ_0 .

En particulier, la densité j définie ci-dessus vérifie l'équation de continuité $\partial_t j + \operatorname{div}(jv) = 0$ et la donnée initiale $j(0) = 1$.

Preuve :

Soit ψ une fonction test régulière telle que $\psi(T) = 0$, on veut montrer que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(t, x) (\partial_t \psi + v \cdot \nabla \psi) \, dt \, dx + \int_{\Omega} \rho_0 \psi(0) \, dx = 0.$$

Par définition de ρ , le terme de gauche s'écrit

$$\int_{\Omega} \rho_0(x) \left(\int_0^T (\partial_t \psi(t, \Phi(t, x)) + v(t, \Phi(t, x)) \cdot \nabla \psi(t, \Phi(t, x))) \, dt \right) dx,$$

il nous faut donc maintenant calculer la parenthèse. D'après la proposition III.11, pour presque tout $x \in \Omega$, on a $\Phi(t, x) = \Phi_x(t)$ pour presque tout t . Pour de tels $x \in \Omega$, la parenthèse s'écrit

$$\int_0^T (\partial_t \psi(t, \Phi_x(t)) + v(t, \Phi_x(t)) \cdot \nabla \psi(t, \Phi_x(t))) \, dt.$$

Comme ψ est régulière et Φ_x lipschitzienne, on a la formule de dérivation

$$\frac{d}{dt}\psi(t, \Phi_x(t)) = \partial_t \psi(t, \Phi_x(t)) + \frac{d}{dt}\Phi_x(t) \cdot \nabla \psi(t, \Phi_x(t, x)) = \partial_t \psi(t, \Phi_x(t)) + v(t, \Phi_x(t)) \cdot \nabla \psi(t, \Phi_x(t, x)).$$

De plus $\psi(0, \Phi_x(0)) = \psi(0, x)$ et $\psi(T, \Phi_x(T)) = 0$ car ψ vérifie $\psi(T) = 0$. ■

On va donc maintenant s'intéresser à la question de l'existence et l'unicité d'un flot régulier Lagrangien pour des champs de vecteurs peu réguliers.

Théorème III.14

On considère un champ de vecteurs $v \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d) \cap L^\infty(]0, T[\times \Omega)$ tel que $v \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$. On suppose que

- Il existe ω tel que $(\operatorname{div} v)^+ \in L^1(]0, T[, L^1_\omega(\Omega))$.
- $(\operatorname{div} v)^- \in L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$.

Alors, il existe un unique flot régulier Lagrangien Φ pour le champ v . De plus, on a $\Phi \in C^0(]0, T[, (L^p(\Omega))^d)$ pour tout $p < +\infty$.

Preuve :

• **Unicité :** Soient Φ et Ψ deux flots réguliers Lagrangiens pour le champ v . Pour toute fonction $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, on définit ρ_Φ et ρ_Ψ par les formules

$$\int_0^T \int_\Omega f(t, y) \rho_\Phi(t, y) dt dy = \int_0^T \int_\Omega f(t, \Phi(t, x)) \rho_0(x) dt dx,$$

$$\int_0^T \int_\Omega f(t, y) \rho_\Psi(t, y) dt dy = \int_0^T \int_\Omega f(t, \Psi(t, x)) \rho_0(x) dt dx,$$

pour toute fonction f mesurable positive.

D'après le théorème III.13, ρ_Φ et ρ_Ψ sont deux solutions faibles bornées de l'équation de continuité pour le champ v et pour la donnée initiale ρ_0 . D'après le corollaire III.6, les hypothèses sur v impliquent qu'une telle solution est unique, et donc nous avons

$$\int_0^T \int_\Omega f(t, \Phi(t, x)) \rho_0(x) dt dx = \int_0^T \int_\Omega f(t, \Psi(t, x)) \rho_0(x) dt dx,$$

pour tout ρ_0 et tout f . En prenant $f(t, y) = \alpha(t)y$ on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \Phi(t, x) \alpha(t) \rho_0(x) dt dx = \int_0^T \int_\Omega \Psi(t, x) \alpha(t) \rho_0(x) dt dx, \quad \forall \alpha, \forall \rho_0,$$

ce qui implique évidemment que $\Phi = \Psi$ presque partout par un argument classique de densité.

• **Existence :** On va bien entendu procéder par régularisation et passage à la limite.

On note $(v_n)_n$ une suite de champs de vecteurs réguliers bornée dans $L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d) \cap L^\infty(]0, T[\times \Omega)$ et telle que $(\operatorname{div} v_n)^-$ est bornée dans $L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$ et qui converge vers v dans L^1 . Cette suite s'obtient par convolution de façon relativement standard (en prenant garde au bord).

Chacun de ces champs de vecteurs étant réguliers, on peut définir le flot usuel $\Phi_n(t, x) = X_n(t, 0, x)$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir le chapitre II).

Par ailleurs, la densité j_n de ce champ est donnée par l'inverse du Jacobien du flot et vérifie donc une estimation

$$\|j_n\|_{L^\infty} \leq C \exp \left(\int_0^T \|(\operatorname{div} v_n)^-\|_{L^\infty} ds \right),$$

qui est uniforme en n d'après l'hypothèse. On peut aussi obtenir cette information à partir de l'équation de continuité dont elle est solution $\partial_t j_n + \operatorname{div}(j_n v_n) = 0$, avec $j_n(0) = 1$.

Comme Φ_n est une application bornée uniformément en (t, x) et en n , on peut donc extraire une sous-suite, toujours notée $(\Phi_n)_n$ qui converge vers une fonction bornée Φ dans L^∞ faible-*. On va montrer que cette convergence est forte dans L^1 .

Pour cela, pour tout $s \in [0, T]$, on pose $\Gamma_n^s(x) = X_n(s, t, x)$, de sorte que Γ_n^s est solution, composante par composante, du problème de transport rétrograde (voir la proposition II.1)

$$\begin{cases} \partial_t \Gamma_n^s + \nabla \Gamma_n^s \cdot v_n = 0, \\ \Gamma_n^s(s, x) = x. \end{cases}$$

En vertu du théorème de stabilité III.9, on sait que $\Gamma_n^s(0) = \Phi_n(s)$ converge fortement dans tous les L^p vers $\Gamma^s(0)$ où Γ^s est la solution du problème limite. Ainsi, par convergence dominée, nous obtenons la convergence forte de Φ_n vers une certaine fonction qui ne peut être que sa limite faible-* Φ .

De plus, pour tout temps s , on a $\Phi(s, \cdot) = \Gamma^s(0, \cdot)$. Montrons que Φ est continue en temps à valeurs dans $L^1(\Omega)$.

- Continuité en 0 : On note Ψ la solution du problème direct

$$\begin{cases} \partial_t \Psi + \nabla \Psi \cdot v = 0, \\ \Psi(0, x) = x. \end{cases}$$

Celle-ci est continue en temps à valeurs L^1 , ainsi pour tout $\delta > 0$ assez petit on a $\|\Psi(\delta, \cdot) - \text{Id}_\Omega\|_{L^1} \leq \varepsilon$. Ainsi $\Psi - \Gamma^\delta$ est solution de l'équation de transport avec une donnée finale à l'instant δ de taille ε dans L^1 . En utilisant la troisième partie du Corollaire III.6 dans lequel le temps est inversé (ce qui revient à changer le signe de v et c dans ce corollaire), on obtient l'estimation à l'instant initial

$$\begin{aligned} \|\Phi(\delta, \cdot) - \underbrace{\Phi(0, \cdot)}_{=\text{Id}_\Omega}\|_{L^1} &= \|\Gamma^\delta(0) - \Psi(0)\|_{L^1} \\ &\leq \|\Gamma^\delta(\delta) - \Psi(\delta)\|_{L^1} \times \exp\left(\int_0^\delta \|(\text{div } v)^-\|_{L^\infty}\right) \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

- Continuité en un point $s > 0$: Pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ (assez petit) on pose

$$\begin{aligned} G^{s,\delta}(t, x) &= \Gamma^{s+\delta}\left(\frac{t(s+\delta)}{s}, x\right), \\ v^{s,\delta}(t, x) &= \frac{s+\delta}{s} v\left(\frac{ts}{s+\delta}, x\right), \end{aligned}$$

qui vérifient le problème

$$\begin{cases} \partial_t G^{s,\delta}(t, x) + \nabla G^{s,\delta} \cdot v^{s,\delta}(t, x) = 0, \\ G^{s,\delta}(s, x) = \Gamma^{s+\delta}(s + \delta, x) = x. \end{cases}$$

Quand δ tend vers 0, $v^{s,\delta}$ tend vers v dans L^1 et $\text{div } v^{s,\delta}$ tend vers $\text{div } v$ dans L^1 . D'après le théorème de stabilité on a donc $G^{s,\delta}(t)$ qui converge vers $\Gamma^s(t)$ dans L^1 pour tout t . En particulier, en $t = 0$ on obtient que $G^{s,\delta}(0, \cdot) = \Gamma^{s+\delta}(0, \cdot) = \Phi(s + \delta, \cdot)$ converge vers $\Phi(s, \cdot)$.

On a donc montré la convergence forte dans L^1 de Φ_n vers Φ . Quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que cette convergence a aussi lieu presque partout. Or on a vu que pour tout n

$$\left| \int_0^T \int_\Omega f(t, \Phi_n(t, x)) dt dx \right| \leq \int_0^T \int_\Omega |f(t, y)| |j_n(t, y)| dt dy \leq C \|f\|_{L^1},$$

et par convergence dominée, on obtient

$$\left| \int_0^T \int_\Omega f(t, \Phi(t, x)) dt dx \right| \leq C \|f\|_{L^1},$$

pour toute fonction f continue. Ceci montre bien que la mesure μ_Φ vérifie $\mu_\Phi \leq C\lambda$.

Il reste maintenant à démontrer que l'équation différentielle ordinaire est satisfaite au sens des distributions. Pour cela, il faut démontrer que $v_n(t, \Phi_n(t, x))$ converge dans L^1 vers $v(t, \Phi(t, x))$.

Dans cet objectif, énonçons et démontrons le lemme suivant.

