

Schémas de Subdivision, Analyses Multirésolution Non-linéaires. Applications.

Karine Dadourian

LATP, Ecole Centrale Marseille

Sous la direction de : Jacques Liandrat

INTRODUCTION

- **Problème 1:** palier aux problèmes de "flous" dans la compression d'images



reconstruction d'une image à partir de sa forme compressée avec une méthode linéaire

⇒ définir, utiliser et étudier des méthodes non-linéaires

- **Problème 2:** définir des opérateurs aux différences finies pour les rendre adaptées à des grilles non-uniformes

⇒ utiliser des algorithmes multiéchelles

PLAN DE LA PRÉSENTATION

■ Schémas de subdivision

- Généralités
- Méthodes d'études de schémas linéaires
- Exemples de schémas linéaires

■ Une classe de schémas non-linéaires

- Propriétés
- Exemples d'études
- Extension 2d

■ Analyse Multirésolution non-linéaire associée

- Etude de la stabilité
- Exemples d'applications
- Tests numériques

■ Différences finies/schémas de subdivision

- Construction
- Propriétés
- Extension au non-linéaire

Schémas de subdivision

Schémas de Subdivision: Définition

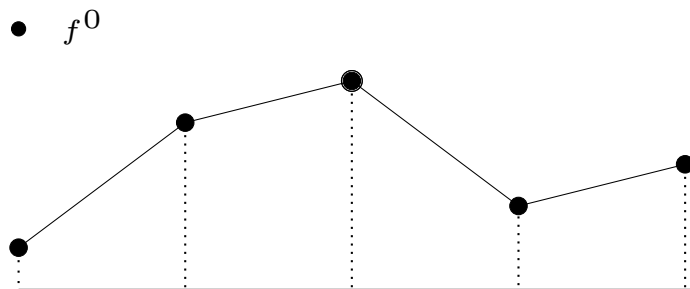
■ Définition

On appelle schéma de subdivision S un opérateur sur $l^\infty(\mathbb{Z})$ défini par

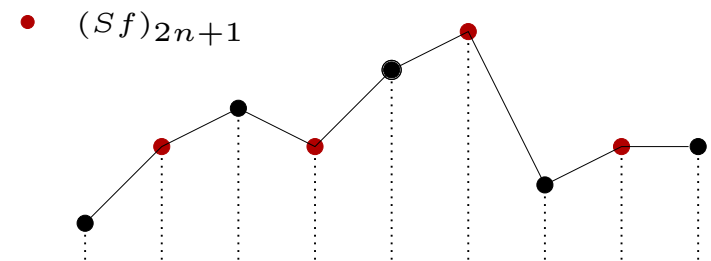
$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{Z} \quad (Sf)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n, n-2m}(f) f_m$$

que l'on peut décomposer

$$(Sf)_{2n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n, 2k}(f) f_{n-k} \quad \text{et} \quad (Sf)_{2n+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n, 2k+1}(f) f_{n-k}$$



Points initiaux



Échelle 1

Dans le cas linéaire, $(Sf)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-2m} f_m$

Schémas de Subdivision: Propriétés

■ Convergence

Pour la convergence du schéma, sont équivalents

1. $\forall f \in l^\infty, \exists S^\infty \mathbf{f}$ continue tel que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_n |(S^j f)_n - S^\infty(f)(2^{-j}n)| = 0$

2. pour $\phi_0 \in C_c^0$ vérifiant $\sum_n \phi_0(x - n) = 1$ et la condition de stabilité L^∞

$$A\|f\| \leq \left\| \sum_n f_n \phi_0(\cdot - n) \right\| \leq B\|f\|$$

la suite de fonction $\mathbf{f}^j(\mathbf{x}) = \sum_n \mathbf{S}^j(\mathbf{f})_n \phi_0(2^j \mathbf{x} - \mathbf{n})$ converge uniformément

3. Dans le cas linéaire, existence d'une fonction d'échelle $\phi \in C_c^0(\mathbb{R})$ (vérifiant la condition de stabilité)

On a $\phi = \lim_{j \rightarrow +\infty} S^j(\delta_{n,0})$ et $S^\infty f(x) = \sum_n f_n \phi(x - n)$

Schémas de Subdivision: Propriétés

■ Régularité

On note $d^k f$ l'opérateur aux différences d'ordre k :

$$d^k f = d(d^{k-1} f) \quad \text{avec} \quad df_n = f_{n+1} - f_n,$$

et S_k le schéma aux différences d'ordre k tel que $d^k(Sf) = S_k(d^k f)$.

Dans le cas linéaire: pour tout f , $S^\infty f \in C^k(\mathbb{R})$ ssi

(i) S_{k+1} existe

(ii) il existe $L \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 2^{-k}$ tel que $\forall f \in l^\infty \quad \|S_{k+1}^L \mathbf{f}\|_\infty \leq \rho^L \|\mathbf{f}\|_\infty$

De plus, $S^\infty f \in C^{\alpha^-}$ avec $\alpha = -\log_2(\rho)$

Schémas de Subdivision: Propriétés

- Régularité

...

- Stabilité de l'opérateur S^∞

Dans le cas linéaire: convergence \Rightarrow stabilité

Schémas de Subdivision: Propriétés

- Régularité

...

- Stabilité de l'opérateur S^∞

...

- Ordre d'approximation de l'opérateur S^∞

On définit $\text{ordre}(S^\infty) = r$ si

$$\text{pour } g \in C^\infty(\mathbb{R}), f^0 = g(nh)_n \quad \|S^\infty(f^0) - g\|_{L^\infty} \leq Ch^r$$

Lien entre ordre de S et S^∞ : $\text{ordre}(S) = r$ et S stable $\Rightarrow \text{ordre}(S^\infty) = r$

Schémas de Subdivision: Propriétés

■ Régularité

...

■ Stabilité de l'opérateur S^∞

...

■ Ordre d'approximation de l'opérateur S^∞

...

■ Reproduction des polynômes

S reproduit **exactement** les polynômes d'ordre k si pour tout $l \leq k$

$$p = (n^l)_n \quad \Rightarrow \quad (Sp)_n = (2^{-1}n)^l.$$

CN à la régularité (linéaire): $S^\infty f \in C^k \Rightarrow S$ reproduit les polynômes de degré k

CS à l'ordre: S reproduit **exactement** les polynômes de degré $r - 1 \Rightarrow$

$$o(S) = r$$

Schémas Linéaires: Méthodes

- **avec des polynômes trigonométriques**
 - *CS de convergence et estimation de la régularité*
- **avec des valeurs propres (traduction matricielle)**
 - *CN de convergence et de régularité*

Schémas Linéaires: Méthodes

- avec des polynômes trigonométriques
 - CS de convergence et estimation de la régularité
- avec des valeurs propres (traduction matricielle)
 - CN de convergence et de régularité
- en comparant avec un schéma convergent

Convergence: S converge si

- (i) $\exists S_0$ convergent avec ϕ_0 vérifiant la condition de stabilité
- (ii) $\exists M > 0, \forall f \in l^\infty \quad \|Sf - S_0f\|_\infty \leq MD(f)$
- (iii) $\exists L \in \mathbb{N}, \exists c < 1, \forall f \in l^\infty, \quad D(S^L f) \leq cD(f)$

avec D un opérateur $l^\infty \mapsto \mathbb{R}^+$

(A.Cavaretta, W.Dahmen et C.A.Micchelli 91)

Régularité: de plus si $S_0^\infty f \in C^{\alpha-}, S^\infty f \in C^{\beta-}$ avec $\beta = \min \left\{ -\frac{\log_2(c)}{L}, \alpha \right\}$

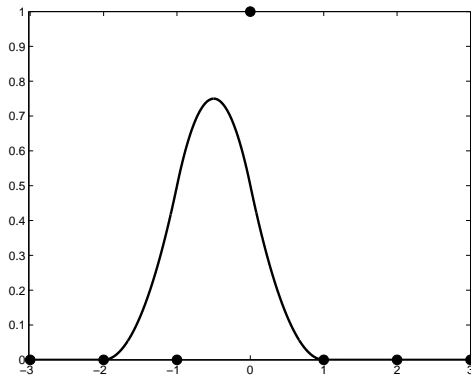
(K.D, J.L 07)

Intérêt: extension au cas non-linéaire, au cas multidimensionnel

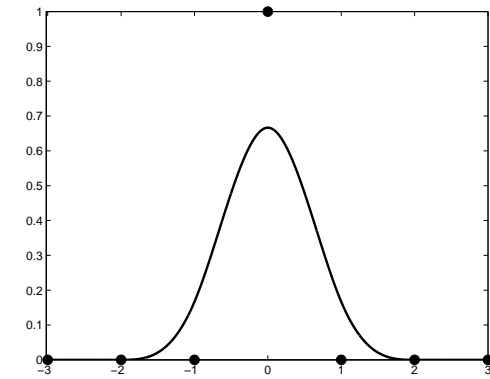
Schémas Linéaires: Exemples *(schémas splines)*

■ Les schémas approximants splines

- la fonction d'échelle ϕ est la fonction spline de degré m
- **régularité optimale** C^{m-} pour la taille du support de a
- pas de reproduction exacte de polynômes (*const et degré 1 seulement*)
- ordre d'approximation égal à 2



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f)$ avec S_{spline_2}



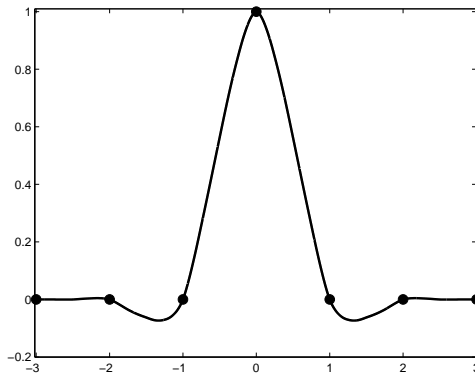
$S^8(f)$ avec S_{spline_3}

Schémas Linéaires: Exemples (schémas de Lagrange)

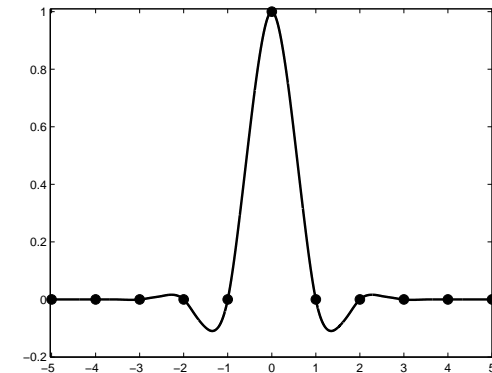
■ Les schémas interpolants de Lagrange $S_{l,r}$

- S définie par la valeur du polynôme de Lagrange $p_{n,l,r}$ construit avec $\{(n+j, f_{n+j})_{j=-l+1 \dots r}\}$
- $(Sf)_{2n} = f_n$ et $(Sf)_{2n+1} = p_{n,l,r}(n + \frac{1}{2})$
- **reproduction exacte de polynômes optimale** pour le nombre de points utilisé
- convergence et régularité difficiles à montrer

avec des schémas centrés



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f)$ avec $S_{2,2}$



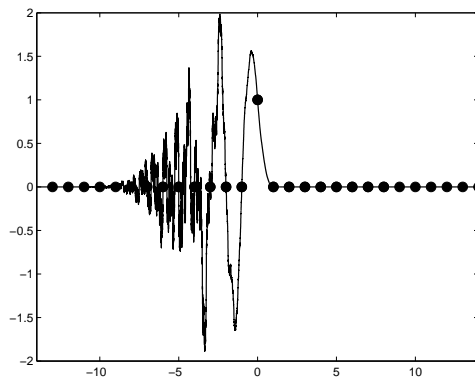
$S^8(f)$ avec $S_{3,3}$

Schémas Linéaires: Exemples (schémas de Lagrange)

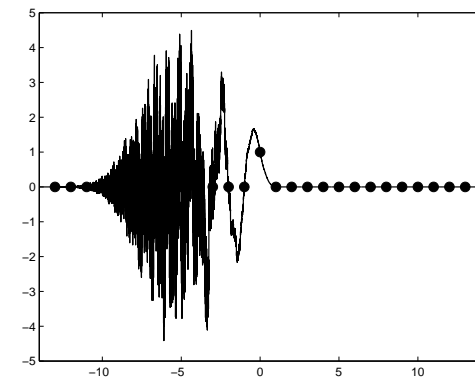
■ Les schémas interpolants de Lagrange $S_{l,r}$

