

# Résumé de chaque chapitre

September 2, 2008

## Chapitre I

Dans ce chapitre, les schémas de subdivision sont linéaires.

Dans une première partie, nous rappelons les notions de convergence, de stabilité, de reproduction des polynômes et d'ordre d'approximation (section I.2). Nous donnons aussi trois exemples classiques de schémas de subdivision (section I.3) ainsi que deux techniques d'étude de convergence et de régularité basées sur l'étude de polynômes trigonométriques ou de valeurs propres de matrices (section I.4).

Dans la section I.5.1, nous complétons avec un résultat de régularité (théorème I.8), un résultat de convergence de A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91] qui consiste à étudier la différence entre deux schémas linéaires dont l'un est convergeant.

Avec ce dernier résultat, on complète les résultats de [DD89] en établissant des résultats de convergence et de régularité pour certains schémas interpolants de Lagrange non-centrés (théorème I.9 et proposition I.21).

Cependant en utilisant les valeurs propres, on montre que tous les schémas de Lagrange ne converge pas (théorème I.10) et on donne des estimations théoriques et numériques sur le nombre de points suffisant à droite pour qu'un schéma de Lagrange construit avec un nombre de point à gauche donné, diverge (section I.5.3b).

Sur la figure I.14, on résume une partie des résultats de convergence et de divergence que l'on a obtenus, à partir des méthodes proposées dans la section I.4. On remarque qu'il reste malgré tout, des schémas pour lesquels on ne peut pas conclure et cela avec aucune des méthodes décrites (par exemple, pour le schéma complètement décentrés de Lagrange utilisant 9 points).

## Chapitre II

Dans ce chapitre, on s'intéresse surtout à la construction et à l'étude de schémas non-linéaires permettant de contrôler les oscillations près des discontinuités, appelées phénomène de Gibbs, dans le but de les appliquer à la

compression d'image.

Dans un premier temps, nous rappelons les notions de schémas stationnaires, uniformes ou locaux et nous donnons aussi un bref aperçu historique des différentes techniques non-linéaires développées pour résoudre les problèmes cités (section II.3).

Dans un deuxième temps, nous décrivons le cadre général des schémas que nous développons (section II.4.1). Pour cette classe de schémas, nous établissons des théorèmes de convergence (théorème II.1), régularité (théorème II.2), une "sorte" de réciproque à la régularité (théorème II.3), stabilité (théorème II.4) et d'ordre d'approximation (théorème II.5).

Nous appliquons ensuite ces résultats à l'étude de schémas non-linéaires. Pour le schéma  $S_{\text{WENO}}$  (section II.4.1), on améliore la régularité théorique obtenue par [CDM03] et on établit l'ordre d'approximation de la fonction limite du schéma.

On se propose ensuite de construire deux autres schémas: le schéma  $S_{\text{POWERP}}$ , généralisant l'idée du schéma  $S_{\text{PPH}}$  [ADLT06] (section II.4.2) et le schéma  $S_{\text{PPHAPPROX}}$ , un schéma approximant stable ayant une régularité plus que  $C^1$  (section II.4.3).

On s'intéresse enfin à la convergence d'un autre schéma existant, le schéma  $S_{\text{SPHERICAL}}$  [AEV03] visant à améliorer le schéma linéaire  $S_{2,2}$  pour la construction de courbe (section II.4.4).

Dans une dernière partie (section II.5), on établit un résultat de convergence et de stabilité pour des schémas non-linéaires de  $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$  définis comme produit tensoriel de schémas de  $l^\infty(\mathbb{Z})$  ou utilisant une construction symétrique (section II.5.4).

On montre que sous les conditions du théorème de convergence ou de stabilité  $1d$ , le schéma défini dans  $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$  converge si une relation liant les constantes de  $l^\infty(\mathbb{Z})$  vérifie une certaine relation (théorème II.13 et théorème II.14, corollaire II.1 et corollaire II.2).

On applique enfin ces résultats aux schémas non-linéaires étudiés (section II.5.6).

### Chapitre III

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des analyses multirésolutions non-linéaires construites à partir de schémas de subdivision non-linéaires de  $l^\infty(\mathbb{Z})$ , dans le but d'éviter les zones de flous dans la reconstruction d'images compressées. On étudie des propriétés de stabilité et on effectue des comparaisons numériques sur des images tests.