Lemme III.15

Soit Q un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge dans $L^1(Q)$ et presque partout vers une fonction $f \in L^1(Q)$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions \tilde{f}_n et \tilde{f} continues sur \overline{Q} telles que

1. Pour tout n , $\|\tilde{f}_n - f_n\|_{L^1} \leq \varepsilon$ et $\|\tilde{f} - f\|_{L^1} \leq \varepsilon$.
2. La suite \tilde{f}_n converge vers \tilde{f} uniformément sur \overline{Q} .

Preuve (du lemme):

Comme la suite $(f_n)_n$ converge dans L^1 , elle est équi-intégrable. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que pour tout borélien B de mesure inférieure à δ on a $\int_B |f_n| \leq \varepsilon$ pour tout n et $\int_B |f| \leq \varepsilon$.

On utilise ensuite le théorème d'Egoroff (théorème I.6) qui nous dit que, comme $f_n \rightarrow f$ presque partout, pour tout $\delta > 0$ il existe un ensemble mesurable $A \subset Q$ tel que $|A^c| \leq \delta$ et tel que f_n converge vers f uniformément sur A .

Posons maintenant $g_n = f_n 1_A$ et $g = f 1_A$, de sorte que $(g_n)_n$ converge vers g uniformément partout. Par ailleurs nous avons

$$\|f_n - g_n\|_{L^1} = \int_{A^c} |f_n| \leq \varepsilon, \text{ car } |A^c| \leq \delta,$$

et de même $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$.

On prolonge g_n et g par 0 en dehors de Q sans changer de notation et on pose maintenant $\tilde{f}_n = g_n \star \eta_\theta$ et $\tilde{f} = g \star \eta_\theta$ où η_θ est un noyau de régularisation. On va montrer que pour θ suffisamment petit, ces fonctions vérifient les propriétés du lemme.

Tout d'abord, pour toute valeur de θ fixée la convergence de \tilde{f}_n vers \tilde{f} est uniforme. En effet

$$|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(y) - g(y)| \eta_\theta(x-y) dy \leq \|g_n - g\|_{L^\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_n - g_n\|_{L^1} &= \|g_n \star \eta_\theta - g_n\|_{L^1} \\ &\leq \|g_n \star \eta_\theta - g \star \eta_\theta\|_{L^1} + \|g \star \eta_\theta - g\|_{L^1} + \|g - g_n\|_{L^1} \\ &\leq 2\|g - g_n\|_{L^1} + \|g \star \eta_\theta - g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ainsi on peut trouver N_0 et θ_0 tel que pour tout $n \geq N_0$ et tout $\theta < \theta_0$ on ait $\|\tilde{f}_n - g_n\|_{L^1} \leq \varepsilon$. Quitte à prendre θ_0 encore plus petit, on peut maintenant s'assurer que cette propriété est encore vraie pour les $n < N_0$ et le lemme est démontré. ■

Appliquons le lemme précédent avec $Q =]0, T[\times \Omega$, $\varepsilon > 0$ fixé et la suite $(v_n)_n$ (de laquelle on a extrait une sous-suite pour assurer la convergence presque partout). On obtient donc des fonctions continues \tilde{v}_n et \tilde{v} comme dans le lemme.

Tout d'abord comme \tilde{v}_n converge uniformément vers \tilde{v} qui est une fonction continue et que Φ_n converge presque partout vers Φ , on obtient

$$\tilde{v}_n(t, \Phi_n(t, x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{v}(t, \Phi(t, x)), \text{ presque partout.}$$

Comme tous les champs de vecteurs considérés sont bornés, on obtient la convergence dans L^1 de $\tilde{v}_n(t, \Phi_n(t, x))$ vers $\tilde{v}(t, \Phi(t, x))$. Il vient donc (en notant abusivement $v \circ \Phi$ l'application $(t, x) \mapsto v(t, \Phi(t, x))$)

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n \circ \Phi_n - v \circ \Phi\|_{L^1} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{v}_n \circ \Phi_n - \tilde{v} \circ \Phi\|_{L^1} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(v_n - \tilde{v}_n) \circ \Phi_n\|_{L^1} + \|(v - \tilde{v}) \circ \Phi\|_{L^1} \\ &\leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n - \tilde{v}_n\|_{L^1} + C\|v - \tilde{v}\|_{L^1} \leq C\varepsilon, \end{aligned}$$

l'avant dernière inégalité provenant de la borne infinie sur les densités j_n et j associées à Φ_n et Φ .

L'estimation obtenue étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient la convergence annoncée et donc le théorème. ■

En fait la démonstration ci-dessus implique la propriété de stabilité suivante : **A REVOIR**

Théorème III.16

Soit $(v_n)_n$ une suite bornée de champs de vecteurs dans $L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d) \cap L^\infty(]0, T[\times \Omega)$ tels que $\operatorname{div} v_n$ est bornée dans $L^1(]0, T[, L^\infty(\Omega))$ qui converge dans L^1 vers un champ $v \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d) \cap L^\infty(]0, T[\times \Omega)$, alors l'unique flot régulier Lagrangien Φ_n associé à v_n converge fortement dans L^1 vers l'unique flot régulier Lagrangien Φ associé à v .

Une dernière propriété importante est la propriété de semi-groupe. Nous avons défini précédemment le flot Φ d'un champ de vecteur à partir de l'instant initial $t = 0$. En reprenant les notations du premier chapitre on a défini $\Phi(t, x) = X(t, 0, x)$. On peut bien entendu définir de façon analogue le flot $(t, x) \mapsto X(t, s, x)$ à partir de n'importe quel instant $s \in [0, T]$. On a alors la propriété suivante

Théorème III.17

On a la propriété de semi-groupe

$$X(t_1, t_2, X(t_2, t_3, x)) = X(t_1, t_3, x),$$

pour presque tous t_1, t_2, t_3 et x .

Deuxième partie
Aspects numériques

Chapitre IV

SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR L'ADVECTION EN 1D

1 Les schémas linéaires de base par une approche *différences finies*

1.1 Introduction

On va s'intéresser ici à la résolution numérique de l'équation d'advection linéaire 1D à vitesse constante

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0, \quad (\text{IV.1})$$

avec $c > 0$ pour l'instant pour fixer les idées.

On se donne une grille uniforme en espace de pas h et un pas de temps τ . Les cellules de la grille sont notées $C_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ et le centre de la grille est noté x_i .

On suppose le schéma posé sur \mathbb{R} tout entier ou sur un domaine périodique, ce qui évite les problèmes dus aux conditions aux limites.

On note u_i^n une approximation de la solution au temps t_n et sur la maille C_i . Dans une optique "différences finies", on interprétera u_i^n comme une approximation de $u(x_i, t_n)$, alors que dans une approche "volumes finis" on l'interprétera comme une approximation de la moyenne de u sur le volume de contrôle C_i .

Considérons tout d'abord les schémas usuels pour ce problème :

$$\text{Le schéma Décentré Amont : } u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\tau}{h} (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad ((\text{DA}))$$

$$\text{Le schéma Centré : } u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\tau}{2h} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad ((\text{C}))$$

On appelle nombre de CFL le nombre

$$\nu = c \frac{\tau}{h}.$$

Le schéma Décentré Amont est d'ordre 1 en temps et en espace et le schéma Centré est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. On va voir que le premier est conditionnellement stable alors que le second est inconditionnellement instable.

1.2 Les schémas d'ordre élevé

On se donne r et s deux entiers positifs, et on cherche à construire un schéma avec un stencil de taille $r + s + 1$ de la forme

$$u_i^{n+1} = \sum_{k=-r}^s \gamma_k u_{i+k}^n, \quad (\text{IV.2})$$

où γ_k est un coefficient qui dépend du nombre CFL ν .

L'erreur de consistance, au sens des différences finies, pour ces schémas est définie, par

$$R_i^n = u(t^{n+1}, x_i) - \sum_{k=-r}^s \gamma_k u(t^n, x_{i+k}),$$

pour toute fonction régulière u solution de l'équation (IV.1).

Cette définition générale peut être simplifiée par le fait qu'on sait résoudre explicitement l'équation (IV.1) et que donc toute solution vérifie

$$u(t^{n+1}, x_i) = u(t^n, x_i - c\tau).$$

L'erreur de consistance s'écrit alors (en oubliant la dépendance en temps qui ne joue plus)

$$R_i = u(x_i - c\tau) - \sum_{k=-r}^s \gamma_k u(x_{i+k}).$$

Théorème IV.1

On suppose que le nombre CFL $\nu = c\tau/h$ est donné, alors l'ordre en espace du schéma (IV.2) est au plus $p = r + s$, c'est-à-dire que l'on a pour toute fonction régulière u

$$|R_i| \leq C_u \tau h^p.$$

De plus, r et s étant fixés il existe un unique choix des γ_k qui fournissent un schéma d'ordre p appelé schéma optimal de stencil (r, s)

Preuve :

Supposons $x_i = 0$ ce qui ne change rien par translation, et écrivons un développement limité en 0 de toutes les quantités en présence.

On trouve (comme $x_k = 0 + kh$)

$$u(-c\tau) = u(0) - c\tau u'(0) + \sum_{j=2}^{j=p} \frac{(-c\tau)^j}{j!} u^{(j)}(0) + O(\tau^{p+1}),$$

$$u(x_k) = u(0) + kh u'(0) + \sum_{j=2}^{j=p} \frac{(kh)^j}{j!} u^{(j)}(0) + O(h^{p+1}).$$

Si on veut que l'erreur de consistance au sens des différences finies soit d'ordre $p + 1$ il faut donc que

$$\sum_{k=-r}^s k^j \gamma_k = (-\nu)^j, \quad \forall j \in \{0, \dots, p\}.$$

Ces équations forment un système linéaire de type Vandermonde pour les γ_k . Il existe donc un unique jeu de tels coefficients.