- S définie par la valeur du polynôme de Lagrange $p_{n,l,r}$ construit avec $\{(n+j, f_{n+j})_{j=-l+1 \dots r}\}$
- $(Sf)_{2n} = f_n$ et $(Sf)_{2n+1} = p_{n,l,r}(n + \frac{1}{2})$
- **reproduction exacte de polynômes optimale** pour le nombre de points utilisé
- convergence et régularité difficiles à montrer

avec des schémas décentrés



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f)$ avec $S_{1,8}$



$S^8(f)$ avec $S_{1,9}$

Schémas Linéaires: Exemples *(schémas de Lagrange)*

- **cas centré** $l = n$ (*G. Deslaurier et S. Dubuc 89, I. Daubechies 92*)
pour tout $f, S^\infty f \in C^{0.4l}$

Schémas Linéaires: Exemples (schémas de Lagrange)

■ **cas centré** $l = n$ (*G. Deslaurier et S. Dubuc 89, I. Daubechies 92*)

■ **cas décentré** $l < r$ (*K. D et J. L 07*)

On décompose

$$(\mathbf{S}_{1,r}f)_{2n+1} = (\mathbf{S}_{1,r-1}f)_{2n+1} + L_r \left(\frac{1}{2} \right) d^{l+r-1} f_{n+\left[\frac{l+r}{2}\right]-1}$$

■ convergence (*par comparaisons successives*)

pour $S_{1,r}$: convergence pour $r \leq 7$

pour $S_{2,r}$: convergence pour $r \leq 10 \dots$

■ divergence (*avec le produit des valeurs propres*)

pour $S_{1,r}$: diverge pour $r \geq 9$

pour $S_{2,r}$: diverge pour $r \geq 13 \dots$

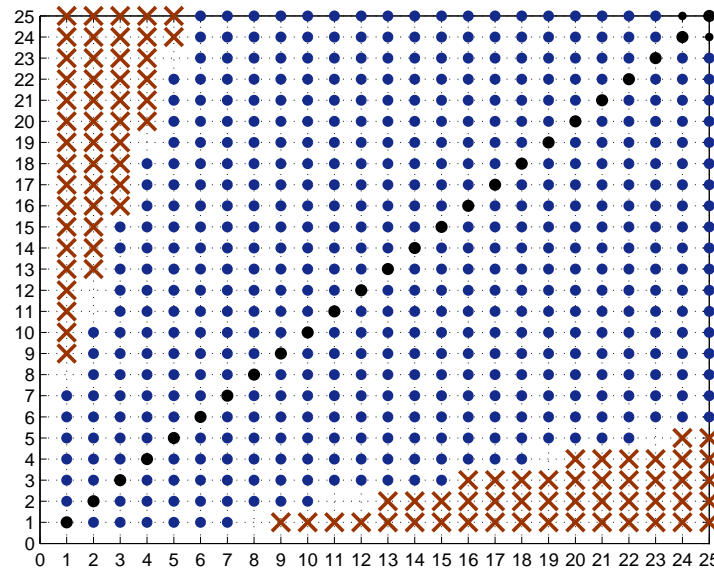
$\forall l, \exists r_l$ tel que $S_{l,r}$ diverge pour $r \geq r_l$ (estimation théorique de r_l)

Schémas Linéaires: Exemples (schémas de Lagrange)

■ **cas centré** $l = n$ (G. Deslaurier et S. Dubuc 89, I. Daubechies 92)

■ **cas décentré** $l < r$ (K. D et J. L 07)

récapitulatif des résultats obtenus



convergence (.) et divergence (x) des schémas de Lagrange à l points (en abscisse) et r points à droite (en ordonnée)

Une classe de schémas non-linéaires

Schémas non-linéaires: Motivation et Cadre

■ Répondre

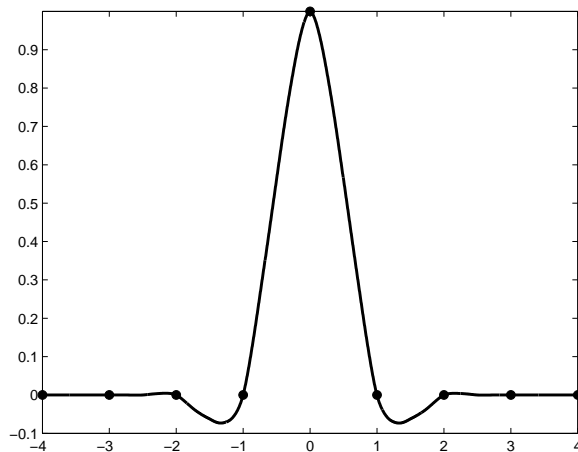
■ aux problèmes d'adaptivité:

grille non-uniforme (*I.Daubechies, I.Gustov et W.Sweldens 99, V.Maxim et M-L.Mazure 04*)

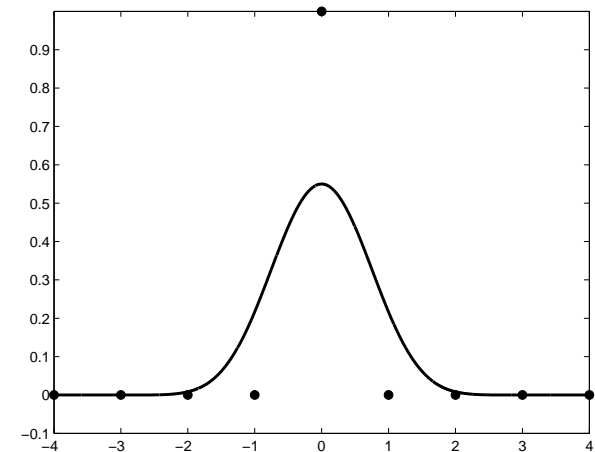
propriétés géométriques (*F.Kuijt et R.Van Damme 98, M.S.Floater et C.A.Michelli 98, M.Marinov, N.Dyn et D.Levin 05*)

reproduction de fonctions (*G.Morin, J.Warren et H.Weimer 01, C.Beccari, G.Casciola et L.Romani 07*)

■ aux problèmes d'oscillations:



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f)$ avec $S_{2,2}$



$S^8(f)$ avec $S_{spline5}$ p.13/49

Schémas non-linéaires: Motivation et Cadre

■ Répondre

■ aux problèmes d'adaptivité:

grille non-uniforme (*I.Daubechies, I.Gustov et W.Sweldens 99, V.Maxim et M-L.Mazure 04*)

propriétés géométriques (*F.Kuijt et R.Van Damme 98, M.S.Floater et C.A.Michelli 98, M.Marinov, N.Dyn et D.Levin 05*)

reproduction de fonctions (*G.Morin, J.Warren et H.Weimer 01, C.Beccari, G.Casciola et L.Romani 07*)

■ aux problèmes d'oscillations:

■ Une méthode générale: comparer S_{NL} avec un schéma linéaire

(*N.Dyn et D.Levin 95, M.S.Floater et C.A.Michelli 98, P.Oswald 03, P.Grohs et J.Wallner 08*)

Etude de schémas **non-linéaires**

■ Notre cadre

On étudie pour $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$\mathbf{S}_{NL}(\mathbf{f}) = \mathbf{S}(\mathbf{f}) + \mathbf{F}(\delta\mathbf{f}) \quad \text{avec}$$

S un schéma linéaire **convergeant**, de régularité $C^{\alpha-}$

F un opérateur **non-linéaire**,

δ un opérateur linéaire

■ Convergence et Régularité (théorème)

S_{NL} converge si

- (i) $\exists M > 0, \forall f \in l^\infty \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{f})\|_\infty \leq \mathbf{M}\|\mathbf{f}\|_\infty$
- (ii) $\exists L \in \mathbb{N}, \exists c < 1, \forall f \in l^\infty, \quad \|\delta(\mathbf{S}_{NL}^L \mathbf{f})\|_\infty \leq \mathbf{c}\|\delta\mathbf{f}\|_\infty$

De plus,

$$S_{NL}^\infty f \in C^{\beta-} \quad \text{avec} \quad \beta = \min \left\{ -\frac{\log_2(c)}{L}, \alpha \right\}$$

Etude de schémas **non-linéaires**

■ Notre cadre

On étudie pour $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$\mathbf{S}_{NL}(\mathbf{f}) = \mathbf{S}(\mathbf{f}) + \mathbf{F}(\delta\mathbf{f}) \quad \text{avec}$$

S un schéma linéaire **convergeant**, de régularité $C^{\alpha-}$

F un opérateur **non-linéaire**,

δ un opérateur linéaire

■ Convergence et Régularité (théorème)

S_{NL} converge si

$$(i) \quad \exists M > 0, \forall f \in l^\infty \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{f})\|_\infty \leq \mathbf{M}\|\mathbf{f}\|_\infty$$

$$(ii) \quad \exists L \in \mathbb{N}, \exists c < 1, \forall f \in l^\infty, \quad \|\delta(\mathbf{S}_{NL}^L \mathbf{f})\|_\infty \leq \mathbf{c}\|\delta\mathbf{f}\|_\infty$$

De plus,

$$S_{NL}^\infty f \in C^{\beta-} \quad \text{avec} \quad \beta = \min \left\{ -\frac{\log_2(c)}{L}, \alpha \right\}$$

Réciproquement, si S_{NL} est **interpolant** avec $S_{NL}^\infty f \in C^{\beta-}$ alors pour $f \in l^\infty$

$$\exists M > 0, \forall j > 0 \quad \|F(\delta(S_{NL}^j f))\|_\infty \leq M2^{-j\beta}$$

Etude de schémas **non-linéaires**

■ Stabilité (théorème)

S_{NL} est **stable** si

- (i) S_{NL} converge ou reproduit exactement les constantes,
- (ii) $\exists M > 0, \forall f, g \in l^\infty \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{f}) - \mathbf{F}(\mathbf{g})\|_\infty \leq M \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_\infty,$
- (iii) $\exists L \in \mathbb{N}, \exists c < 1, \forall f, g \in l^\infty, \quad \|\delta(\mathbf{S}_{NL}^L \mathbf{f}) - \delta(\mathbf{S}_{NL}^L \mathbf{g})\|_\infty \leq c \|\delta \mathbf{f}\|_\infty$

Etude de schémas **non-linéaires**

■ Stabilité (théorème)

S_{NL} est **stable** si

- (i) S_{NL} converge ou reproduit exactement les constantes,
- (ii) $\exists M > 0, \forall f, g \in l^\infty \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{f}) - \mathbf{F}(\mathbf{g})\|_\infty \leq M \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_\infty,$
- (iii) $\exists L \in \mathbb{N}, \exists c < 1, \forall f, g \in l^\infty, \quad \|\delta(\mathbf{S}_{NL}^L \mathbf{f}) - \delta(\mathbf{S}_{NL}^L \mathbf{g})\|_\infty \leq c \|\delta \mathbf{f}\|_\infty$

■ Ordre (théorème)

Si

- (i) S_{NL} converge
- (ii) il existe S un schéma linéaire, convergeant tel que $\|S_{NL} - S\|_\infty = O(h^p)$

alors $\mathbf{o}(\mathbf{S}_{NL}^\infty) = \min(\mathbf{p}, \mathbf{o}(\mathbf{S}))$

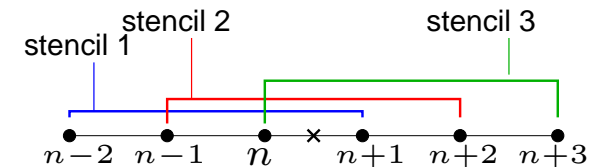
(K.D, S.Amat, J.Liandrat 05-07)

Ex1 schéma NL: le schéma WENO à 6 points

■ Construction (schéma interpolant)

S_{WENO} est une combinaison convexe de 3 schémas linéaires

$$S_{\text{WENO}} = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3$$



avec

- S_1 le schéma de Lagrange complètement décentré $S_{3,1}$
- S_2 le schéma de Lagrange centré $S_{2,2}$
- S_3 le schéma de Lagrange complètement décentré $S_{1,3}$
- α_i poids dépendant de la "régularité" de f
- a_i "mesure" la régularité avec $d^2 f$

$$\alpha_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + a_3} \quad \text{avec} \quad a_i = \frac{\text{const}_i}{(\epsilon + b_i)^2} \quad \text{et} \quad b_i = b_i(d^2 f)$$

(T.Chan, X-D.Liu et S.Osher 94, G.Jiang et C-W.Shu 96 pour EDP, A.Cohen, N.Dyn et B.Matei 03 résultats pour la CAO)