Dans la section III.2, on rappelle les différentes composantes de l'analyse multirésolution généralisée. En particulier, pour un schéma non-linéaire

donné, on ne sait pas toujours définir une analyse multirésolution associée, ce qui nous permet pas de définir une analyse multirésolution associée à des schémas non-linéaires approximants.

Dans la section III.3, on développe un résultat de stabilité pour les analyses multirésolutions utilisant la classe de schémas de subdivision définie dans le chapitre II.

On établit ce résultat pour des schémas  $1d$  (théorème III.1) et des schémas  $2d$  (proposition III.3).

On donne deux exemples pour lesquels on est capable de construire et de prouver la stabilité de l'analyse multirésolution.

Un premier exemple concerne l'analyse multirésolution associée au schéma non-linéaire interpolant de régularité  $C^1$  construit par M. Marinov, N. Dyn et D. Levin [MDL05] (section III.4.1). Un deuxième exemple est défini par la construction d'une classe de schémas non-linéaires, convergents, définis en base 3 (section III.4.2).

Enfin, la section III.6 donne une extension du résultat au cas  $2d$  (proposition III.3) et on remarque que, cette étude est plus complexe que pour les schémas de subdivision.

#### Chapitre IV

Ce chapitre est consacré à la construction de nouveaux opérateurs aux différences finies dont l'erreur de consistance reste uniforme sur une grille adaptée. Ces opérateurs sont construits en combinant le schéma de subdivision qui sert à construire la grille adaptée avec un opérateur classique aux différences finies.

Dans une première partie, on explicite la définition de cet nouvel opérateur aux différences finies  $NFD_p$ , qui est construit à partir d'un opérateur initial ( $FD$ ), d'un schéma de subdivision ( $S$ ) et d'un nombre d'itérations ( $p$ ). Partant d'une grille  $X^j$ , l'opérateur  $NFD_p$  consiste à d'appliquer  $FD$  sur une grille fine  $X^{j+p}$ , construite avec le schéma de subdivision, et à récupérer les valeurs aux points de la grille  $X^j$ .

Pour  $S$ , un schéma linéaire, on donne l'expression de l'opérateur  $NFD_p$ . C'est un nouvel opérateur dont les caractéristiques (taille du support, ordre) sont explicités (section IV.3.1). En particulier, on a vu que les performances optimales de l'opérateur  $NFD_p$  dépendaient d'une relation précise entre la régularité et l'ordre d'approximation du schéma de subdivision (proposition IV.3).

Sur une grille adaptée, des expériences numériques nous permettent de dire que les conclusions sont similaires. On obtient de plus, que l'erreur commise entre l'opérateur  $NFD$  sur la grille adaptée et l'opérateur  $FD$  sur

la grille la plus fine dépend uniquement, du seuil utilisé pour construire la grille adaptée (section IV.3.2).

Enfin, une généralisation à des schémas de subdivision non-linéaires est proposée (section IV.4).

## References

- [ADLT06] S. Amat, R. Donat, J. Liandrat, and J. C. Trillo. Analysis of a new non-linear subdivision scheme. applications in image processing. *Foundations of Computational Mathematics*, 6(2):193–226, 2006.
- [AEV03] N. Aspert, T. Ebrahimi, and P. Vanderghyest. Non-linear subdivision using local coordinates. *Computer Aided Geometric Design*, 20:165–187, 2003.
- [CDM91] A. S. Cavaretta, W. Dahmen, and C. A. Micchelli. Stationary subdivision. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 93(453):346–349, 1991.
- [CDM03] A. Cohen, N. Dyn, and B. Matei. Quasi-linear subdivision schemes with applications to eno interpolation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 15:89–116, 2003.
- [DD89] G. Delauriers and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constructive Approximation*, 5:49–68, 1989.
- [MDL05] M. Marinov, N. Dyn, and D. Levin. Geometrically controlled 4-point interpolatory schemes. In A. Le Mehaute P.J. Laurent and L.L. Schumaker eds., editors, *Advances in multiresolution for geometric modelling*, pages 301–315. Springer, 2005.