Par ailleurs, on voit que l'erreur de consistance sera nulle si u est un polynôme de degré p . En conséquence, on va trouver les coefficients γ_k en prenant pour u l'interpolation de Lagrange $P(x)$ aux points $(x_{i+k})_{-r \leq k \leq s}$ des valeurs (u_{i+k}) . Ce polynôme d'interpolation de Lagrange s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=-r}^s L_{i+k}(x) u_{i+k}, \quad \text{avec} \quad L_{i+k}(x) = \prod_{\substack{l=-r \\ l \neq k}}^s \frac{x - x_{i+l}}{x_{i+k} - x_{i+l}}.$$

En remplaçant ceci dans la définition de l'erreur de consistance, on obtient que la valeur de γ_k est alors donnée par

$$\gamma_k = L_{i+k}(x_i - \tau c) = \prod_{\substack{l=-r \\ l \neq k}}^s \frac{x_i - x_{i+l} - \tau c}{x_{i+k} - x_{i+l}} = \prod_{\substack{l=-r \\ l \neq k}}^s \frac{l + \nu}{l - k}.$$

Remarquons tout d'abord que si ν est égal à un entier compris entre $-s$ et r , alors l'erreur de consistance est nulle (le point $x_i - \tau c$ est alors égal à l'un des x_{i+k} et donc la formule d'interpolation de Lagrange est exacte). Par ailleurs, l'erreur de consistance du schéma d'ordre p est de la forme

$$C_{\nu,c} h^{p+1} \frac{\partial^{p+1} u}{\partial x^{p+1}} + O(h^{p+2}),$$

ce qui implique la remarque suivante :

- Si l'ordre du schéma p est impair, le schéma est dissipatif.
- Si l'ordre du schéma p est pair, le schéma est dispersif.

Donnons maintenant quelques exemples :

- Ordre 1 :

- $r = 1, s = 0$: on trouve $\gamma_{-1} = \nu$ et $\gamma_0 = 1 - \nu$, c'est-à-dire le schéma décentré amont ((DA)).
- $r = 0, s = 1$: on trouve $\gamma_0 = 1 + \nu$ et $\gamma_1 = -\nu$, c'est-à-dire le schéma décentré aval

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu(u_{i+1}^n - u_i^n).$$

- Ordre 2 :

- $r = 2, s = 0$: on trouve $\gamma_{-2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$, $\gamma_{-1} = \nu(2-\nu)$ et $\gamma_0 = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$, c'est la méthode dite *Beam-Warming* :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu \underbrace{\frac{3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{2}}_{\sim \partial_x u} + \frac{\nu^2}{2} \underbrace{(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)}_{\sim \partial_x^2 u}.$$

- $r = 1, s = 1$: on trouve $\gamma_{-1} = \frac{\nu(1+\nu)}{2}$, $\gamma_0 = 1 - \nu^2$, $\gamma_1 = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$, c'est-à-dire le schéma de Lax-Wendroff :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n). \quad (\text{IV.3})$$

- $r = 0, s = 2$: on obtient des formules symétriques à celles du cas $r = 2$ et $s = 0$. On verra pourquoi cette méthode n'est pas utilisée et n'a donc pas de nom ...

- Ordre 3 :

- $r = 3, s = 0$: c'est le schéma d'ordre 3 totalement décentré, ce schéma n'est pas utilisable non plus pour des raisons de stabilité (voir le Théorème IV.2).

- $r = 2, s = 1$: on obtient $\gamma_{-2} = \frac{\nu(\nu^2-1)}{6}$, $\gamma_{-1} = \frac{\nu(1+\nu)(2-\nu)}{2}$, $\gamma_0 = \frac{(2-\nu)(1-\nu^2)}{2}$ et $\gamma_1 = \frac{-\nu(1-\nu)(2-\nu)}{6}$, ce qui donne le schéma du troisième ordre partiellement décentré.

1.3 Stabilité L^2

Théorème IV.2 (Voir [HV03])

On suppose $\nu \geq 0$ et on considère le schéma linéaire optimal de la forme (IV.2) pour un stencil (r, s) donné.

1. Si $r = s$, le schéma est L^2 stable si $\nu \leq 1$.
2. Si $r = s + 1$, le schéma est L^2 stable si $\nu \leq 1$.
3. Si $r = s + 2$, le schéma est L^2 stable si $\nu \leq 2$.

Pour les autres valeurs de r et s , le schéma est instable au moins pour ν petit.

On peut bien sur écrire un résultat équivalent pour $\nu < 0$ mais alors le décentrement a lieu dans l'autre sens ($s = r + 1$ et $s = r + 2$).

Par ailleurs, on peut montrer que ces conditions suffisantes de stabilité sont également nécessaires mais c'est plus complexe.

Preuve :

On utilise ici la caractérisation de la stabilité L^2 au sens de Von Neumann c'est-à-dire en calculant le facteur d'amplification de données initiales de la forme ondes $e^{i\xi x}$. Le facteur d'amplification s'écrit pour le schéma considéré

$$a(\xi) = \sum_{k=-r}^s \gamma_k e^{ik\xi}.$$

La condition de stabilité est donc $|a(\xi)| \leq 1$ pour tout ξ .

On prend $x_0 = 0$ pour fixer les idées. On considère le polynôme d'interpolation

$$P_{-r,s}(x, \xi) = \sum_{k=-r}^s L_k(x) e^{i\xi x_k}.$$

On a par définition $P_{-r,s}(x_0 - \tau c) = \sum_{k=-r}^s \gamma_k e^{i\xi x_k} = a(\xi h)$, on aura donc la stabilité si on montre l'inégalité $|P_{-r,s}(-\tau c, \xi)| \leq 1$ pour toutes les valeurs de ξ . En ramenant tout à $h = 1$ il faut donc montrer

$$|\tilde{P}_{-r,s}(-\nu, \xi)| \leq 1, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R} \text{ et tout } \nu \text{ convenable,}$$

où on a noté

$$\tilde{P}_{-r,s}(x, \xi) = \sum_{k=-l}^s \tilde{L}_k(x) e^{ik\xi}, \quad \tilde{L}_k(x) = \prod_{\substack{l=-r \\ l \neq k}}^s \frac{x-l}{k-l}.$$

- Cas $r = s$.

On aura en particulier démontré la stabilité pour $\nu \leq 1$ si on montre que $|\tilde{P}_{-s,s}(x, \xi)| \leq 1$ pour tout ξ et tout $x \in [-1, 0]$. Comme le polynôme considéré est symétrique, c'est en fait équivalent à montrer la borne pour $x \in [0, 1]$. De même, par périodicité, il suffit d'étudier le cas $\xi \in [0, \pi]$.

Pour cela, on pose $P = \tilde{P}_{-s,s}$ pour ne pas alourdir les notations et on écrit ce polynôme sous la forme $P(x, \xi) = C(x, \xi) + iS(x, \xi)$, avec C et S deux polynômes réels. Comme on a $L_{-k}(-x) = L_k(x)$ pour tout x , on constate immédiatement que

$$\overline{P(-x, \xi)} = P(x, \xi),$$

ce qui montre que $x \mapsto C(x, \xi)$ est pair (donc d'ordre $2r$) et $x \mapsto S(x, \xi)$ est impair (d'ordre $2r - 1$). De plus, par définition ces polynômes sont les interpolations de Lagrange de $\cos(\xi x)$ et $\sin(\xi x)$ respectivement aux points $-r, \dots, r$. Ainsi, on a la relation

$$\frac{\partial C}{\partial \xi}(x, \theta) = -xS(x, \theta),$$

car les deux membres de cette relation définissent des polynômes d'ordre $2r$ qui sont égaux aux points $-r, \dots, r$. De façon similaire xC et $\partial_\xi S$ sont deux polynômes de degré au plus $2r + 1$ qui sont égaux aux points $-r, \dots, r$, on a donc la relation

$$xC - \partial_\xi S = M \prod_{k=-r}^r (x - k).$$

Il reste donc à déterminer le coefficient M de plus haut degré de ce polynôme qui n'est autre que le coefficient dominant de C et qui vaut donc

$$M = \sum_{k=-r}^r \frac{1}{\prod_{l \neq k} (k - l)} \cos(\xi k) = \sum_{k=-r}^r \frac{(-1)^{r-k}}{(r-k)!(r+k)!} \cos(\xi k),$$

d'où

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-r}^r \frac{(-1)^{r-k}}{(2r)!} \binom{2r}{r+k} e^{i\xi k} \right) = \frac{1}{(2r)!} \operatorname{Re} \left(e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2} \right)^{2r} \\ &= \frac{(-1)^s}{(2r)!} (2 \sin(\xi/2))^{2r} \end{aligned}$$

Au final, ceci démontre que $xC - \partial_\xi S \geq 0$ pour tout ξ et tout $x \in [0, 1]$.

On peut donc calculer maintenant

$$\partial_\xi (C^2 + S^2) = 2(C\partial_\xi C + S\partial_\xi S) = 2S(-xC + \partial_\xi S).$$

On a vu que le second facteur est toujours positif pour les valeurs de x et ξ auxquelles on s'intéresse. Il reste à étudier le signe de S . Pour cela, on va démontrer tout d'abord que pour tout ξ assez petit on a

$$S(x, \xi) \geq \frac{1}{2}x\xi, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (\text{IV.4})$$

En effet, d'après l'estimation d'erreur de l'interpolation de Lagrange appliquée, ξ étant fixé, à la fonction $x \mapsto \sin(\xi x)$ on obtient

$$|S(x, \xi) - \sin(\xi x)| \leq C \left| \prod_{k=-r}^r (x - k) \right| |\xi|^{2r+1} \leq C_2 |x| |\xi|^{2r+1}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Par ailleurs, pour tout ξ assez petit et $x \in [0, 1]$, on a

$$|\sin(\xi x) - \xi x| \leq C_3 |\xi x|^3 \leq C_4 |x| |\xi|^2.$$

En rassemblant tout cela, on obtient la minoration (IV.4). Donc $S(\cdot, \xi)$ est strictement positif sur $]0, 1]$ pour tout ξ assez petit. Par ailleurs, nous avons $S(1, \xi) = \sin(\xi)$ et donc $S(1, \xi)$ ne s'annule pas pour tout $\xi \in [0, \pi]$. Par continuité des racines du polynôme $S(x, \xi)$, on voit que S ne peut pas devenir négatif pour $x \in [0, 1]$ et $\xi \in [0, \pi]$.

Au final on a donc $\partial_\xi (C^2 + S^2) \leq 0$ et $C^2(x, 0) + S^2(x, 0) = 1$ donc le module de P est bien plus petit que 1 dans le domaine d'intérêt des valeurs considéré.

Ceci démontre bien la stabilité pour $\nu \leq 1$ du schéma centré.