Ex1 schéma NL: le schéma WENO à 6 points

■ Convergence et régularité

on peut écrire

$$(S_{\text{WENO}} f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + F_{\text{WENO}}(d^2 f)_{2n+1}$$

avec

- le schéma de Lagrange $(S_{1,1} f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2}$ converge
- $\forall f, \quad \|F_{\text{WENO}}(f)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \|f\|_{\infty}$
- $|d^2(S_{\text{WENO}} f)_{2n}| \leq \|d^2 f\|_{\infty} \quad \text{et} \quad |d^2(S_{\text{WENO}} f)_{2n+1}| \leq \frac{1}{2} \|d^2 f\|_{\infty}$

on itère pour avoir

$$\|d^2(S_{\text{WENO}}^2 f)\|_{\infty} \leq \frac{13}{16} \|d^2 f\|_{\infty}$$

Avec le théorème de convergence et de régularité **linéaire + perturbation**,

S_{WENO} converge et $S_{\text{WENO}}^{\infty} f \in C^{0.215-}$

(K. D, J. L et S. A 06)

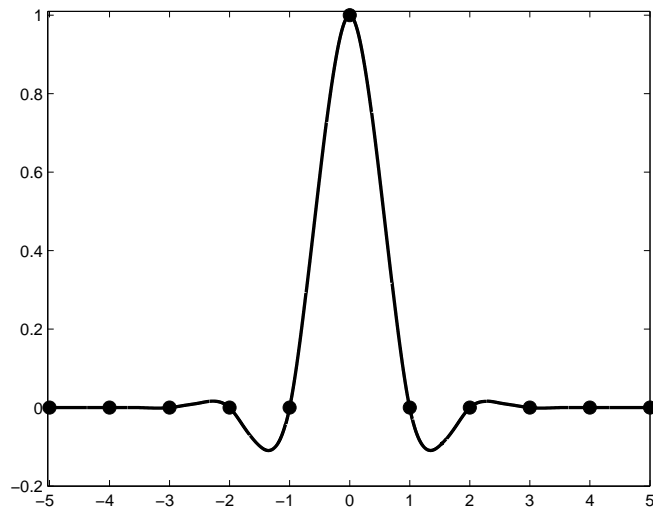
Ex1 schéma NL: le schéma WENO à 6 points

■ Régularité Numérique

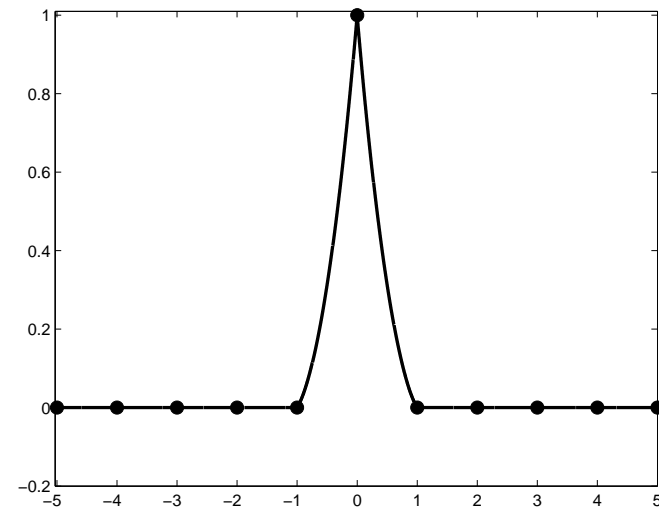
avec $-\log_2 \left(\frac{\|f_{n+1}^{j+1} - f_n^{j+1}\|_\infty}{\|f_{n+1}^j - f_n^j\|_\infty} \right)$, on obtient $S_{\text{WENO}}^\infty f \in C^{1-}$

■ Ordre

avec le théorème sur l'ordre, $o(S_{\text{WENO}}^\infty) = 5$



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f^0)$ avec $S_{3,3}$



$S^8(f^0)$ avec S_{WENO}

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

■ Construction (*schéma interpolant*)

- une première construction

On part de

$$(S_{2,2}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} \boxed{-\frac{1}{8} \frac{d^2 f_n + d^2 f_{n+1}}{2}}$$

vérifiant

$$\left| \frac{x + y}{2} \right| \leq \max(|x|, |y|)$$

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

■ Construction (*schéma interpolant*)

■ une première construction

On part de

$$(S_{2,2}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} \frac{d^2 f_n + d^2 f_{n+1}}{2}$$

$$(S_{PPH}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \boxed{\frac{1}{8} H_2(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})}$$

avec

$$H_2(x, y) = \frac{\text{sign}(x) + \text{sign}(y)}{2} \left| \frac{xy}{x+y} \right|$$

vérifiant

$$|H_2(x, y)| \leq 2 \min(|x|, |y|)$$

(S.Amat, R.Donat, J.Liandrat, J.C.Trillo 03)

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

■ Construction (*schéma interpolant*)

- une première construction

On part de

$$(S_{2,2}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} \frac{d^2 f_n + d^2 f_{n+1}}{2}$$

$$(S_{PPH}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} H_2(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})$$

$$(S_{POWERP}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} H_p(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})$$

(K.D, S.A et J.L 05)

avec

$$H_p(x, y) = \frac{\text{sign}(x) + \text{sign}(y)}{2} \frac{|x + y|}{2} \left(1 - \left| \frac{x - y}{x + y} \right|^p \right)$$

(S.Serna and A.Marquina 04 dans les EDP)

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

■ Construction (*schéma interpolant*)

- une première construction

On part de

$$(S_{2,2}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} \frac{d^2 f_n + d^2 f_{n+1}}{2}$$

$$(S_{PPH}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} H_2(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})$$

$$(S_{POWERP}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} H_P(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})$$

(K.D, S.A et J.L 05)

- une deuxième construction

modifier f_{n-1} ou f_{n+2} selon $\text{sign}(|d^2 f_n| - |d^2 f_{n+1}|)$

Ex2 schéma NL: les schémas POWERP

■ Convergence

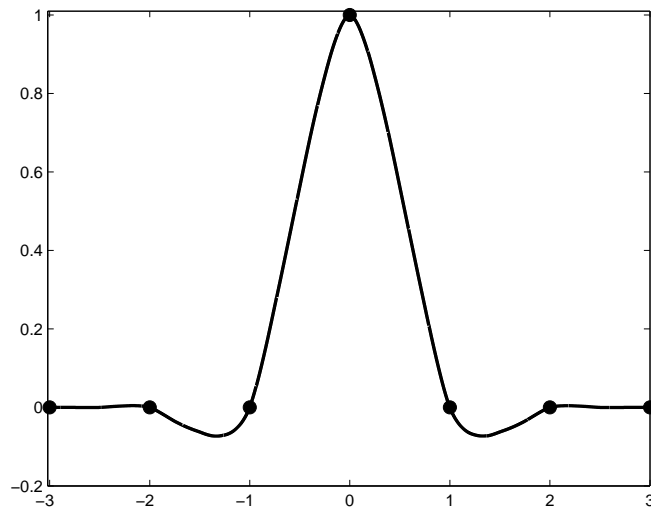
Pour tout p , S_{POWERP} converge et $S_{\text{POWERP}}^\infty f \in C^{1-}$ \Rightarrow estimation optimale

(K. D, S. A et J. L 05)

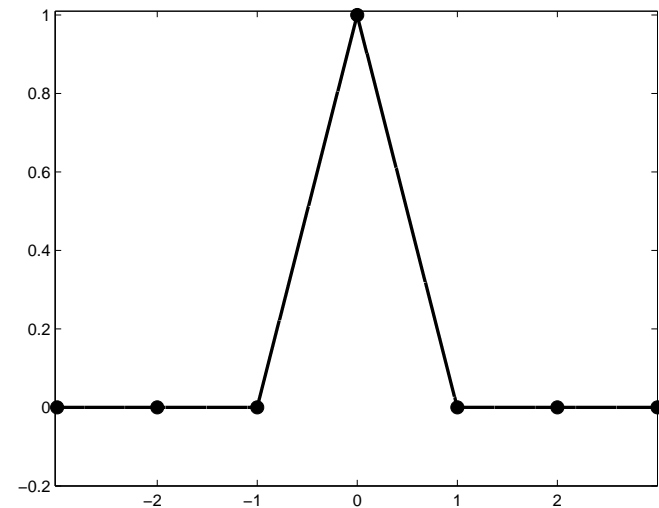
■ Stabilité: pour $p \leq 2$, S_{POWERP} stable

(S.Amat et J.Liandrat 05)

■ Ordre: pour $p \leq 2$, $o(S_{\text{POWERP}}^\infty) = 3$, sinon $o(S_{\text{POWERP}}^\infty) = 2$



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f^0)$ avec $S_{2,2}$



$S^8(f^0)$ avec S_{PPH}

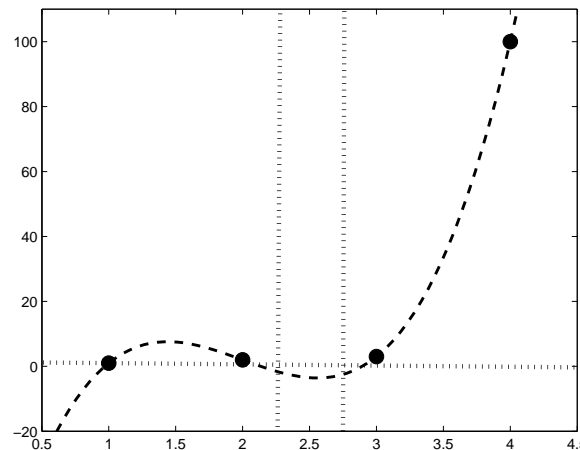
Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

■ Construction

On part du schéma approximant

$$\begin{aligned} (Sf)_{2n} &= p_{n,2,2}\left(n + \frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{128}f_{n-1} + \frac{105}{128}f_n + \frac{35}{128}f_{n+1} - \frac{5}{128}f_{n+2} \\ (Sf)_{2n+1} &= p_{n,2,2}\left(n + \frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{128}f_{n-1} + \frac{35}{128}f_n + \frac{105}{128}f_{n+1} - \frac{7}{128}f_{n+2} \end{aligned}$$

(N.Dyn, M.S.Floater and K.Hormann 05)



Polynôme interpolateur $p_{n,2,2}$ des points \bullet (- -)

Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

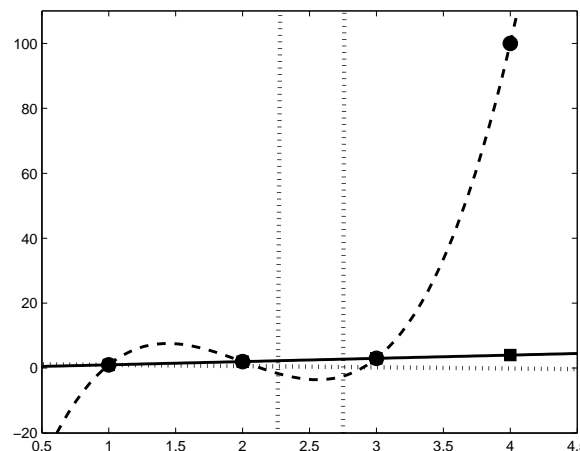
■ Construction

On part du schéma approximant

$$(Sf)_{2n} = p_{n,2,2}\left(n + \frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{128}f_{n-1} + \frac{105}{128}f_n + \frac{35}{128}f_{n+1} - \frac{5}{128}f_{n+2}$$

$$(Sf)_{2n+1} = p_{n,2,2}\left(n + \frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{128}f_{n-1} + \frac{35}{128}f_n + \frac{105}{128}f_{n+1} - \frac{7}{128}f_{n+2}$$

⇒ perturber f_{n-1} ou f_{n+2} selon $\text{sign}(|d^2 f_n| - |d^2 f_{n+1}|)$



Polynôme interpolateur $p_{n,2,2}$ des points \bullet (- -) et aux points modifiées \blacksquare (-)

Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

■ Construction

On part du schéma approximant

$$\begin{aligned}(Sf)_{2n} &= p_{n,2,2}\left(n + \frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{128}f_{n-1} + \frac{105}{128}f_n + \frac{35}{128}f_{n+1} - \frac{5}{128}f_{n+2} \\(Sf)_{2n+1} &= p_{n,2,2}\left(n + \frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{128}f_{n-1} + \frac{35}{128}f_n + \frac{105}{128}f_{n+1} - \frac{7}{128}f_{n+2}\end{aligned}$$