- Cas $r = s + 2$.

Avec les notations précédentes, on a $P_{-s-2,s}(x, \xi) = e^{-i\xi} P_{-s-1,s+1}(x+1, \theta)$ donc on a bien $|P_{-s-2,s}(x, \xi)| \leq 1$ pour tout ξ et tout $x \in [-2, 0]$.

- Cas $r = s + 1$.

On utilise une formule de récurrence sur les polynômes de Lagrange qui s'écrit

$$P_{-s-1,s}(x, \xi) = \frac{x - x_{-s-1}}{x_s - x_{-s-1}} P_{-s,s}(x, \xi) + \frac{x - x_s}{x_{-s-1} - x_s} P_{-s-1,s-1}(x, \theta),$$

d'où l'on déduit la stabilité dès que $-1 \leq x \leq 0$ en utilisant les deux cas précédents.

On ne démontrera pas ici le caractère instable des schémas pour les autres valeurs de r et s . ■

Exercice : Tracer la fonction d'amplification $a(\xi)$ pour différents schémas et différentes valeurs du nombre de CFL. En déduire une région de stabilité pour les schémas considérés.

La preuve de stabilité au sens de Von Neumann est souvent plus simple pour des schémas linéaires, mais il est très instructif de savoir démontrer *à la main* la stabilité des schémas numériques car les méthodes s'adaptent plus facilement au cadre non-linéaire.

Preuve (de la stabilité du schéma de Lax-Wendroff):

On veut montrer une estimation L^2 sur la solution du schéma de LW. Pour cela on multiplie le schéma (IV.3) au point i et à l'instant t_n par hu_i^n (Si le schéma était implicite on devrait multiplier par u_i^{n+1}). On somme sur i et on utilise la formule $(a-b)b = a^2/2 - b^2/2 - (a-b)^2/2$, il vient

$$\frac{1}{2}\|U^{n+1}\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|U^n\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|U^{n+1} - U^n\|_{L^2}^2 = -\frac{\nu^2}{2} \sum_i h(u_{i+1}^n - u_i^n)^2. \quad (\text{IV.5})$$

On note maintenant $\delta_{i+1/2}^n = u_{i+1}^n - u_i^n$ de sorte que le schéma s'écrit

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n &= -\frac{\nu}{2}(\delta_{i+1/2}^n + \delta_{i-1/2}^n) + \frac{\nu^2}{2}(\delta_{i+1/2}^n - \delta_{i-1/2}^n) \\ &= \frac{\nu(\nu-1)}{2}\delta_{i+1/2}^n - \frac{\nu(\nu+1)}{2}\delta_{i-1/2}^n. \end{aligned}$$

Si $|\nu| \leq 1$, on déduit de cela (par l'inégalité de Jensen i.e. la convexité de $x \mapsto x^2$)

$$\begin{aligned} |u_i^{n+1} - u_i^n|^2 &\leq \nu^2 \left(\frac{(1-\nu)}{2} |\delta_{i+1/2}^n| + \frac{(1+\nu)}{2} |\delta_{i-1/2}^n| \right)^2 \\ &\leq \nu^2 \left(\frac{(1-\nu)}{2} |\delta_{i+1/2}^n|^2 + \frac{(1+\nu)}{2} |\delta_{i-1/2}^n|^2 \right). \end{aligned}$$

En multipliant par h et en sommant sur i on obtient

$$\|U^{n+1} - U^n\|_{L^2}^2 \leq \nu^2 \sum_i h |\delta_{i+1/2}^n|^2.$$

En revenant à (IV.5), on obtient bien l'inégalité $\|U^{n+1}\|_{L^2} \leq \|U^n\|_{L^2}$. ■

1.4 Un mot sur les grilles non uniformes

Dans le cas d'une grille de discrétisation non uniforme en 1D, on peut généraliser l'approche précédente, et mener tous les calculs. Un schéma linéaire de stencil (r, s) s'écrit alors

$$u_i^{n+1} = \sum_{k=-r}^s \gamma_k^i u_{i+k}^n, \quad (\text{IV.6})$$

et on peut obtenir ainsi par interpolation un schéma d'ordre $r+s$ au sens des différences finies.

ATTENTION : En général on va perdre la conservativité du schéma.

2 Etude générale des schémas

2.1 Schémas conservatifs

On note $U \in \mathbb{R}^Z \mapsto S(U) \in \mathbb{R}^Z$ un schéma numérique pour l'équation d'advection c'est-à-dire que l'itération en temps s'écrit

$$U^{n+1} = S(U^n).$$

On suppose *a priori* que :

- Le schéma est une fonction Lipschitzienne de tous ses arguments.
- Le schéma a un stencil fini (r, s) , c'est-à-dire que $S(U)_i$ ne dépend que des valeurs de U aux points $i - r, \dots, i, \dots, i + s$.
- Le schéma résout les constantes exactement, c'est-à-dire que si $u_i = \alpha$ pour tout i alors $S(U)_i = \alpha$ pour tout i .
- Le schéma est **conservatif**, c'est-à-dire que pour tout U on a

$$\sum_i (S(U))_i = \sum_i U. \quad (\text{IV.7})$$

Notons que les schémas linéaires (IV.2) introduits précédemment vérifient toutes ces propriétés. On peut mettre ces schémas sous une forme particulière dite *conservative*.

Proposition IV.3

Tout schéma vérifiant les hypothèses ci-dessus se mettent de façon unique sous la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n), \quad (\text{IV.8})$$

avec

$$f_{j+1/2}^n = F_{j+\frac{1}{2}}(u_{j-r+1}^n, \dots, u_{j+s}^n), \quad \text{et} \quad f_{j-1/2}^n = F_{j-\frac{1}{2}}(u_{j-r}^n, \dots, u_{j+s-1}^n).$$

Preuve :

On pose

$$f_{j+\frac{1}{2}}(U) = \sum_{k=-\infty}^j (S_k(U) - u_k),$$

dont on vérifie (en utilisant le stencil de S et la conservativité) qu'elle ne dépend en fait que de $u_{j-r+1}, \dots, u_{j+s}$, et on obtient immédiatement la propriété souhaitée. ■

La fonction $F_{j+\frac{1}{2}}$ est appelée *flux numérique* au point $x_{j+\frac{1}{2}}$. Si le schéma est invariant par translation alors $F_{j+\frac{1}{2}} = F_{j-\frac{1}{2}}$ pour tout j , on la note alors F .

Comme le schéma résout exactement les constantes il est facile de voir que

$$u \mapsto F_{i+1/2}(u, \dots, u)$$

est une fonction de u indépendante de i , on la note $f(u)$ et le schéma S est alors une approximation consistante de la loi de conservation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0.$$

Le cas où $f(u) = cu$ redonne bien entendu l'équation d'advection à vitesse constante.

A partir d'un schéma linéaire qui s'écrit (IV.2), on trouve l'expression de la fonction F par

$$F(u_{-r+1}, \dots, u_s) = \sum_{k=-r+1}^s \beta_k u_k,$$

où

$$-\frac{\tau}{h} (\beta_k - \beta_{k+1}) = \tilde{\gamma}_k,$$

avec $\beta_{-r} = \beta_{s+1} = 0$ et $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k$ si $k \neq 0$ et $\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 - 1$. Noter que les conditions de consistance sur le schéma implique que la somme des $\tilde{\gamma}_k$ est nulle, ce qui assure l'existence et l'unicité des coefficients β_k .

Exemples pour l'équation d'advection - On obtient la formule suivante pour le flux numérique dans les cas suivants

- Schéma décentré amont :

$$f_{i+1/2}^n = cu_i^n.$$

- Schéma Beam-Warming :

$$\begin{aligned} f_{i+1/2}^n &= c \left(\frac{3-\nu}{2} u_i^n - \frac{1-\nu}{2} u_{i-1}^n \right) \\ &= cu_i^n - c \frac{1-\nu}{2} (u_i^n - u_{i-1}^n). \end{aligned}$$

- Schéma de Lax-Wendroff :

$$\begin{aligned} f_{i+1/2}^n &= c \left(\frac{1-\nu}{2} u_{i+1}^n + \frac{1+\nu}{2} u_i^n \right) \\ &= cu_i^n + c \frac{1-\nu}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n). \end{aligned}$$

- Schéma du troisième ordre partiellement décentré (appelé DST3 par certains auteurs) :

$$\begin{aligned} f_{i+1/2}^n &= c \left(-\frac{1}{6}(1-\nu^2)u_{i-1}^n + \frac{1}{6}(1+\nu)(5-2\nu)u_i^n + \frac{1}{6}(2-\nu)(1-\nu)u_{i+1}^n \right) \\ &= cu_i^n + c \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{1+\nu}{3}(u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{2-\nu}{3}(u_{i+1}^n - u_i^n) \right] \end{aligned}$$

2.2 Nouvelles propriétés qualitatives des schémas

On a obtenu précédemment des conditions de stabilité L^2 de ces schémas qui permettent de dire quels sont, parmi ces schémas, ceux qui permettent de passer le calcul sans exploser en temps fini.

On s'intéresse maintenant à de nouvelles propriétés qualitatives de ces schémas.

Définition IV.4

1. On dit qu'un schéma S est **monotone** si pour tous U, V on a

$$U \geq V \implies S(U) \geq S(V).$$

2. On dit que le schéma S est **contractant dans L^1** si pour tout $U, V \in l^1(\mathbb{Z})$ on a

$$\|S(U) - S(V)\|_{L^1} \leq \|U - V\|_{L^1}.$$

3. On dit que le schéma S est **TVD** (pour Total Variation Diminishing) si pour tout $U \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ on a

$$V(S(U)) \leq V(U),$$

$$\text{où } V(U) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|.$$

4. On dit que le schéma S est **MP** (pour monotonicity preserving) si pour tout U croissante en i (resp. décroissante) alors $S(U)$ est croissante (resp. décroissante).

La propriété de monotonie implique par exemple que si la donnée initiale est positive, la solution numérique va rester positive, ce qui est fort agréable. La propriété TVD est naturelle car la norme BV de la solution d'une équation de transport monodimensionnelle est conservée, et la norme BV de la solution d'une loi de conservation scalaire diminue au cours du temps.

Le théorème suivant est vrai pour les schémas numériques pour les lois de conservation non-linéaires mais on ne le démontrera que dans le cadre de l'équation d'advection, ce qui est bien sûr plus simple.

Théorème IV.5

Pour tout schéma lipschitzien S , on a les implications suivantes

$$\text{monotone} \Leftrightarrow \text{contractant dans } L^1 \Rightarrow \text{TVD} \Rightarrow \text{MP}.$$

Preuve :

- Montrons la dernière implication et supposons que le schéma S soit TVD. Supposons que S ne soit pas **MP**, il existe donc U croissante (par exemple) et i_0 tels que $S(U)_{i_0+1} < S(U)_{i_0}$. Quitte à rendre U constante au voisinage de l'infini (avec pour limites $u_{-\infty}$ et $u_{+\infty}$), on ne change pas la monotonie de U ni les valeurs $S(U)_{i_0}$ et $S(U)_{i_0+1}$ car S a un stencil borné.

Deplus, comme S résout les constantes, $S(U)$ est également constant à l'infini et possède les mêmes limites en $\pm\infty$. On en déduit que

$$|u_{+\infty} - u_{-\infty}| = \left| \sum_i (S(U)_{i+1} - S(U)_i) \right| \leq \sum_i |S(U)_{i+1} - S(U)_i| = V(S(U)),$$

or comme S est TVD on a également $V(S(U)) \leq V(U) = |u_{+\infty} - u_{-\infty}|$ car U est monotone. On en déduit que l'inégalité écrite ci-dessus est en fait une inégalité. Ceci implique que tous les termes de la somme sont positifs, ce qui contredit l'hypothèse $S(U)_{i_0+1} < S(U)_{i_0}$.

- Montrons la seconde implication. Supposons que S soit contractant dans L^1 et soit $U \in l^1(\mathbb{Z})$. On définit le translaté V de U par

$$v_i = u_{i+1}.$$

D'après la propriété de contraction L^1 on a

$$\|S(V) - S(U)\|_{L^1} \leq \|U - V\|_{L^1},$$

mais, par définition de V , cette inégalité n'est autre que $V(S(U)) \leq V(U)$.

- Montrons enfin la première équivalence.

En utilisant la conservativité du schéma, qui est vraie pour tout vecteur U et en dérivant par rapport à u_k , k étant donné, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall W \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \quad \sum_i \frac{\partial S_i}{\partial w_k}(W) = 1. \quad (\text{IV.9})$$

Remarquons que toutes les sommes sont finies car le stencil du schéma est supposé borné.

- Supposons maintenant que le schéma est monotone, ce qui implique que $\frac{\partial S_i}{\partial w_k}$ est positif pour tout i et tout k .

Soient U et V deux vecteurs. Si on note s_i le signe de $S_i(U) - S_i(V)$ on a

$$\begin{aligned} \|S(U) - S(V)\|_{L^1} &= \sum_i s_i (S_i(U) - S_i(V)) = \sum_i s_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \theta} S_i(\theta U + (1 - \theta)V) d\theta \\ &= \sum_i s_i \int_0^1 \sum_k (u_k - v_k) \frac{\partial S_i}{\partial w_k}(\theta U + (1 - \theta)V) d\theta \\ &\leq \sum_k |u_k - v_k| \int_0^1 \sum_i \frac{\partial S_i}{\partial w_k}(\theta U + (1 - \theta)V) d\theta \\ &= \sum_k |u_k - v_k| = \|U - V\|_{L^1}. \end{aligned}$$

- Supposons que le schéma est contractant dans L^1 et montrons qu'il est monotone. Soient U et V deux vecteurs qui ne diffèrent qu'en $i = 0$ et tels que $u_0 > v_0$. Si on montre que $S(U) \geq S(V)$ on aura montré le résultat. Pour cela on écrit

$$0 < h(u_0 - v_0) = h \sum_i (u_i - v_i) = h \sum_i (S(U)_i - S(V)_i) \leq \|S(U) - S(V)\|_{L^1} \leq \|U - V\|_{L^1} = h(u_0 - v_0),$$

donc toutes les inégalités sont des égalités. Il en résulte que $S(U) \geq S(V)$ et le résultat est démontré. ■

Remarque IV.6

Si le schéma S est **linéaire** alors la contraction L^1 est évidemment équivalente à la propriété de diminution de la norme L^1 .

2.3 Quelques mauvaises nouvelles ...

Théorème IV.7 (Godunov)

1. Un schéma linéaire (i.e. de la forme (IV.2)) préserve la monotonie si et seulement si tous les coefficients γ_k sont positifs. Dans le cadre linéaire toutes les propriétés de la définition IV.4 sont donc équivalentes.
2. Si ν n'est pas entier, tout schéma linéaire d'ordre au moins 2 ne préserve pas la monotonie.

Preuve :

1. Supposons que tous les γ_k soient positifs, et soit U un vecteur croissant alors on a

$$S_{i+1}(U) - S_i(U) = \sum_k \underbrace{\gamma_k}_{\geq 0} \underbrace{(U_{i+1+k} - U_{i+k})}_{\geq 0} \geq 0.$$

Soit maintenant k_0 un entier positif. On construit U (qui est croissante) en posant $u_i = 0$ pour $i \leq k_0$ et $u_i = 1$ pour $i > k_0$. On a alors

$$S_1(U) - S_0(U) = \sum_k \gamma_k (U_{k+1} - U_k) = \gamma_{k_0} \geq 0,$$

car $S(U)$ doit être croissante.

2. On a vu que l'erreur de consistance d'un schéma d'ordre au moins 2 est une dérivée au moins troisième de la fonction. Un tel schéma est donc exact pour la donnée initiale $\varphi(0, x) = \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Autrement dit si on pose $u_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ pour tout i , on a

$$\varphi(\tau, x_i) = \left(\frac{x_i - c\tau}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(i - \nu - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \sum_k \gamma_k \underbrace{\left[\left(i + k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]}_{\geq 0, \forall k}, \quad \forall i.$$

Comme les γ_k sont supposés positifs (car on suppose que le schéma préserve la monotonie), on déduit de cela que pour tout i on a

$$(i - \nu)(i - \nu - 1) = \left(i - \nu - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0, \quad \forall i,$$

et on voit que ceci n'est possible que si ν est un entier.

■
Conclusions : Les schémas linéaires sont condamnés à être du premier ordre ou alors à ne vérifier aucune des propriétés agréables de la définition IV.4. Donc, la morale est :

MÊME POUR UN PROBLÈME LINÉAIRE SIMPLE, ON SEMBLE CONTRAINTS D'UTILISER DES SCHÉMAS
 NON-LINÉAIRES !

Les ennuis ne sont malheureusement pas terminés ...

Théorème IV.8 (Voir [HHL76])

Tout schéma S (même non-linéaire) de classe \mathcal{C}^2 , invariant par translation, conservatif et monotone ne peut être d'ordre supérieur à 1 sur les solutions régulières de la loi de conservation.

Preuve :

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on note \bar{U} le vecteur constant égal à u . D'après, l'invariance par translation le schéma s'écrit

$$S(U) = U - \frac{\tau}{h}(g(U) - g(TU)),$$

où T est l'opérateur de translation vers la gauche : $(TU)_i = U_{i-1}$. De plus, d'après la relation de consistance, on a

$$g(\bar{U}) = f(u),$$

ce qui donne en dérivant

$$\sum_k \frac{\partial g}{\partial u_k}(\bar{U}) = f'(u),$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_j}{\partial u_k}(\bar{U}) &= \delta_{jk} - \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial g}{\partial u_k}(\bar{U}) - \frac{\partial g \circ T}{\partial u_k}(\bar{U}) \right) \\ &= \delta_{jk} - \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial g}{\partial u_k}(\bar{U}) - \frac{\partial g}{\partial u_{k+1}}(\bar{U}) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_j}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) &= -\frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) - \frac{\partial^2 g \circ T}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) \right) \\ &= -\frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) - \frac{\partial^2 g}{\partial u_{k+1} \partial u_{l+1}}(\bar{U}) \right). \end{aligned}$$

On déduit de tout cela les propriétés suivantes

$$\sum_k \frac{\partial S_j}{\partial u_k}(\bar{U}) = 1, \quad (\text{IV.10})$$

$$\begin{aligned} \sum_k (k-j) \frac{\partial S_j}{\partial u_k}(\bar{U}) &= -\frac{\tau}{h} \sum_k (k-j) \left(\frac{\partial g}{\partial u_k}(\bar{U}) - \frac{\partial g}{\partial u_{k+1}}(\bar{U}) \right) \\ &= -\frac{\tau}{h} \sum_k \frac{\partial g}{\partial u_k}(\bar{U}) = -\frac{\tau}{h} f'(u), \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} (k-l)^2 \frac{\partial^2 S_j}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) &= -\frac{\tau}{h} \sum_{k,l} (k-l)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial u_k}(\bar{U}) - \frac{\partial^2 g}{\partial u_{k+1} \partial u_{l+1}}(\bar{U}) \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

On choisit maintenant un indice j , on introduit le vecteur constant $\bar{U} = (u(x_j))$, et $U = (u(x_k))_k$ de sorte que les formules de Taylor donnent

$$\begin{aligned}
S_j(U) &= S_j(\bar{U}) + \sum_k \frac{\partial S_j}{\partial u_k}(\bar{U}) \cdot (u(x_k) - u(x_j)) + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 S_j}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) \cdot (x_k - x_j)(x_l - x_j) + O(h^3) \\
&= u(x_j) + hu'(x_j) \sum_k \frac{\partial S_j}{\partial u_k}(\bar{U}) \cdot (k - j) + \frac{1}{2} h^2 u''(x_j) \sum_k \frac{\partial S_j}{\partial u_k}(\bar{U}) (k - j)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} h^2 u'(x_j)^2 \sum_{k,l} \frac{\partial^2 S_j}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) \cdot (k - j)(l - j) + O(h^3) \\
&= u(x_j) - \tau u'(x_j) f'(u(x_j)) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial}{\partial x}|_{x=x_j} \left(\sum_k (k - j)^2 \frac{\partial S_j}{\partial u_k}(u(x)) u'(x) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} h^2 u'(x_j)^2 \sum_{k,l} \frac{\partial^2 S_j}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) \cdot (k - j)(l - k) + O(h^3).
\end{aligned}$$

Or, par symétrie des dérivées secondes, on a

$$X = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 S_j}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) \cdot (k - j)(l - k) = \underbrace{\sum_{k,l} \frac{\partial^2 S_j}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) \cdot (k - l)(l - k)}_{=0, \text{ voir (IV.12)}} + \underbrace{\sum_{k,l} \frac{\partial^2 S_j}{\partial u_k \partial u_l}(\bar{U}) \cdot (l - j)(l - k)}_{=-X},$$

et donc $X = 0$.