⇒ perturber f_{n-1} ou f_{n+2} selon $\text{sign}(|d^2 f_n| - |d^2 f_{n+1}|)$

On obtient

$$\begin{aligned}(S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n} &= (S_{\text{spline}_2}f)_{2n} + F(d^2 f)_{2n} \\(S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n+1} &= (S_{\text{spline}_2}f)_{2n+1} + F(d^2 f)_{2n+1}\end{aligned}$$

(K.D, J.L et S.A 07)

Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

■ Convergence et Stabilité

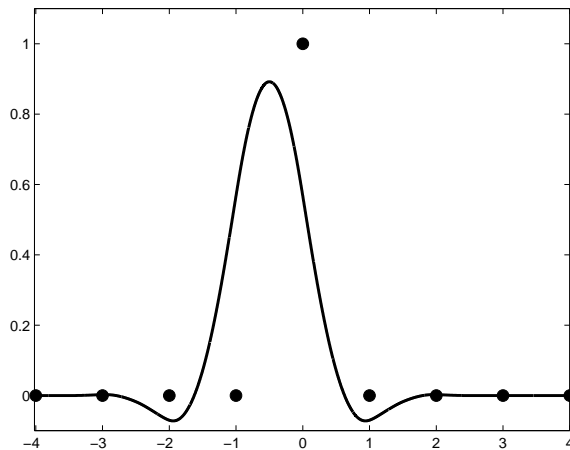
$S_{\text{PPHAPPROX}}$ converge, $S_{\text{PPHAPPROX}}^\infty f \in C^{1.19}$ et est stable

(K.D, J.L et S.A 07)

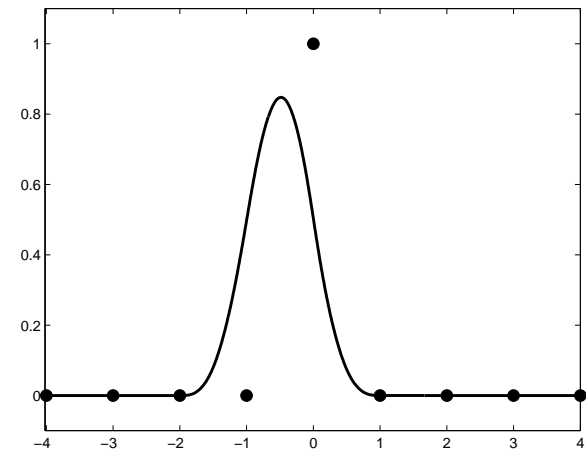
■ Régularité Numérique: $S_{\text{PPHAPPROX}}^\infty f \in C^{2.438-}$

■ Ordre:

pour $g \in C^\infty([0, 1])$ et $f = (g((n - \frac{1}{2})h))_n$, $\|S_{\text{PPHAPPROX}}^\infty f - g\|_\infty = O(h^3)$



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f^0)$ avec S_{DFH05}



$S^8(f^0)$ avec $S_{\text{PPHAPPROX}}$

Ex3 schéma NL: un schéma approximant C^2

■ Convergence et Stabilité

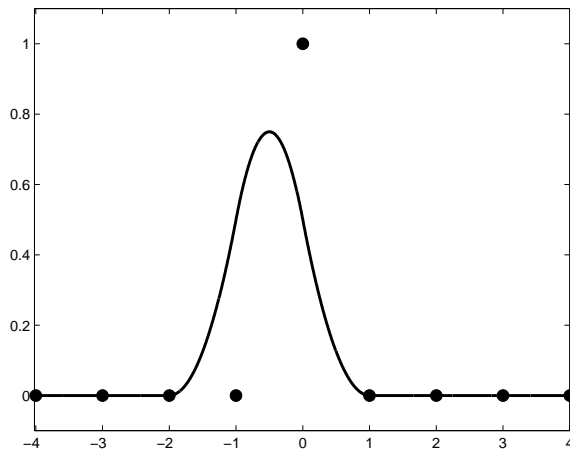
$S_{\text{PPHAPPROX}}$ converge, $S_{\text{PPHAPPROX}}^\infty f \in C^{1.19}$ et est stable

(K.D, J.L et S.A 07)

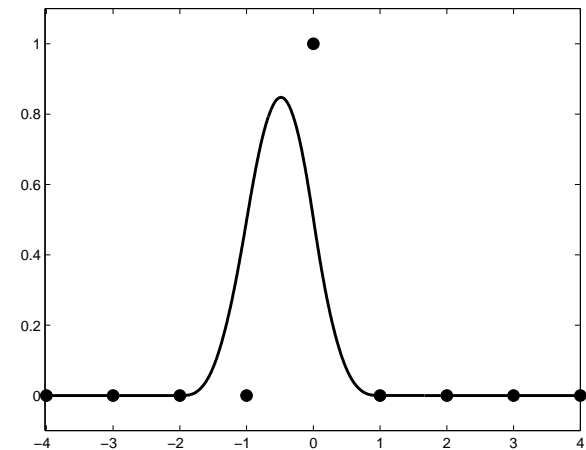
■ Régularité Numérique: $S_{\text{PPHAPPROX}}^\infty f \in C^{2.438-}$

■ Ordre:

pour $g \in C^\infty([0, 1])$ et $f = (g((n - \frac{1}{2})h))_n$, $\|S_{\text{PPHAPPROX}}^\infty f - g\|_\infty = O(h^3)$



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f^0)$ avec S_{spline_2}



$S^8(f^0)$ avec $S_{\text{PPHAPPROX}}$

Schéma 2d: des constructions possibles

Pour S , un schéma 1d,
on étend S à deux variables en utilisant des directions alternées (*ligne puis colonnes*)

■ Construction classique par "produit tensoriel"

$$(S_{2d}f)_{2n,m} = (Sf_{n,\cdot})_m$$

$$(S_{2d}f)_{n,m} = S((S_{2d}f)_{2\cdot,m})_n$$

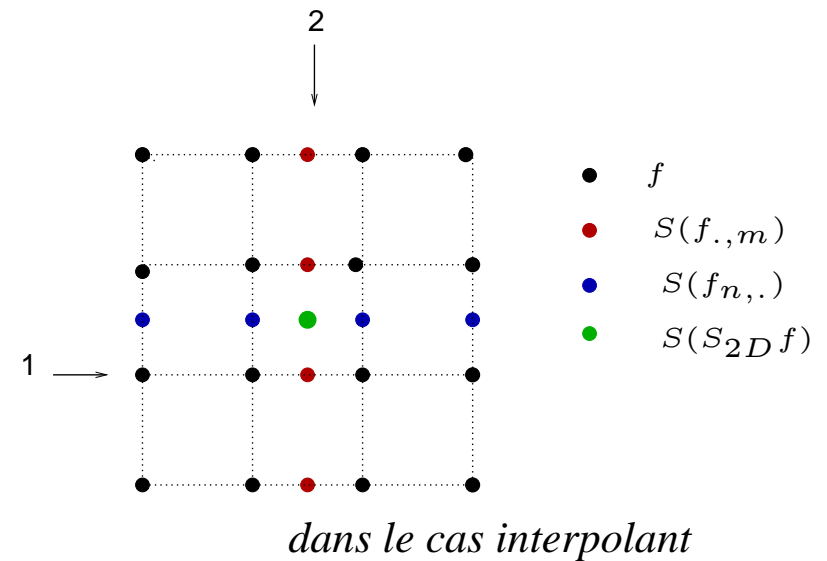


Schéma 2d: des constructions possibles

Pour S , un schéma 1d,
on étend S à deux variables en utilisant des directions alternées (*ligne puis colonnes*)

■ Construction classique par "produit tensoriel"

$$\begin{aligned}(S_{2df})_{2n,m} &= (Sf_{n,.})_m \\ (S_{2df})_{n,m} &= S((\mathbf{S}_{2d\mathbf{f}})_{\mathbf{2},\mathbf{m}})_n\end{aligned}$$

■ Construction symétrique

$$(S_{2df})_{n,m} = \frac{1}{2} \left((S_{2df}^l)_{n,m} + (S_{2df}^c)_{n,m} \right)$$

avec S_{2d}^l le schéma produit tensoriel ligne puis colonne
 S_{2d}^c le schéma produit tensoriel colonne puis ligne

Schéma 2d: des constructions possibles

Pour S , un schéma 1d,
on étend S à deux variables en utilisant des directions alternées (*ligne puis colonnes*)

■ Construction classique par "produit tensoriel"

$$\begin{aligned}(S_{2df})_{2n,m} &= (Sf_{n,\cdot})_m \\ (S_{2df})_{n,m} &= S((\mathbf{S}_{2d\mathbf{f}})_{\mathbf{2},\mathbf{m}})_n\end{aligned}$$

■ Construction symétrique

$$(S_{2df})_{n,m} = \frac{1}{2} \left((S_{2df}^l)_{n,m} + (S_{2df}^c)_{n,m} \right)$$

■ **Question:** Est ce que la convergence de S_{1d} implique la convergence du schéma S_{2d} associé?

Dans le cas linéaire: S_{1d} converge \implies le schéma S_{2d} associé converge

Schémas 2d non-linéaires: résultats généraux

■ **Résultat généraux:** Pour un schéma 2d s'écrivant: $S_{NL2d}f = S_{2d}f + F_{2d}(\Delta_{2d}f)$

les théorèmes **lin+pertur** de convergence, régularité et stabilité restent vrais

■ **Problème**

Pour un schéma 1d non-linéaire $S_{NL}f = Sf + F(\delta f)$ vérifiant les hypothèses du théorème 1d:

$$\begin{aligned} \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|\mathbf{F}(f)\| &\leq \mathbf{M}\|\delta f\| \\ \|\delta(\mathbf{S}_{NL}f)\| &\leq \mathbf{c}\|\delta f\|, \end{aligned}$$

le schéma S_{NL2d} associé converge?

Schémas 2d non-linéaires: résultats généraux

■ **Résultat généraux:** Pour un schéma 2d s'écrivant: $S_{NL2d}f = S_{2d}f + F_{2d}(\Delta_{2d}f)$

les théorèmes **lin+pertur** de convergence, régularité et stabilité restent vrais

■ Problème

Pour un schéma 1d non-linéaire $S_{NL}f = Sf + F(\delta f)$ vérifiant les hypothèses du théorème 1d:

$$\begin{aligned} \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|\mathbf{F}(f)\| &\leq \mathbf{M}\|\delta f\| \\ \|\delta(\mathbf{S}_{NL}f)\| &\leq \mathbf{c}\|\delta f\|, \end{aligned}$$

le schéma S_{NL2d} associé converge?

1. on peut écrire $S_{NL2d}f = S_{2d}f + F_{2d}(\Delta_{2d}f)$ avec

$$\Delta_{2d}f_{n,m} = (\delta(f_{\cdot,m})_n, \delta(f_{n,\cdot})_m) = (\delta_{\text{ligne}}f_{n,m}, \delta_{\text{colonne}}f_{n,m})$$

2. **Contraction 2d à montrer...**

Schémas 2d non-linéaires: étude du problème

On suppose que le schéma linéaire S vérifie $\|S\|_\infty = 1$ et δ un opérateur aux différences.

■ On définit pour une échelle j

$$L_j = \sup_{n,m} |(\delta_{lignee} f_{n,.}^j)_m| \quad \text{et} \quad V_j = \sup_{n,m} |(\delta_{colonne} f_{.,m+1}^j)_n|$$

■ On obtient

$$\begin{pmatrix} L_{j+1} \\ V_{j+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} L_j \\ V_j \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} c + 1/2(M\|\delta\|_1)^2 & M\|\delta\|_1 \\ cM\|\delta\|_1 & c \end{pmatrix}$ pour la construction "produit tensoriel"

ou $A = \begin{pmatrix} c + 1/4(M\|\delta\|_1)^2 & 1/2M\|\delta\|_1(1+c) \\ 1/2M\|\delta\|_1(1+c) & c + 1/4(M\|\delta\|_1)^2 \end{pmatrix}$ pour la construction symétrique

Schémas 2d non-linéaires: résultats

■ Convergence

Si $\rho(A) < 1$ alors le schéma S_{NL2d} converge

avec

$$\rho(A) = c + 1/2M\|\delta\|_1(1 + \sqrt{4c + 1/4(M\|\delta\|_1)^2}) \quad \text{pour la construction "produit tensoriel"}$$

$$\rho(A) = c + 1/2M\|\delta\|_1(1/2M\|\delta\|_1 + c + 1) \quad \text{pour la construction symétrique}$$

■ Régularité

Si $\rho(A) < 1$ alors $S_{NL2d}^\infty \in C^{\beta-}$ avec $\beta = \sup_k \frac{-\log_2(\|\mathbf{A}^k\|_\infty)}{k}$

■ Stabilité

Avec c et M sont les constantes $1d$ du théorème de stabilité, si $\rho(A) < 1$ alors S_{NL2d} est stable.