Au final, il reste donc

$$S_j(U) = u(x_j) - \tau \frac{\partial}{\partial x}|_{x=x_j} (f(u(x))) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial}{\partial x}|_{x=x_j} \left(\sum_k (k - j)^2 \frac{\partial S_j}{\partial u_k}(u(x)) u'(x) \right) + O(h^3).$$

Par ailleurs, si u est une solution régulière de la loi de conservation, on a

$$\partial_t^2 u = -\partial_t (f'(u) \partial_x u) = -f''(u) \partial_t u \partial_x u - f'(u) \partial_t \partial_x u = f''(u) f'(u) \partial_x u + f'(u) \partial_x (f'(u) \partial_x u) = \partial_x (f'(u)^2 \partial_x u).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
u(x_j, t + \tau) &= u(x_j) + \tau \partial_t u(x_j, t) + \frac{1}{2} \tau^2 \partial_t^2 u(x_j, t) + O(\tau^3) \\
&= u(x_j) - \tau \frac{\partial}{\partial x}|_{x=x_j} (f(u(x))) + \frac{1}{2} \tau^2 \partial_x (f'(u)^2 \partial_x u)|_{x=x_j} + O(\tau^3).
\end{aligned}$$

En mettant tous ces calculs bout à bout, on obtient une erreur de consistance qui s'écrit

$$R_j^n = -\tau^2 \partial_x (\beta(u(x)) \partial_x u) + O(\tau^3),$$

où β est la fonction (qui dépend de u et du schéma) définie par

$$\beta(u) = \frac{h^2}{2\tau^2} \sum_k (k - j)^2 \frac{\partial S_j}{\partial u_k}(\bar{U}) - \frac{1}{2} (f'(u))^2.$$

On va maintenant montrer que β est une fonction strictement positive. Ceci montrera que le schéma est consistant à l'ordre 3 avec la solution v de la régularisation parabolique $\partial_t v + \partial_x f(v) - \tau^2 \partial_x (\beta(u) \partial_x v) = 0$ qui approche seulement à l'ordre 2 la fonction u .

Pour montrer que β est positive, on va utiliser l'hypothèse de monotonie (que l'on a pas utilisée jusqu'à présent !!). On part de (IV.12) qui donne

$$\frac{\tau^2}{h^2} (f'(u))^2 \leq \left(\sum_k (k - j) \frac{\partial S_j}{\partial u_k} \right)^2.$$

Comme le schéma est monotone, les dérivées partielles qui apparaissent ici sont positives. On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et obtenir, avec (IV.10),

$$\frac{\tau^2}{h^2} (f'(u))^2 \leq \left(\sum_k (k-j)^2 \frac{\partial S_j}{\partial u_k} \right) \left(\sum_k \frac{\partial S_j}{\partial u_k} \right) = \left(\sum_k (k-j)^2 \frac{\partial S_j}{\partial u_k} \right).$$

Ceci prouve exactement que β est positive ou nulle. Elle ne peut être nulle que si on a égalité dans Cauchy-Schwarz, ce qui ne peut arriver que si S_j ne dépend que d'une seule variable, ce qui donne pour S un simple opérateur de translation. ■

Pour les schémas linéaires d'ordre élevé étudiés précédemment, on ne peut espérer d'après le théorème de Godounov qu'ils soient positifs, TVD, etc ... L'idée est donc de les modifier de façon **non-linéaire** pour assurer le caractère monotone (et donc TVD) du schéma, tout en conservant la conservativité, c'est pour cela qu'on travaille sur la forme conservative du schéma.

2.4 Convergence et estimation d'erreur

Théorème IV.9

On suppose donnée une norme $\|\cdot\|$ pour laquelle le schéma est faiblement contractant sous la condition CFL $\nu \leq \nu_0$, i.e. il existe $\alpha > 0$ ne dépendant que de ν_0 tel que pour tous U, V on a

$$\|S(U) - S(V)\| \leq (1 + \alpha\tau)\|U - V\|.$$

Par ailleurs on suppose que l'erreur de troncature du schéma est d'ordre p en norme $\|\cdot\|$, c'est-à-dire que

$$\|(u(x_i, t^{n+1}))_i - S((u(x_i, t^n))_i)\| \leq M\tau h^p.$$

Alors le schéma converge alors l'ordre p , c'est-à-dire que pour tout $T > 0$ et tout n tel que $n\partial_t \leq T$ on a

$$\|(u(x_i, t^n))_i - U^n\| \leq MT e^{\alpha T} (\tau^p + h^p),$$

où U^0 est la donnée initiale et U^n la solution du schéma à l'itération n .

Preuve :

On note \bar{U}^n la solution exacte à l'instant t_n , et $e^n = \bar{U}^n - U^n$ l'erreur à l'instant n . Par la propriété de faible contraction on obtient

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\| &\leq \|\bar{U}^{n+1} - S(\bar{U}^n)\| + \|S(\bar{U}^n) - S(U^n)\| \\ &\leq M\tau h^p + (1 + \alpha\tau)\|e^n\|. \end{aligned}$$

Si on somme ceci entre les itérations $n = 0$ et $n = N$ avec $N\tau \leq T$, on trouve (vu que $e^0 = 0$)

$$\sup_{n \leq N} \|e^n\| \leq Mh^p \sum_n \tau (1 + \alpha\tau)^{N-1-n} \leq Me^{\alpha T} Th^p.$$

On peut appliquer ce lemme avec les schémas linéaires L^2 stables, ou bien avec les schémas éventuellement non-linéaires contractants dans L^1 (i.e. monotones).

En pratique, on verra que les schémas d'ordre élevé ne sont jamais monotones. La propriété de contraction (même faible) est alors difficile à montrer pour ces schémas.

On va voir que l'on peut montrer la convergence du schéma en utilisant la propriété TVD (ou la propriété plus faible de Total Variation Bounded).

Définition IV.10

On dit qu'un schéma S est TVB si pour toute donnée initiale U^0 à variation bornée, pour tout $T > 0$ et tout $0 < \tau < \tau_0$, il existe $R > 0$ tel que

$$V(U^n) \leq R,$$

pour tout n tel que $n\tau \leq T$.

La remarque évidente est qu'un schéma TVD est aussi TVB car la variation totale diminue au cours du temps.

Théorème IV.11

Tout schéma TVB converge dans L^1_{loc} , quand τ et h tendent vers 0 en respectant la CFL, vers l'unique solution faible de l'équation d'advection.

Preuve :

Pour tout τ et h on note $u_{\tau,h}$ la fonction constante par morceaux égale à U_i^n sur $]n\tau, (n+1)\tau[\times C_i$. La fonction $u_{\tau,h}$ est dans l'espace $BV(]0, T[\times \mathbb{R})$ et on a

$$\|u_{\tau,h}\|_{BV} \leq \sum_n (\|U^{n+1} - U^n\|_{L^1} + \tau V(U^n)).$$

On souhaite montrer que cette famille de fonctions est bornée dans BV . Le schéma étant supposé TVB, il est clair que le second terme de la somme est contrôlé, il reste donc à contrôler le terme de dérivée temporelle.

Pour cela, on revient à la forme conservative du schéma pour trouver pour tout U

$$\begin{aligned} \|S(U) - U\|_{L^1} &= \tau \sum_j |F_{j+1/2}(u_{j-r+1}, \dots, u_{j+s}) - F_{j-1/2}(u_{j-r}, \dots, u_{j+s-1})| \\ &\leq \tau \sum_j \left(|F_{j+1/2}(u_{j-r+1}, \dots, u_{j+s}) - F_{j+1/2}(u_j, \dots, u_j)| \right. \\ &\quad \left. + |F_{j+1/2}(u_j, \dots, u_j) - F_{j-1/2}(u_{j-r}, \dots, u_{j+s-1})| \right) \\ &\leq \tau L_1 \sum_j \sum_{k=-r}^s |u_{j+k} - u_j| \\ &\leq \tau L_2 V(U), \end{aligned}$$

où on a utilisé la consistance et la régularité (Lipschitz) des flux.

On déduit de tout cela que la famille $(u_{\tau,h})_{\tau,h}$ est bornée dans BV . D'après le théorème de Helly, l'injection de BV dans L^1 est compacte, on peut donc extraire une sous-suite qui converge fortement dans L^1 vers une fonction $u \in L^1(]0, T[\times \mathbb{R})$. Il reste à montrer que cette fonction est solution du problème. Comme on a unicité de la solution faible du problème, on en déduira immédiatement la convergence de toute la suite vers cette limite.

Soit φ une fonction test à support compact en espace et telle que $\varphi = 0$ au voisinage de l'instant final T . On note $\varphi_j^n = \varphi(x_j, t^n)$. On multiplie le schéma sous forme conservative par φ_j^n et on somme en espace temps. Il vient

$$\sum_n \sum_i \varphi_i^n (u_i^{n+1} - u_i^n) = -\frac{\tau}{h} \sum_n \sum_i \varphi_i^n (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n).$$

En effectuant une intégration par parties discrète, on trouve

$$-\sum_i \varphi_i^0 u_i^0 - \sum_{n \geq 1} \sum_i u_i^n (\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}) = \frac{\tau}{h} \sum_n \sum_i (\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n) f_{i+1/2}^n.$$

Ceci s'écrit encore

$$-\sum_i h \varphi_i^0 u_i^0 - \sum_{n \geq 1} \sum_i h \tau u_i^n \frac{\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}}{\tau} = \sum_n \sum_i \tau h \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} f_{i+1/2}^n.$$

Comme φ est régulière, on montre aisément par des formules de Taylor que les quotients différentiels présents dans cette formule convergent dans L^∞ vers les dérivées $\partial_t \varphi$ et $\partial_x \varphi$ de la fonction test. Si on a pris soin de prendre pour u_i^0 la moyenne de u sur la cellule C_i , on voit qu'on peut passer à la limite dans le membre de gauche de l'identité.