K.D et J.L 07

Schémas 2d non-linéaires: Exemples

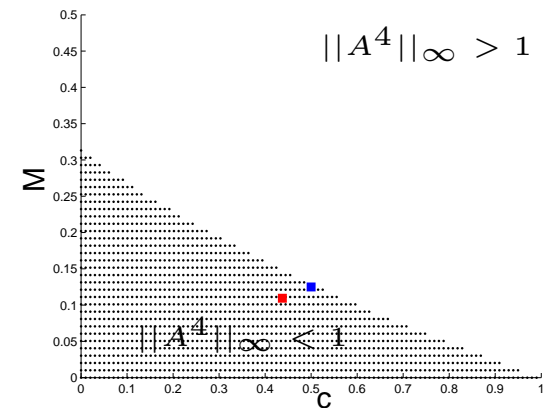
Ici $\delta = d^2$ avec $\|\delta\|_1 = 4$. Pour la construction "produit tensoriel"

■ **Ex1: le schéma POWERP** ($c = \frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{8}$ et $\rho(A) = 0.922$)

$$L = 1 \quad \|A\|_\infty = 1.125$$

$$L = 3 \quad \|A^3\|_\infty = 1.002$$

$$L = 4 \quad \|A^4\|_\infty = 0.925$$



$\Rightarrow S_{\text{POWERP}2d}$ converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta \approx 0.14$

■ **Ex2: le schéma PPHAPPROX** scheme ($c = \frac{7}{16}$, $M = \frac{7}{64}$ et $\rho(A) = 0.7787$)

$$L = 1 \quad \|A\|_\infty = 0.9707$$

$\Rightarrow S_{\text{PPHAPPROX}2d}$ converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta \approx 0.36$

Schémas 2d non-linéaires: Exemples

Ici $\delta = d^2$ avec $\|\delta\|_1 = 4$. Pour la **construction symétrique**

■ **Ex1: le schéma POWERP** ($c = \frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{8}$)

on obtient $\rho(A) = 0.937$

$\Rightarrow S_{\text{POWERP}2d}$ converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta \approx 0.093$

■ **Ex2: le schéma PPHAPPROX** scheme ($c = \frac{7}{16}$, $M = \frac{7}{64}$)

on obtient $\rho(A) = 0.8$

$\Rightarrow S_{\text{PPHAPPROX}2d}$ converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta \approx 0.32$

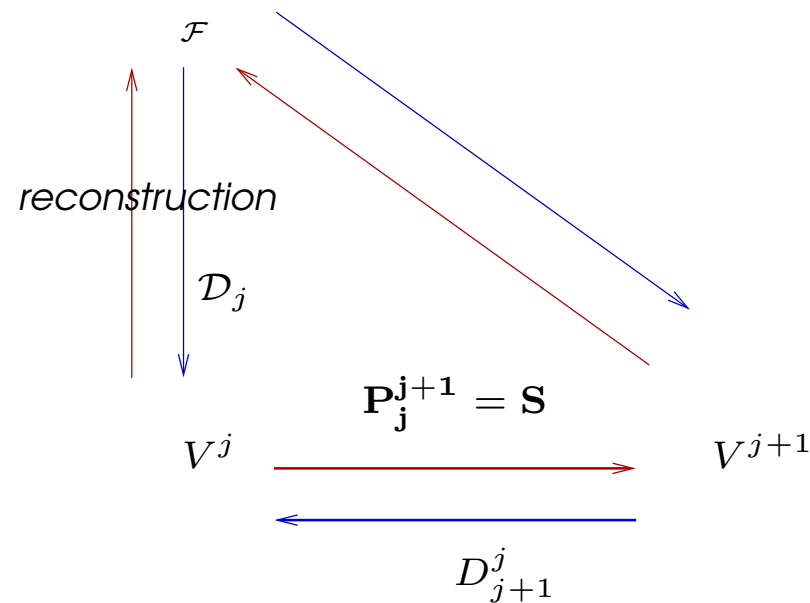
pas de résultat de stabilité 2d (constante trop grande)

Applications aux analyses multirésolutions

AMR généralisée: construction A. Harten 93

■ AMR généralisée

- \mathcal{F} espaces de fonctions
- $(V^j)_j$ espaces discrets (construits par discrétisation \mathcal{D}_j de \mathcal{F})
- Opérateur de **décimation** $D_{j+1}^j : V^{j+1} \longrightarrow V^j$ tel que $V^{j-1} = D_j^{j-1}(V^j)$,
- Opérateur de **prédiction** $P_j^{j+1} : V^j \longrightarrow V^{j+1}$ défini par un schéma S



AMR généralisée: construction A. Harten 93

■ Intérêt

définir une transformée AMR

$$\mathbf{v}^J \Leftrightarrow \{v^{J-1}, d^J\} \Leftrightarrow \{v^{J-2}, d^{J-1}, d^J\} \Leftrightarrow T_{\text{AMR}} v^J = \{\mathbf{v}^0, \mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^J\}$$

avec d^j les détails défini par $\mathbf{d}^{j+1} = \mathbf{v}^{j+1} - (\mathbf{S}\mathbf{v}^j)$

\Rightarrow compresser v^J en seuillant $(d^j)_{j=1\dots J}$

■ Problème

D_{j+1}^j et P_j^{j+1} doivent vérifiés $\mathbf{D}_{j+1}^j \mathbf{P}_j^{j+1} = \text{Id}_{\mathbf{v}^j}$

\Rightarrow on choisit une **discrétisation par valeurs ponctuelles**

$$(\mathcal{D}_j f)_n = f(2^{-j}n)$$

$$(D_{j+1}^j v^{j+1})_n = v_{2n}^{j+1}$$

S est un **schéma interpolant**

AMR non-linéaire: résultats de stabilité

■ Définition de la Stabilité pour une AMR

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty \leq C \left(\|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty + \sum_{l=1}^j \|d^l - \tilde{d}^l\|_\infty \right) \\ \blacksquare \quad & \begin{cases} \|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty & \leq C \|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty \\ \|d^l - \tilde{d}^l\|_\infty & \leq C \|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty \quad \forall l \in 1 \dots j-1 \end{cases} \end{aligned}$$

AMR non-linéaire: résultats de stabilité

- **Définition de la Stabilité pour une AMR**

...

- **Résultat de Stabilité pour une AMR associée à des schémas linéaires**

S converge \implies AMR associée est stable

AMR non-linéaire: résultats de stabilité

■ Définition de la Stabilité pour une AMR

...

■ Résultat de Stabilité pour une AMR associée à des schémas linéaires

...

■ Résultat de Stabilité pour une AMR associée à $\mathbf{S}_{NL}\mathbf{f} = \mathbf{S}\mathbf{f} + \mathbf{F}(\delta\mathbf{f})$

L'AMR associée est **stable** si

- (i) $\exists M > 0$ tel que $\forall d, d' \in l^\infty \quad \|\mathbf{F}(d) - \mathbf{F}(d')\|_\infty \leq M \|d - d'\|_\infty$
- (ii) $\exists c < 1$ tel que $\forall f, g \in l^\infty \quad \|\delta(\mathbf{S}_{NL}f - \mathbf{S}_{NL}g)\|_\infty \leq c \|\delta(f - g)\|_\infty$

→ existence d'hypothèses sur S_{NL}^L ou sur l'AMR associée

→ extension au 2d possible, existence d'un résultat liant les constantes 1d et la stabilité 2d

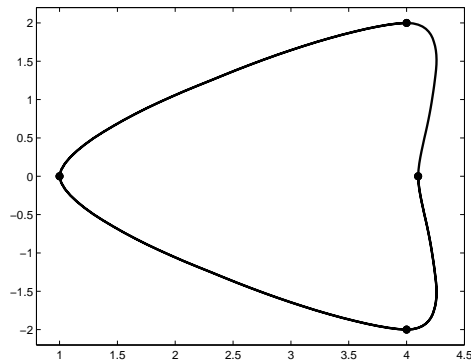
K. D, J. L et S. A 05-07

Ex 1 AMR NL: le schéma GC (géométriquement contrôlé)

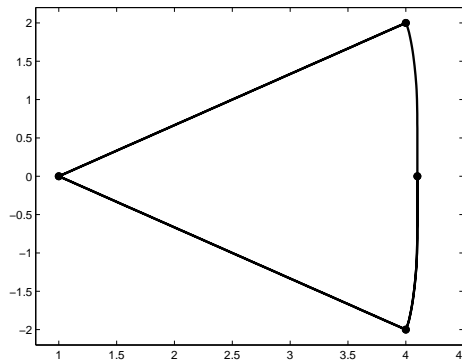
■ Définition (schéma interpolant)

$$(S_{gc}f)_{2n+1} = (f_n + f_{n+1})(w(f)_n + \frac{1}{2}) - w(f)_n(f_{n+1} + f_{n+2})$$

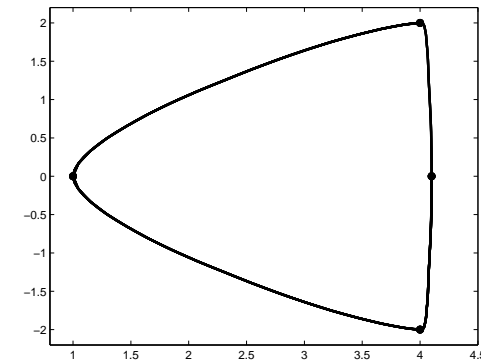
avec $w(f)$ défini par $w(f) = h(df, c, w)$ où $0 < c < \frac{1}{2}$ et $0 < w < \frac{1}{8}$



$S^5(f^0)$ avec $S_{2,2}$



$S^5(f^0)$ avec S_{PPH}



$S^5(f^0)$ avec S_{GC}

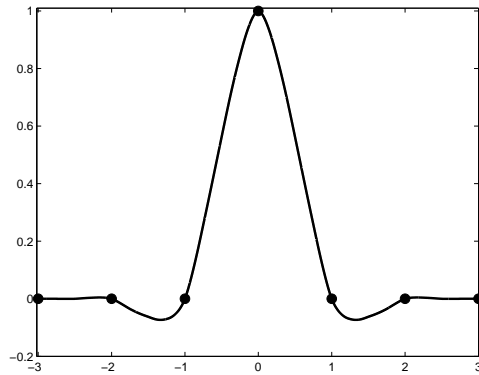
■ Convergence et Régularité

S_{GC} converge et $S_{GC}^\infty f \in C^1$

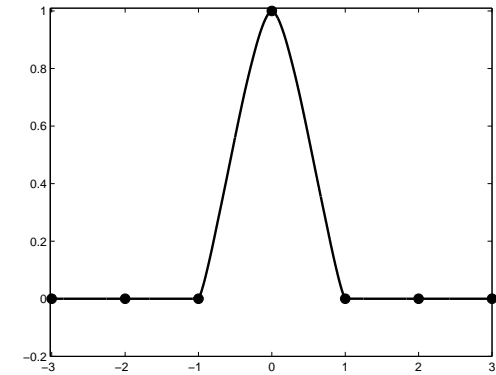
(M. Marinov, N. Dyn et D. Levin 05)

Ex 1 AMR NL: le schéma GC (géométriquement contrôlé)

■ Intérêt pour des AMR



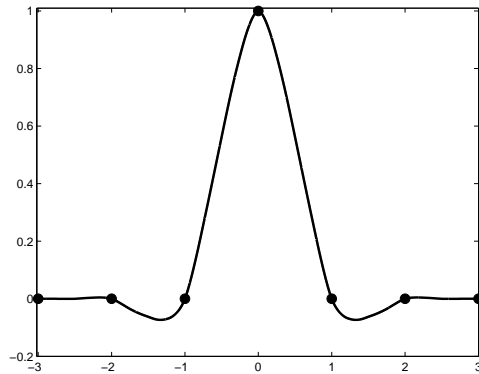
pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f^0)$ avec $S_{2,2}$



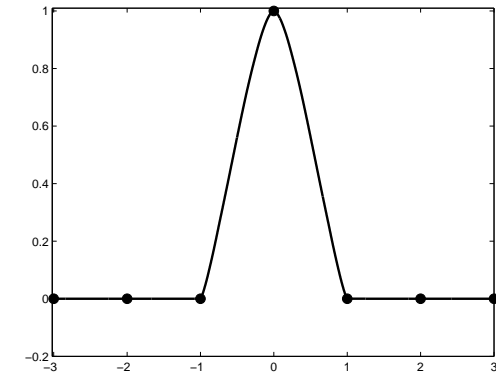
$S^8(f^0)$ avec S_{GC}

Ex 1 AMR NL: le schéma GC (géométriquement contrôlé)

■ Intérêt pour des AMR



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f^0)$ avec $S_{2,2}$



$S^8(f^0)$ avec S_{GC}

■ Stabilité de l'AMR associée

On écrit

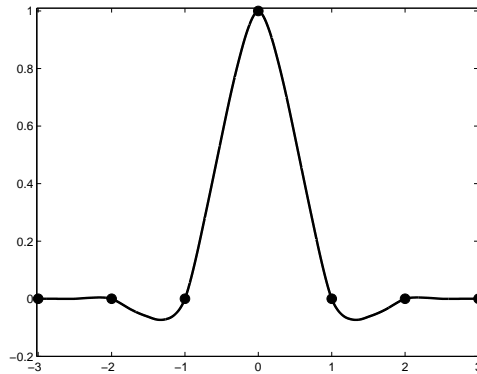
$$(S_{WENO}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + F_{GC}(df)_{2n+1}$$

avec

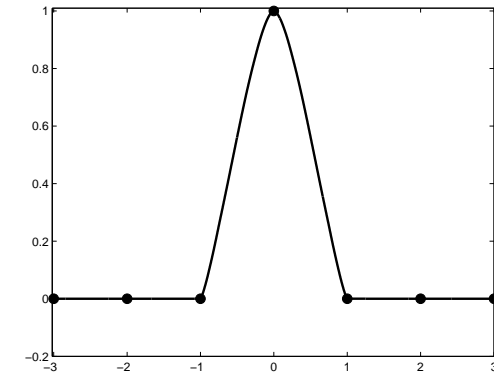
- $\forall f, g, \quad \|F_{GC}(df) - F_{GC}(dg)\|_\infty \leq \max(c, 2w) \|df - dg\|_\infty$
- $\|d(S_{GC}f - S_{GC}g)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2} + \max(c, 2w)\right) \|df - dg\|_\infty$

Ex 1 AMR NL: le schéma GC (géométriquement contrôlé)

■ Intérêt pour des AMR



pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$: $S^8(f^0)$ avec $S_{2,2}$



$S^8(f^0)$ avec S_{GC}

■ Stabilité de l'AMR associée

On écrit

$$(S_{WENO}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + F_{GC}(df)_{2n+1}$$

Avec le théorème de stabilité **linéaire + perturbation**,

L'AMR associée et le schéma S_{GC} sont stables

Ex 2 AMR NL: un schéma NL en base 3

■ Construction (*schéma interpolant*)

On part

$$\begin{aligned}(Sf)_{3n+1} &= a_0 f_{n-1} + a_1 f_n + a_2 f_{n+1} + a_3 f_{n+2} \\ (Sf)_{3n+2} &= a_3 f_{n-1} + a_2 f_n + a_1 f_{n+1} + a_0 f_{n+2}\end{aligned}$$

avec

$$a_0 = -\frac{1}{18} - \frac{1}{6}w, \quad a_1 = \frac{13}{18} + \frac{1}{2}w, \quad a_2 = -\frac{7}{18} - \frac{1}{2}w \quad \text{et} \quad a_3 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{6}w$$

pour

$w = \frac{1}{27}$ schéma de Lagrange en base 3

$0 < w < \frac{1}{2}$ convergence et régularité C^1

$\frac{1}{15} < w < \frac{1}{9}$ régularité C^2

(M.F.Hassan, I.P.Ivrissimitzis, N.A.Dodgson et M.A.Sabin 02)

Ex 2 AMR NL: un schéma NL en base 3

■ Construction (*schéma interpolant*)

On part

$$\begin{aligned}(Sf)_{3n+1} &= a_0 f_{n-1} + a_1 f_n + a_2 f_{n+1} + a_3 f_{n+2} \\ (Sf)_{3n+2} &= a_3 f_{n-1} + a_2 f_n + a_1 f_{n+1} + a_0 f_{n+2}\end{aligned}$$

⇒ perturber f_{n-1} ou f_{n+2} selon $\text{sign}(|d^2 f_n| - |d^2 f_{n+1}|)$

On obtient

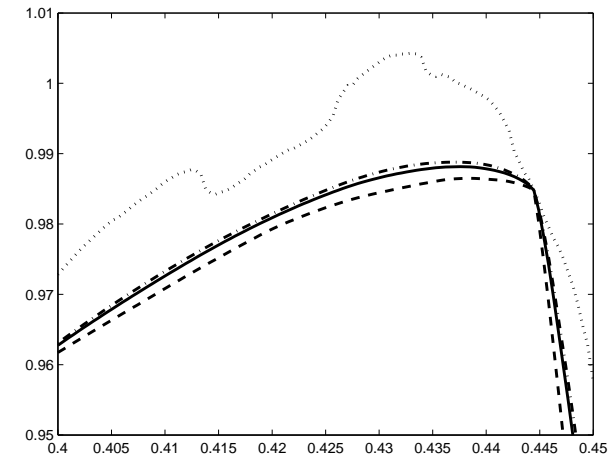
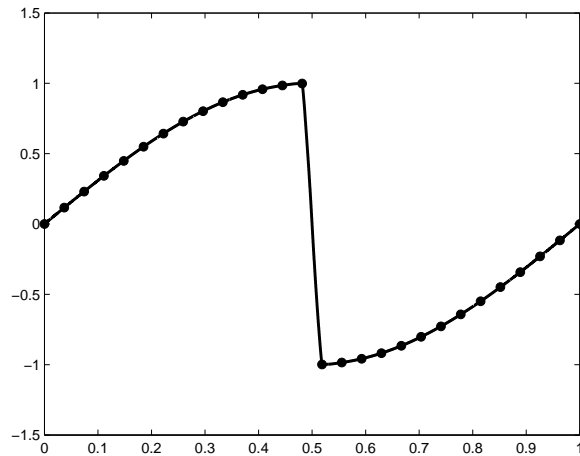
$$\begin{aligned}(S_{\text{PPHTRIA}}f)_{3n+1} &= (S_{[\text{HIDS}]}f)_{3n+1} + F_{\text{PPHTRIA}}(\mathbf{d}^2 \mathbf{f})_{3n+1} \\ (S_{\text{PPHTRIA}}f)_{3n+2} &= (S_{[\text{HIDS}]}f)_{3n+2} + F_{\text{PPHTRIA}}(\mathbf{d}^2 \mathbf{f})_{3n+2}\end{aligned}$$

⇒ appliquer les théorèmes de convergence et de stabilité de l'AMR

Ex 2 AMR NL: un schéma NL en base 3

■ Convergence et Régularité: pour $0 \leq w < \frac{1}{2}$

S_{PPHTRIA} converge et $S_{\text{PPHTRIA}}^\infty f$ est $C^{1+\beta-}$ avec $0 < \beta \leq -\log_3\left(\frac{1-w}{3}\right) - 1$ si $\beta \neq 0$, C^{1-} si $w = 0$.



$S^8(f^0)$ avec S_{PPHTRIA} avec $w = \frac{1}{27}$ — —, $w = \frac{1}{11}$ —, $w = \frac{1}{9}$ - . -, $w = \frac{1}{2}$...

■ Stabilité de l'AMR associée

L'AMR associée et le schéma S_{PPHTRIA} sont stables si $0 \leq w < \frac{2}{15}$

AMR COMPARAISON: test numérique 2d

■ Compression et décompression

On considère $\tilde{f}^J = T_{AMR}^{-1} T_\epsilon T_{AMR} f^J$ avec les grilles dyadiques X^{J^0} ($J^0 = 4$) et X^J ($J = 8$).



points initiaux f^J



avec le schéma linéaire $S_{2,2}$



avec le schéma WENO



le schéma PPH
avec $\epsilon = 10$



le schéma GC

AMR COMPARAISON: test numérique 2d

nnz =nombre de détails non-nuls

$$psnr=10\log_{10}\left(\frac{255^2}{\sum\sum|f_{n,m}^J-\tilde{f}_{n,m}^J|^2}\right)$$



schéma linéaire $S_{2,2}$

$nnz=5710$

$psnr=35.41$



schéma WENO

$nnz=5401$

$psnr=35.48$



schéma PPH

$nnz=5401$

$psnr=36.22$

schéma **GC**

$nnz=5400$

$psnr=36.316$

Applications aux différences finies

Différence finies: cadre

■ Problématique

pour un opérateur FD donné,
construire un opérateur NFD avec une erreur homogène sur une grille adaptée

⇒ utiliser un algorithme multiéchelle pour

- pour définir une grille adaptée

(A.Harten 93, B.Sjogreen 95, W.Dahmen, B.Gottschlich-Muller et S.Muller 98,
G.Chiavassa et R.Donat 01, A.Cohen, S.M.Kaber, S.Muller et M.Postel 02, S.M.Gomez et
B.Gustafasson 02)

- pour construire NFD

(A.Cohen, S.M.Kaber, S.Muller et M.Postel 02, S.M.Gomez et B.Gustafasson 02)

■ Notation

FD opérateur donné d'ordre o_{fd} approchant $f^{(r)}$

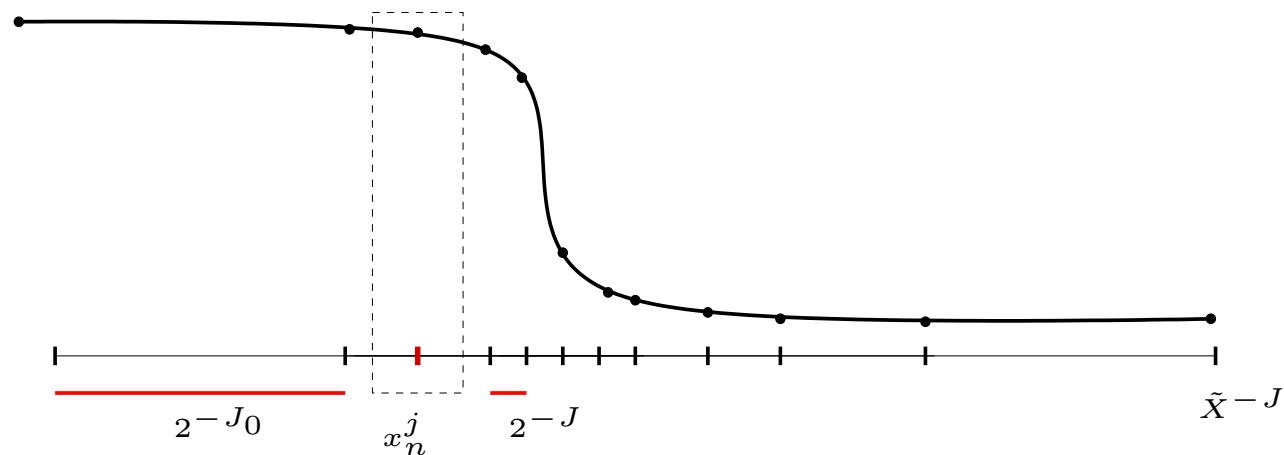
S schéma linéaire interpolant donné d'ordre $\boxed{o_{ss} > r}$