Il reste à passer à la limite dans le membre de droite. Bien que l'équation soit linéaire, le schéma est éventuellement non-linéaire. Pour passer à la limite dans ce terme on utilise sa régularité Lipschitz

$$|F_{i+1/2}(u_{j-r+1}^n, \dots, u_{j+s}^n - f(u_j^n)| \leq C \sum_k |u_{j+k}^n - u_j^n|,$$

d'où

$$\|f_{i+1/2}^n - f(u_{\tau,h})\|_{L^1} \leq h \left(\sum_k \tau V(U^k) \right) \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs, comme $u_{\tau,h}$ converge fortement vers u dans L^1 , on a la convergence forte de $f(u_{\tau,h})$ vers $f(u)$, ce qui clos la preuve du théorème. ■

3 Approche volumes finis des schémas

Les inconvénients de l'approche *différences finies* étudiée plus haut sont multiples. Tout d'abord, leur développement et analyse sont basés sur des développements de Taylor et donc sur la régularité de la solution, on a vu alors que l'ordre de convergence était dégradé là où la solution n'est pas régulière. De plus, elles ne sont pas conservatives dans le cas général d'un maillage non uniforme.

Pour toutes ces raisons, on va aborder maintenant l'approximation numérique de l'équation par l'optique volumes finis. On verra qu'on peut ainsi réinterpréter les schémas différences finies sur maillage régulier comme des schémas volumes finis, ce qui permettra de mieux les comprendre et de les modifier pour les améliorer.

3.1 Schémas avec limiteurs de flux

On a obtenu précédemment des schémas sous forme conservative que l'on peut interpréter aisément comme des schémas volumes finis, les $f_{i+\frac{1}{2}}$ représentant des approximations des flux sur les bords des volumes de contrôle.

On a vu que l'on disposait de deux types de schémas linéaire :

- Les schémas du premier ordre (le décentré amont par exemple) qui sont TVD et se comportent donc bien face aux discontinuités, le prix à payer étant une trop forte diffusion numérique.
- Les schémas d'ordre supérieur qui ne sont pas monotones, TVD ou même MP (monotonicity preserving) d'après le théorème de Godunov. Néanmoins, il apparaît assez clairement que la perte de monotonie par exemple doit être dans ce cas localisée au voisinage des discontinuités, là où l'analyse de troncature usuelle n'est pas pertinente.

On sait par ailleurs que même les schémas non-linéaires d'ordre élevé ne peuvent être monotones ou encore contractants dans L^1 .

L'idée que nous allons donc mettre en place c'est une technique de schémas adaptatifs : on a envie d'utiliser le schéma DA près des discontinuités et d'utiliser un schéma d'ordre élevé dans les zones où la solution est régulière. Bien entendu, la solution est inconnue et il faut donc utiliser les informations données par la solution approchée à l'instant n pour déterminer ces lieux.

Si on regarde comment sont construits les flux des différents schémas exposés plus haut, on constate qu'ils se mettent tous sous la forme

$$f_{i+1/2}^n = cu_i^n + c \frac{1-\nu}{2} \theta_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (\text{IV.13})$$

où $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$ pour le schéma décentré amont, $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = 1$ pour le schéma de Law-Wendroff et $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{2-\nu}{3} + \frac{1+\nu}{3} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}$ pour le schéma DST3.

Ceci donne donc l'idée de construire un schéma ayant pour flux la formule (IV.13) en prenant pour coefficient $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n$ une fonction ψ_ν du quotient différentiel $\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}$. En effet, près d'un point où la solution est régulière (et tel que $\partial_x u \neq 0$), alors $r_{i+\frac{1}{2}}^n$ est proche de 1 alors que près d'un point où la solution est discontinue, ce quotient peut être très petit ou très grand.

En résumé, on va maintenant étudier les schémas dits **à limiteur de flux** définis par la formule

$$f_{i+1/2}^n = cu_i^n + c \frac{1-\nu}{2} \psi_\nu \left(r_{i+\frac{1}{2}}^n \right) (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (\text{IV.14})$$

où ψ_ν est une fonction *a priori* non linéaire appelée le *limiteur*.

Le résultat suivant est alors immédiat.

Proposition IV.12

Le schéma défini par le flux (IV.14) est d'ordre 2 au voisinage des points non extrémaux de la solution si et seulement si $\psi(1) = 1$ et si ψ est lipschitzienne au voisinage de $r = 1$.
Ce même schéma est d'ordre 3 au voisinage de ces mêmes points si $\psi_\nu(r) = \frac{2-\nu}{3} + \frac{1+\nu}{3}r$ au voisinage de $r = 1$.

Il reste à démontrer que de tels schémas peuvent être TVD. Pour cela on a besoin du théorème suivant dû à Harten.

Théorème IV.13

Supposons donné un schéma écrit sous la forme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{i-1/2}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) + D_{i+1/2}^n (u_{i+1}^n - u_i^n),$$

où les coefficients C et D peuvent éventuellement dépendre de la solution elle-même.
Alors, le schéma est TVD si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$C_{i+1/2} \geq 0, \quad D_{i+1/2} \geq 0, \quad C_{i+1/2} + D_{i+1/2} \leq 1, \quad \forall i. \quad (\text{IV.15})$$

Preuve :

On a

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = \underbrace{(1 - C_{i+1/2}^n - D_{i+1/2}^n)}_{\geq 0} (u_{i+1}^n - u_i^n) + \underbrace{C_{i-1/2}^n}_{\geq 0} (u_i^n - u_{i-1}^n) + \underbrace{D_{i+3/2}^n}_{\geq 0} (u_{i+2}^n - u_{i+1}^n).$$

On peut prendre la valeur absolue et obtenir

$$|u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq (1 - C_{i+1/2}^n - D_{i+1/2}^n) |u_{i+1}^n - u_i^n| + C_{i-1/2}^n |u_i^n - u_{i-1}^n| + D_{i+3/2}^n |u_{i+2}^n - u_{i+1}^n|.$$

On somme maintenant sur i et on obtient le résultat. ■

Théorème IV.14

Soit $\nu \in [0, 1[$. Le schéma défini par un limiteur de flux ψ_ν , i.e. par le flux numérique (IV.14), est TVD si les conditions suivantes sont réunies :

$$0 \leq \psi_\nu(r) \leq \min\left(\frac{2r}{\nu}, \frac{2}{1-\nu}\right),$$

et $\psi_\nu(r) = 0$ si $r < 0$.

Remarquons que si $\nu = 1$ le schéma est exact ... Par ailleurs, si on veut un limiteur ψ indépendant du nombre CFL, il suffit qu'il vérifie la condition

$$0 \leq \psi(r) \leq \min(2r, 2).$$

Preuve :

Le schéma s'écrit

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\tau}{h} (f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n) \\ &= u_i^n - (\nu u_i^n + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \psi_\nu(r_{i+1/2}^n) (u_{i+1}^n - u_i^n)) + (\nu u_{i-1}^n + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \psi_\nu(r_{i-1/2}^n) (u_i^n - u_{i-1}^n)). \end{aligned}$$

Il faut essayer de l'écrire sous la forme du théorème de Harten. Il y a plusieurs façon de faire cela. On écrit par exemple Le schéma s'écrit

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\nu(1-\nu)}{2} \frac{\psi_\nu(r_{i+1/2}^n)}{r_{i+1/2}^n} (u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \psi_\nu(r_{i-1/2}^n) (u_i^n - u_{i-1}^n).$$

On obtient la forme d'Harten en posant

$$C_{i-1/2}^n = \nu + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \left(\frac{\psi_\nu(r_{i+1/2}^n)}{r_{i+1/2}^n} - \psi_\nu(r_{i-1/2}^n) \right),$$

et

$$D_{i+1/2}^n = 0.$$

Le schéma est donc TVD dès lors que $0 \leq C_{i-1/2}^n \leq 1$, ce qui est donc le cas si pour tous r, s on a

$$0 \leq \nu + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \left(\frac{\psi_\nu(r)}{r} - \psi_\nu(s) \right) \leq 1.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \psi_\nu(0) &= 0, \\ \psi_\nu(r) &\leq \frac{2r}{\nu}, \quad \forall r \geq 0. \end{aligned}$$

En réalité, on va choisir ψ_ν positive et nulle pour des valeurs de r négatives. En effet, quand $r_{i+1/2}$ est négatif cela signifie que la solution connaît un maximum au voisinage du point i , auquel cas, on sait que les schémas ne peuvent être d'ordre 2, on choisit donc d'utiliser le flux décentré amont usuel dans ce cadre.

Les conditions ci-dessus impliquent alors les relations

$$\psi_\nu(s) \leq \frac{2}{1-\nu}.$$

■

Remarque IV.15

- Le schéma est du second ordre loin des extrémas si $\psi_\nu(1) = 1$ et si ψ_ν est lipschitzienne au voisinage de $r = 1$.
- Le schéma est aussi du second ordre près des extrémas non dégénérés (i.e. tels que $u'' \neq 0$) si on a $\psi_\nu(-1) + \psi_\nu(3) = 2$, c'est-à-dire si $\psi_\nu(3) = 2$.

Par ailleurs, Sweeby a montré que pour qu'un limiteur se comporte bien (en un sens à préciser, voir plus loin) il faut également qu'il vérifie

$$\psi_\nu(r) \geq \min(r, 1), \quad \forall r \geq 0.$$

3.2 La méthode de Godunov pour les lois de conservation scalaires. Algorithme REA

On considère provisoirement la loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0,$$

dont l'équation d'advection n'est qu'un cas particulier avec $f(u) = cu$.

Une méthode volumes finis a pour but d'approcher sur $]t_n, t_{n+1}[\times C_i$, on obtient alors

$$\int_{C_i} u(t_{n+1}, x) dx - \int_{C_i} u(t_n, x) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t, x_{i+1/2})) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t, x_{i-1/2})) dt = 0.$$

Si on interprète u_i^n non plus comme une approximation de la valeur de u au point x_i et à l'instant t_n mais comme une approximation de la moyenne de u sur la cellule C_i à l'instant t_n , on voit que la forme conservative est naturelle et le flux numérique $f_{i+1/2}$ est une approximation de la moyenne en temps de $f(u)$ au point $x_{i+1/2}$.