Différence finies: construction

■ Principe sur une grille non-uniforme \tilde{X}^J

pour $x_n^j \in \tilde{X}^J$ d'échelle locale j ($J_0 \leq j \leq J$),

définir un nouvel opérateur NFD_{J-j} d'erreur en $2^{-J_0 j d}$



Différence finies: construction

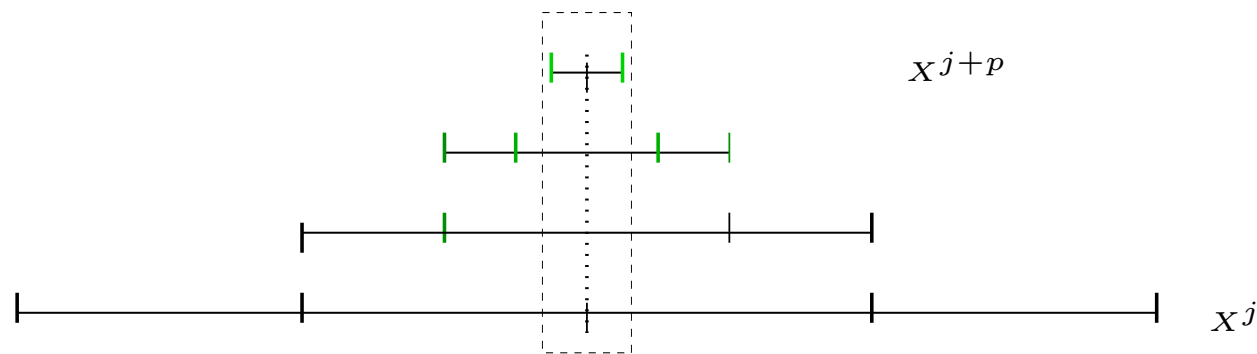
■ Principe sur une grille non-uniforme \tilde{X}^J

pour $x_n^j \in \tilde{X}^j$ d'échelle locale j ($J_0 \leq j \leq J$),

définir un nouvel opérateur NFD_{J-j} d'erreur en $2^{-J_0 f d}$

■ Construction sur une grille uniforme X^j

1. construction des points $S^p f^j$
2. appliquer FD sur X^{j+p}
3. récupérer les valeurs aux points $2^p n$ de X^{j+p} ($x_{2^p n}^{j+p} \in X^j$)



on obtient la définition de NFD_p sur X^j

$$\forall j, p \geq 0, \forall n \quad (NFD_p f^j)_n = (\mathbf{FD}_{j+p}(S^p(f^j)))_{2^p n}$$

Différence finies: propriétés sur une grille uniforme

■ Expression analytique de NFD_p

en utilisant les coefficients de FD ($c \in l^\infty(\mathbb{Z})$) et de S ($a \in l^\infty(\mathbb{Z})$)

$$NFD_p(f^j)_n = 2^{jr} \sum_m c_{n-m}^p f_m^j \quad \text{avec} \quad c_n^p = 2^{pr} \sum_{l=0}^{2^p-1} c_{2^p n - l} \star a_{2^p n + l}^p$$

Différence finies: propriétés sur une grille uniforme

■ Expression analytique de NFD_p

en utilisant les coefficients de FD ($c \in l^\infty(\mathbb{Z})$) et de S ($a \in l^\infty(\mathbb{Z})$)

■ Longueur de NFD_p

$$\boxed{\text{card}(NFD_p) = \text{card}(\text{supp}(S)) - 2}$$

⇒ ne dépend pas du niveau p et de FD

Différence finies: propriétés sur une grille uniforme

■ Expression analytique de NFD_p

en utilisant les coefficients de FD ($c \in l^\infty(\mathbb{Z})$) et de S ($a \in l^\infty(\mathbb{Z})$)

■ Longueur de NFD_p

\Rightarrow ne dépend pas du niveau p et de FD

■ Formule d'erreur de NFD_p

pour $f \in C^\infty([0, 1])$

■ si $\boxed{S^\infty \mathbf{f} \in \mathbf{C}^r}$

$$\exists C > 0, \|NFD_p(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty \leq C \boxed{2^{-j(o_{ss}-r)} + 2^{-(j+p)o_{fd}}}$$

■ sinon,

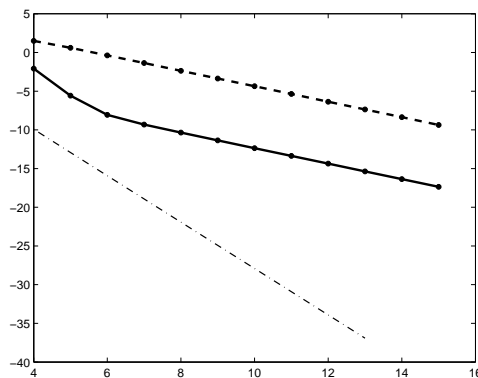
$$\exists C > 0, \|NFD_p(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty \leq C \left(\boxed{2^{pr} 2^{-j(o_{ss}-r)}} + 2^{-(j+p)o_{fd}} \right)$$

Différence finies: observation numérique de l'ordre

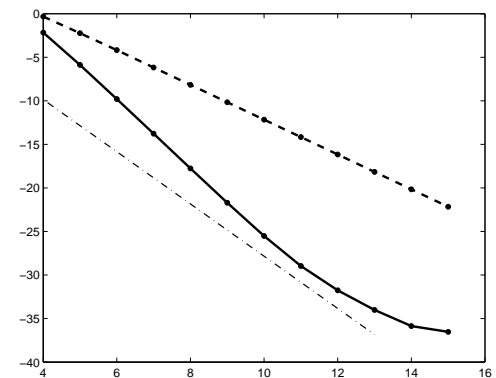
■ **Observation de $2^{-j(o_{ss}-r)} + 2^{-(j+p)o_{fd}}$ pour $f^{(r)}$ si $S^\infty f \in C^r$**
 pour $4 \leq j \leq 15$ et $p = 8$, on observe

$$\begin{aligned}
 & o_{ss} - r \quad \text{si } j(o_{ss} - r) \leq (j + p)o_{fd} \\
 & o_{fd} \quad \text{sinon}
 \end{aligned}$$

comparaison de $\|OP(f^j) - (f^{(1)})^j\|_\infty$ pour $S = S_{2,2}$ ($S^\infty f \in C^{2-}$)
 avec $OP = NFD_8$ (-), $OP = FD$ (--) et la pente $o_{ss} - r$ (-.-)



$o_{fd} = 1$



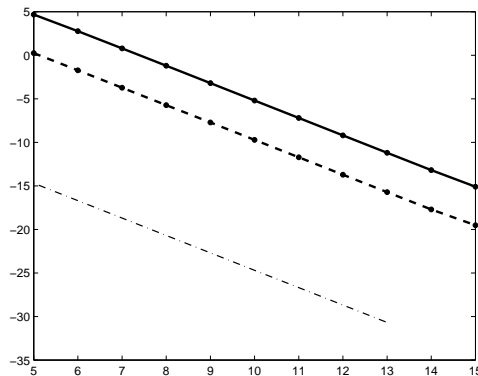
$o_{fd} = 2$

Différence finies: observation numérique de l'ordre

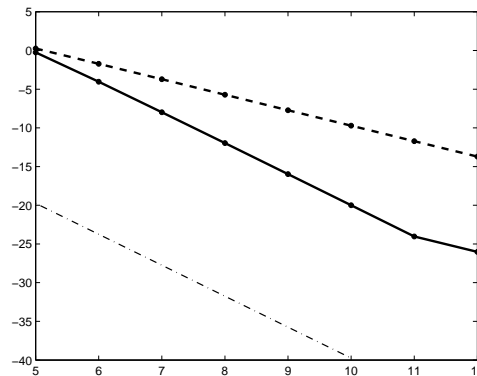
■ **Observation de $2^{-j(o_{ss}-r)} + 2^{-(j+p)o_{fd}}$ pour $f^{(r)}$ si $S^\infty f \in C^r$**
 pour $5 \leq j \leq 12$ et $p = 8$, on observe

$$\begin{aligned}
 & o_{ss} - r \quad \text{si } j(o_{ss} - r) \leq (j + p)o_{fd} \\
 & o_{fd} \quad \text{sinon}
 \end{aligned}$$

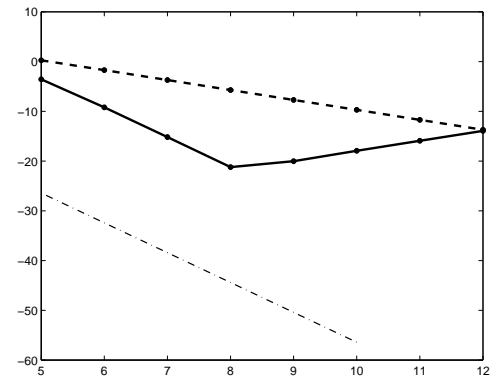
comparaison de $\|OP(f^j) - (f^{(2)})^j\|_\infty$ pour $o_{fd} = 2$
 $OP = NFD_8$ (-), $OP = FD$ (--) et la pente $o_{ss} - r$ (-.-)



$S = S_{2,2}$ ($S^\infty f \in C^{2-}$)



$S = S_{3,3}$ ($S^\infty f \in C^2$)



$S = S_{4,4}$ ($S^\infty f \in C^2$)

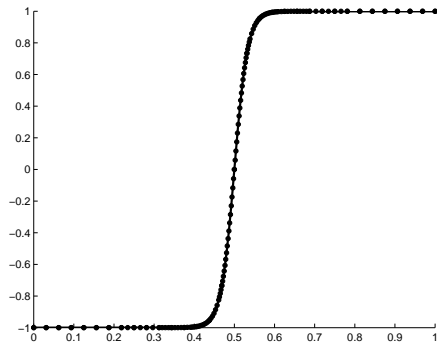
$\implies NFD_p$ efficace si $S^\infty f \in C^r$

Différence finies: expériences numériques

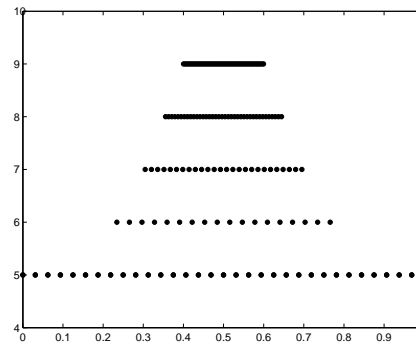
■ Cadre pour des grilles non-uniformes

On considère

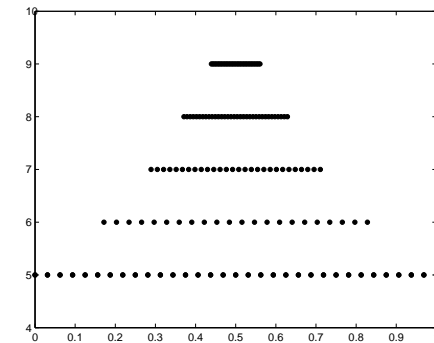
- $f(x) = \tanh(-15 + 30x)$
- des grilles adaptées \tilde{X}^J construites par l'AMR associée à S
- $J_1 = 9, J = 5$



échantillonnage



$S = S_{2,2}$ et $\epsilon = 10^{-5}$



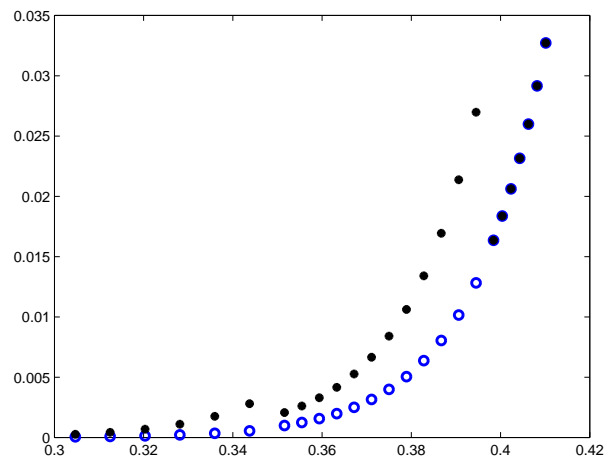
$S = S_{3,3}$ et $\epsilon = 10^{-6}$

- erreur uniforme en $2^{-9o_{fd}}$ si

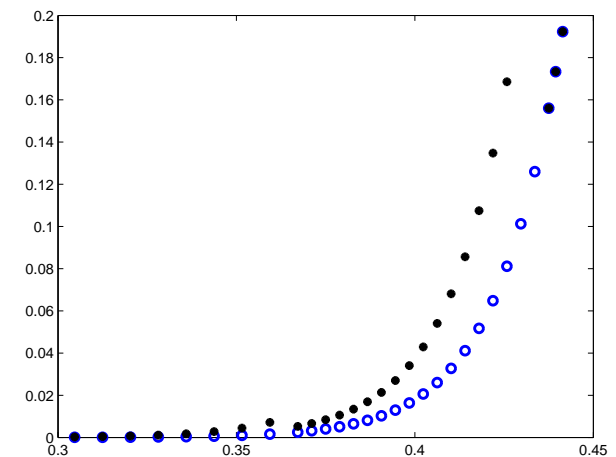
$$o_{ss} \geq \frac{9}{5} o_{fd} + r$$

Différence finies: expériences numériques

- Comparaison des erreurs **des opérateurs adaptés** $NFDA$ (\circ) et FDA ($+$) pour $f^{(1)}$ et $\alpha_{fd} = 1$. Zoom sur $(0.3, 0.45)$.



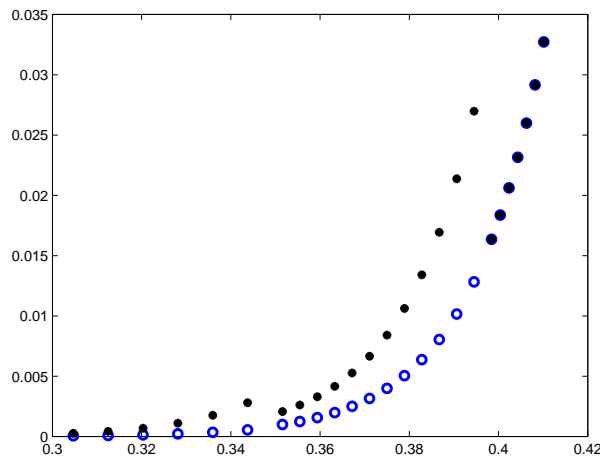
$$S = S_{2,2} \text{ et } \epsilon = 10^{-5}$$



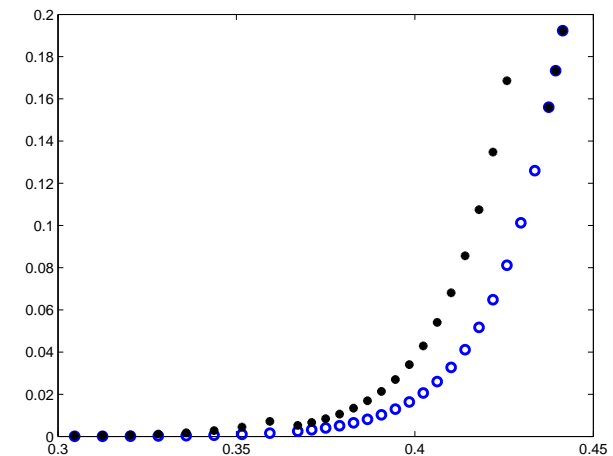
$$S = S_{3,3} \text{ et } \epsilon = 10^{-6}$$

Différence finies: expériences numériques

- Comparaison des erreurs **des opérateurs adaptés** $NFDA$ (\circ) et FDA ($+$) pour $f^{(1)}$ et $\alpha_{fd} = 1$. Zoom sur $(0.3, 0.45)$.



$S = S_{2,2}$ et $\epsilon = 10^{-5}$



$S = S_{3,3}$ et $\epsilon = 10^{-6}$

- Comparaison de l'erreur des opérateurs $NFDA$ et FD_9 pour $f^{(1)}$ et $\alpha_{fd} = 1$

pour $S_{2,2}$: $\|NFDA - FD_9\|_{\infty, \tilde{X}^9} = 4.7 \times 10^{-4}$

pour $S_{3,3}$: $\|NFDA - FD_9\|_{\infty, \tilde{X}^9} = 8.9 \times 10^{-6}$

Différence finies: vers le non-linéaire

■ Problème

impossibilité d'obtenir une expression analytique de NFD avec S non-linéaire

■ Construction sur une grille uniforme X^j

pour $x_n^j \in X^j$,

1. on construit \mathcal{R}^j une reconstruction associée à S_{NL}
(*interpolante et polynômiale par morceaux*)
2. on applique FD sur X^{j+p} aux points $(\mathcal{R}^j(x_n^j + 2^{-(j+p)}k))_{k \in \mathbb{Z}}$

→ *expression analytique possible*

Différence finies: vers le non-linéaire

■ Problème

impossibilité d'obtenir une expression analytique de NFD avec S non-linéaire

■ Construction sur une grille uniforme X^j

pour $x_n^j \in X^j$,

1. on construit \mathcal{R}^j une reconstruction associée à S_{NL}
(interpolante et polynômiale par morceaux)
2. on applique FD sur X^{j+p} aux points $(\mathcal{R}^j(x_n^j + 2^{-(j+p)}k))_{k \in \mathbb{Z}}$

→ *expression analytique possible*

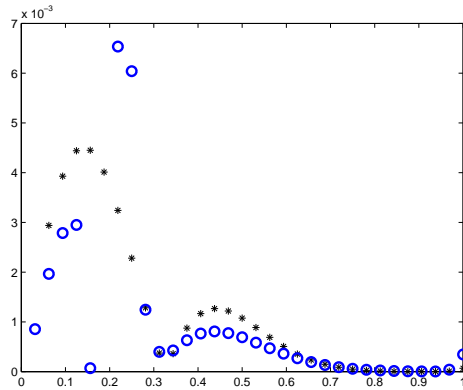
■ Cadre pour S non-linéaire et une grille uniforme

On considère

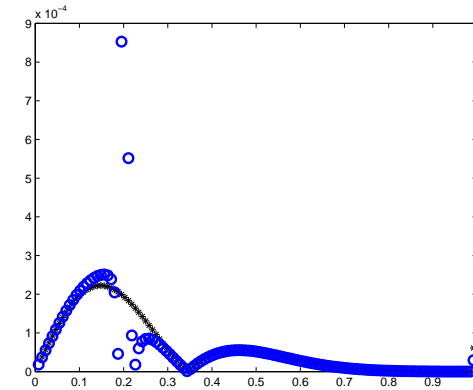
- $f(x) = (0.2\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2(0.2)^2}\right)$
- des grilles uniformes X^j et X^{j+p} avec $p = 2$

Différence finies: tests numériques pour S non-linéaire

- Comparaison des erreurs des opérateurs non-linéaire $NFDNL_2$ (\circ) et linéaire NFD_2 (+) pour $f^{(1)}$, $o_{fd} = 2$ et $S = S_{PPH}$ avec $S_{PPH}^\infty f \notin C^1$

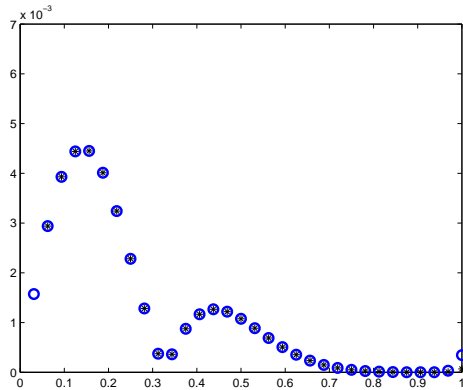


$j = 5$

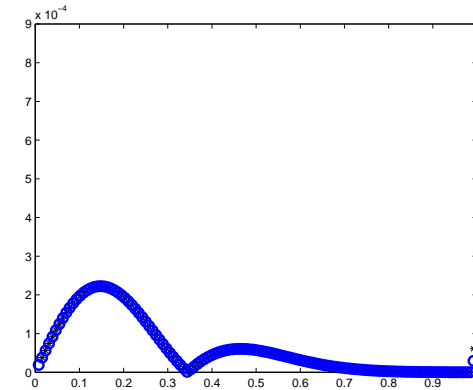


$j = 7$

- Comparaison des erreurs des opérateurs non-linéaire $NFDNL_2$ (\circ) et linéaire NFD_2 (+) pour $f^{(1)}$, $o_{fd} = 2$ et $S = S_{GC}$ avec $S_{GC}^\infty f \in C^1$



$j = 5$



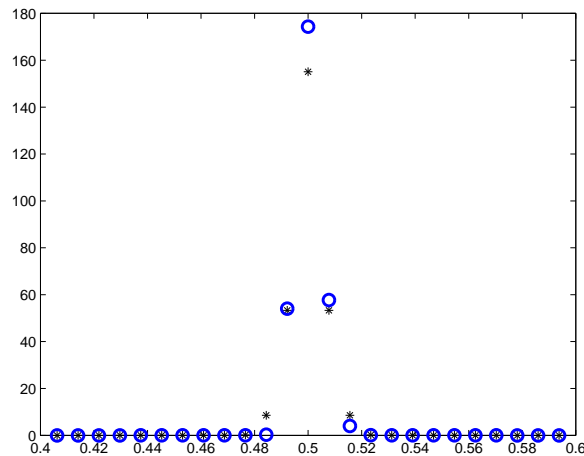
$j = 7$

Différence finies: tests numériques pour S non-linéaire

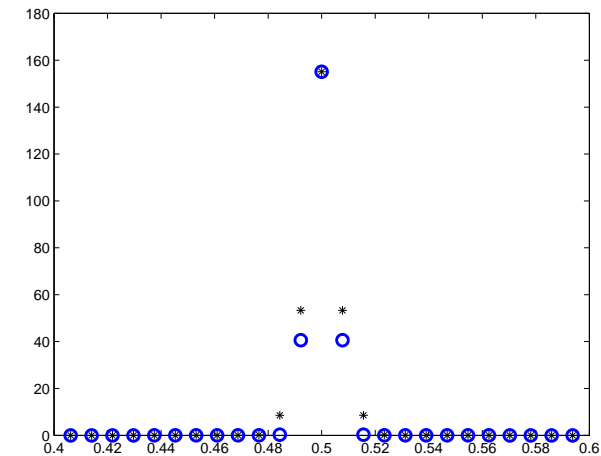
■ Cadre

- des grilles uniformes X^j et X^{j+p} avec $j = 7$ et $p = 2$
- $f(x) = \tanh(-150 + 300x)$
- $S_{NL} = S_{PPH}$ ou $S_{NL} = S_{GC}$

■ Comparaison des erreurs des opérateurs non-linéaires $NFDNL_2$ (\circ) et linéaire NFD_2 ($+$) pour $f^{(1)}$. Zoom sur $[0.4, 0.6]$



avec S_{PPH}



avec S_{GC}

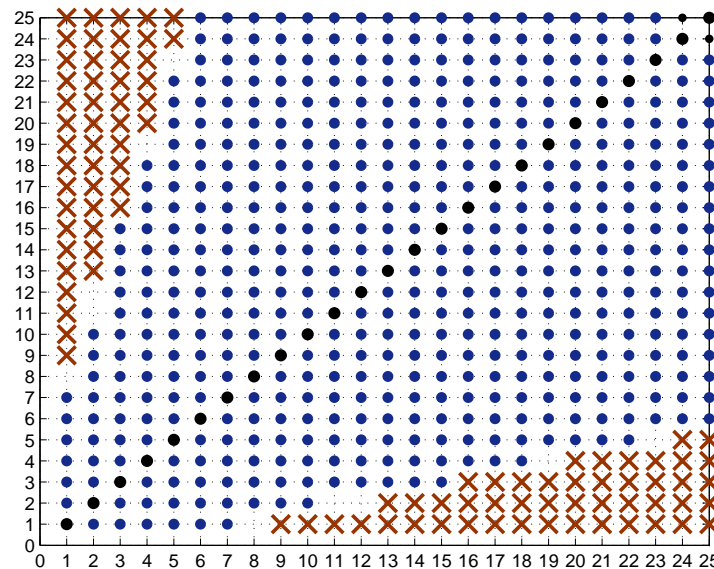
Conclusions

■ Schémas linéaires

résultats de convergence et de divergence des schémas de Lagrange quelconques

→ **divergence des schémas de Lagrange pour un décentrage donné**

récapitulatif des résultats obtenus



convergence (.) et divergence (x) des schémas de Lagrange à l points (en abscisse) et r points à droite (en ordonnée)

Conclusions

■ Schémas linéaires

...

■ Schémas non-linéaires

- théorèmes **complets** d'études de schémas **Linéaire + Perturbation** en 1d et 2d
- application à de nombreux exemples
- construction de schémas non-linéaires C^1 (même $C^{2.8}$) et **stable**
- étude de lien entre convergence $1d$ et $2d$

Conclusions

■ Schémas linéaires

...

■ Schémas non-linéaires

...

■ AMR non-linéaires

- théorème de stabilité d'AMR associée aux schémas **Linéaire+Perturbation** en 1d et 2d
- application à **2 exemples**: un schéma C^1 , un schéma construit en base 3

Conclusions

■ Schémas linéaires

...

■ Schémas non-linéaires

...

■ AMR non-linéaires

...

■ Différences finies et schémas

- à partir d'un opérateur donné, construction et étude théorique d'opérateurs ayant **une erreur homogène** sur une grille adaptée
- proposition d'une méthode d'extension à l'utilisation de schémas non-linéaires

■ Schémas linéaires

problème ouvert pour certains schémas de Lagrange

■ Schémas non-linéaires

stabilité de S_{WENO} , S_{POWERP} ($p \geq 3$), construction d'autres schémas

■ AMR non-linéaires

- extension à d'autres normes du théorèmes établis
- lien entre résultats AMR valeurs ponctuelles et AMR valeur moyenne
- définition d'une décimation pour des schémas approximants non-linéaires ($S_{\text{PPHAPPROX}}$?)

■ Opérateur

approfondissement du cas non-linéaire (*définition, grille adaptée, équation d'évolution, ...*)