Bien entendu comme on ne connaît pas u on doit approcher cette intégrale. Pour un schéma explicite, on choisit de l'approcher par la méthode du rectangle i.e. par τ multiplié par la valeur de $f(u)$ au point $x_{i+1/2}$ et à l'instant t_n .

L'algorithme REA (Reconstruct/Evolve/Average) s'écrit de la façon suivante :

1. A partir de $(u_i^n)_i$ qui sont des approximations de la moyenne de la solution sur C_i , on reconstruit une fonction \tilde{u}^n régulière par morceaux (i.e. sur chaque volume de contrôle) ayant une structure simple. On effectue cette étape de façon conservative, c'est-à-dire de sorte que $\int_{C_i} \tilde{u}^n dx = u_i^n$.
2. On calcule la solution exacte de l'équation sur un pas de temps avec comme donnée initiale la fonction \tilde{u}^n . On obtient une fonction \bar{u}^{n+1} .
3. On projette la fonction \bar{u}^{n+1} sur le maillage en prenant pour $(u_i^{n+1})_i$ les moyennes de cette fonction sur chaque volume de contrôle C_i .

Par nature, cet algorithme est conservatif. Par ailleurs, on vérifie que les deux dernières étapes sont TVD : en effet l'étape de résolution exacte de l'équation est TVD par construction et l'étape de projection est TVD car on a l'inégalité suivante

$$\left| \frac{1}{|C_i|} \int_{C_i} u(x) dx - \frac{1}{|C_{i+1}|} \int_{C_{i+1}} u(x) dx \right| \leq |Du|(C_i \cup C_{i+1}),$$

où Du est la mesure dérivée de u . Ceci se montre par densité des fonctions régulières dans $BV(\mathbb{R})$.

3.2.1 Reconstruction constante par mailles

Si on prend pour \tilde{u}^n la fonction constante par maille qui vaut u_i^n sur le volume de contrôle C_i , on obtient le schéma dit **de Godunov**.

Proposition IV.16 (Schéma décentré amont)

Le schéma de Godunov appliqué à l'équation d'advection donne exactement le schéma décentré amont.

Dans le cas d'une loi de conservation non-linéaire la résolution exacte de l'équation n'est pas évidente pour des fonctions qui ne sont pas constantes par morceaux. On peut alors remplacer celle-ci par une résolution approchée du problème de Riemann. De nombreuses méthodes existent alors mais ce n'est pas l'objet de ce cours.

3.2.2 Reconstruction affine par morceaux

Il s'agit maintenant d'effectuer une reconstruction plus précise, pour cela on peut penser à construire \tilde{u} (on oublie la dépendance en n pour ne pas alourdir les notations) de façon affine par maille. On cherche donc \tilde{u} sous la forme

$$\tilde{u}(x) = u_i^n + \sigma_i^n(x - x_i),$$

où σ_i est une approximation de la pente, que l'on déterminera plus loin.

Calculons alors la solution à l'instant t_{n+1} :

$$\begin{aligned} hu_i^{n+1} &= \int_{C_i} \tilde{u}^n(x - \tau c) dx = \int_{x_{i-1/2} - c\tau}^{x_{i-1/2}} \tilde{u}^n(y) dy + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2} - c\tau} \tilde{u}^n(y) dy \\ &= \int_{x_{i-1} + h/2 - \tau c}^{x_{i-1} + h/2} (u_{i-1}^n + \sigma_{i-1}^n(y - x_{i-1})) dy + \int_{x_i - h/2}^{x_i + h/2 - c\tau} (u_i^n + \sigma_i^n(y - x_i)) dy \\ &= \int_{h/2 - c\tau}^{h/2} (u_{i-1}^n + \sigma_{i-1}^n y) dy + \int_{-h/2}^{h/2 - c\tau} (u_i^n + \sigma_i^n y) dy \\ &= c\tau u_{i-1}^n + \frac{\sigma_{i-1}^n}{2} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2} - c\tau\right)^2 \right] + hu_i^n - c\tau u_i^n + \frac{\sigma_i^n}{2} \left[\left(\frac{h}{2} - c\tau\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] \\ &= hu_i^n - c\tau(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{c\tau}{2}(\sigma_i^n - \sigma_{i-1}^n)(h - c\tau). \end{aligned}$$

Le schéma s'écrit donc en toute généralité

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \gamma(u_i^n - u_{i-1}^n) - \gamma(1 - \gamma)h(\sigma_i^n - \sigma_{i-1}^n),$$

où encore sous la forme volumes finis avec les flux définis par

$$f_{i+1/2}^n = cu_i^n + \frac{c}{2}(h - c\tau)\sigma_i^n = c \left(u_i^n + \frac{1}{2}(h - c\tau)\sigma_i^n \right).$$

- Choix des pentes :
- Si on prend une définition centrée de la pente

$$\sigma_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h},$$

on obtient le schéma dit de Fromm.

- Si on prend une définition décentrée amont

$$\sigma_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h},$$

on obtient le schéma Beam-Warming.

- Si on prend une définition décentrée aval

$$\sigma_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h},$$

on obtient le schéma de Lax-Wendroff.

On voit, en faisant des dessins, que l'étape de reconstruction ne sera pas TVD si les pentes sont trop importantes.

Théorème IV.17

L'étape de reconstruction est TVD si on prend comme pente, l'un des choix suivants :

- *Le limiteur minmod :*

$$\sigma_i^n = \text{minmod} \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}, \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right),$$

- *Le limiteur superbee*

$$\sigma_i^n = \text{maxmod}(\sigma_1, \sigma_2),$$

$$\sigma_1 = \text{minmod} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, 2 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right), \quad \sigma_2 = \text{minmod} \left(2 \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right).$$

- *Le limiteur MC (i.e. monotonized central-difference limiter) défini par*

$$\sigma_i^n = \text{minmod} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}, 2 \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, 2 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right).$$

Rappel : la fonction minmod est définie par

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } ab > 0 \text{ et } |a| < |b| \\ b & \text{si } ab > 0 \text{ et } |b| < |a| \\ 0 & \text{si } ab < 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas, la pente peut s'écrire à l'aide d'un limiteur sous la forme

$$\sigma_i^n = \psi_\nu(r_{i+1/2}^n) \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, \quad (\text{IV.16})$$

où $r_{i+1/2}^n$ est le quotient entre les pentes $(u_i^n - u_{i-1}^n)$ et $(u_{i+1}^n - u_i^n)$.

On peut alors démontrer la propriété suivante

Proposition IV.18

Pour que l'étape de reconstruction préserve la convexité, le limiteur doit vérifier

$$\psi_\nu(r) \geq \min(1, r), \quad \forall r \geq 0.$$

Ceci explique pourquoi on choisit souvent des limiteurs vérifiant la propriété donnée dans cette proposition.

RÉFÉRENCES

- [AC06] L. Ambrosio and G. Crippa. Existence, uniqueness, stability and differentiability properties of the flow associated to weakly differentiable vector fields. 2006. <http://cgvmt.sns.it/cgi/get.cgi/papers/ambcriman06/>.
- [ACM05] L. Ambrosio, G. Crippa, and S. Maniglia. Traces and fine properties of a BD class of vector fields and applications. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 14(4) :527–561, 2005.
- [Amb04] L. Ambrosio. Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields. *Invent. Math.*, 158(2) :227–260, 2004.
- [Amb05] L. Ambrosio. Transport equation and cauchy problem for non-smooth vector fields. *Lecture notes*, 2005. <http://cgvmt.sns.it/cgi/get.cgi/papers/amb05/>.
- [Bar70] C. Bardos. Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d’approximation ; application à l’équation de transport. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 :185–233, 1970.
- [BF06] F. Boyer and P. Fabrie. *Éléments d’analyse pour l’étude de quelques modèles d’écoulements de fluides visqueux incompressibles*. Mathématiques & Applications (Berlin) 52. Berlin : Springer. xvi, 400 p., 2006.
- [Boy05] F. Boyer. Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation. *Differential and Integral Equations*, 18(8) :891–934, 2005.
- [Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1983.
- [Ces84] M. Cessenat. Théorèmes de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(16) :831–834, 1984.
- [Ces85] M. Cessenat. Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 300(3) :89–92, 1985.
- [Che04] Jean-Yves Chemin. Propriétés lagrangiennes des solutions du système de Navier-Stokes incompressible. In *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles. 2003–2004*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pages Exp. No. V, 11. École Polytech., Palaiseau, 2004.
- [CL95] J.-Y. Chemin and N. Lerner. Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes. *J. Differential Equations*, 121(2) :314–328, 1995.
- [CL02] F. Colombini and N. Lerner. Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields. *Duke Math. J.*, 111(2) :357–384, 2002.

- [Dep03] N. Depauw. Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 337(4) :249–252, 2003.
- [Des96] B. Desjardins. A few remarks on ordinary differential equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(11-12) :1667–1703, 1996.
- [Des97a] B. Desjardins. Global existence results for the incompressible density-dependent Navier-Stokes equations in the whole space. *Differential Integral Equations*, 10(3) :587–598, 1997.
- [Des97b] B. Desjardins. Linear transport equations with initial values in Sobolev spaces and application to the Navier-Stokes equations. *Differential Integral Equations*, 10(3) :577–586, 1997.
- [DL89] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3) :511–547, 1989.
- [DL06] C. De Lellis. Notes on hyperbolic systems of conservation laws and transport equations. *Lecture notes*, 2006. <https://www.math.uzh.ch/fileadmin/math/preprints/04-06.pdf>.
- [HHL76] A. Harten, J. M. Hyman, and P. D. Lax. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29(3) :297–322, 1976. With an appendix by B. Keyfitz.
- [HV03] W. Hundsdorfer and J. Verwer. *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*, volume 33 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [Ler04] N. Lerner. Transport equations with partially BV velocities. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 3(4) :681–703, 2004.
- [LeV02] Randall J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Mis00] S. Mischler. On the trace problem for solutions of the Vlasov equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(7-8) :1415–1443, 2000.