Université de Provence.

Préparation Agreg. Option Probas.
Méthode de Monte-Carlo.

1 Principe de la méthode.

Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes de calcul approché d'une intégrale

$$I = \int_E f(x)\, d\mu(x)\,,$$

où E est un espace mesurable, et μ une probabilité sur E. Ces méthodes s'appuient toutes sur une loi des grands nombres. Dans sa version la plus simple, la méthode de Monte-Carlo s'appuie sur la loi des grands nombres pour des sommes de v.a.i.i.d :

Si X_i sont des v.a.i.i.d. de loi μ, et si $E(|f(X_1)|) < \infty$, alors

$$\bar{I}_n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} E(f(X_1)) = I\,.$$

Ainsi, si l'on sait simuler des variables de loi μ, pour avoir une approximation de I, il suffit de tirer un grand nombre de variables de loi μ, et de calculer $\bar{I}_n$.

Un peu d'histoire.
Le premier exemple connu de méthode de Monte Carlo remonte au comte de Buffon (1707-1788) qui calcula π, en jetant un grand nombre de fois par dessus son épaule une aiguille de longueur L sur un sol carrelé avec des carreaux de longueur $d > L$, et en comptant le nombre de fois où l'aiguille intersecte une ligne du pavage. (on montrera que la probabilité pour que l'aiguille rencontre une ligne du pavage est $\frac{2L}{\pi d}$.)
Le nom "méthode de Monte-Carlo" est un nom de code qu'a utilisé Ulam alors qu'il développait ces méthodes avec von Neuman, Fermi, et Metropolis, dans le très secret laboratoire de Los Alamos, où se préparait la première bombe à hydrogène.

2 Vitesse de convergence.

La vitesse de convergence dans la méthode de Monte-Carlo est donnée par le TLC.

Si X_i sont des v.a.i.i.d. de loi μ, et si $E(|f(X_1)|^2) < \infty$, alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\operatorname{var}(f(X_1))}}\left(\bar{I}_n - I\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{loi}}{\longrightarrow}} Z\,,\ \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1)\,. \tag{1}$$

Comme $P\left[|Z| \le 1.96\right] = 0.95$, on a donc pour n "grand",

$$P\left[\bar{I}_n - 1.96\frac{\sqrt{\operatorname{var}(f(X_1))}}{\sqrt{n}} \le I \le \bar{I}_n + 1.96\frac{\sqrt{\operatorname{var}(f(X_1))}}{\sqrt{n}}\right] \approx 0.95\,.$$

L'approximation faite est donc en $1/\sqrt{n}$. C'est relativement mauvais si on compare aux différentes méthodes déterministes connues (trapèzes, Simpson, ...). Toutefois, contrairement aux méthodes déterministes, la vitesse de la méthode de Monte Carlo ne dépend ni de la dimension de E, ni de la régularité de la fonction f. Elle est donc utile en dimension grande (voire infinie), et/ou lorsque la fonction f est très irrégulière.

Par ailleurs, l'approximation faite est d'autant meilleure que la variance de $f(X_1)$ est faible. On peut estimer cette variance par la variance empirique

$$S_n^2 \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(X_i) - \bar{I}_n)^2 \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \operatorname{var}(f(X_1))\,. \tag{2}$$

On déduit des résultats de convergence (1) et (2) que

$$\frac{\sqrt{n}}{S_n}(\bar{I}_n - I) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{loi}}{\longrightarrow}} Z\,,\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)\,.$$

On a donc à nouveau lorsque n est grand

$$P\left[\bar{I}_n - 1.96\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq I \leq \bar{I}_n + 1.96\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right] \approx 0.95\,. \tag{3}$$

Exercice 1. Calcul du prix du "call" et du "put".

Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$ and $K \in \mathbb{R}^+$, on définit les quantités C et P (respectivement le "call" et le "put") par

$$\begin{aligned} C &= E\left[(e^{\beta X} - K)_+\right]\,, \\ P &= E\left[(K - e^{\beta X})_+\right]\,. \end{aligned}$$

(Pour une interprétation de ces quantités en finance, voir la fin du TP.)

1. Soit Φ la fonction $\Phi(x) = P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$. On vérifiera que

$$C = e^{\frac{\beta^2}{2}}\Phi\left(\frac{\log(K)}{\beta} - \beta\right) - K\Phi\left(\frac{\log(K)}{\beta}\right)\,; \tag{4}$$

$$P = K\Phi\left(-\frac{\log(K)}{\beta}\right) - e^{\frac{\beta^2}{2}}\Phi\left(\beta - \frac{\log(K)}{\beta}\right)\,. \tag{5}$$

2. Mettre en oeuvre une méthode de Monte-Carlo pour le calcul de C. Tracer sur un même graphe la valeur de C donnée par (4), la valeur approchée de C donnée par la méthode de Monte Carlo, et les bornes de l'intervalle de confiance donné par (3), en fonction du nombre de simulations.

3. Même question que 2. pour P.

4. Commenter.

3 Méthodes de réduction de la variance.

Comme on l'a déjà fait remarquer, la vitesse de convergence de la méthode de Monte Carlo est d'autant meilleure que la variance de $f(X_1)$ est faible. Diverses méthodes ont été proposées pour réduire cette variance. En voici quelques une.

3.1 Échantillonnage préférentiel.

Soit à calculer $I = \int f(x)g(x)\,dx$ où g est une densité de probabilité. Une première méthode est d'approcher I par $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$ où les X_i sont des v.a.i.i.d. de loi de densité g.

Soit maintenant $\tilde{f}$ une autre densité de probabilité telle que $\tilde{f} > 0$. On peut récrire I sous la forme $I = \int \frac{f(x)g(x)}{\tilde{f}(x)}\tilde{f}(x)\,dx$. Cette écriture suggère d'approcher I par $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{fg}{\tilde{f}}(Y_i)$, où les Y_i sont des v.a.i.i.d. de loi de densité $\tilde{f}$. On a gagné quelque chose si

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\left(\frac{fg}{\tilde{f}}(Y_1)\right) \le \operatorname{var}(f(X_1)) \quad &\Leftrightarrow \quad E\left[\left(\frac{fg}{\tilde{f}}\right)^2(Y_1)\right] \le E\left[f^2(X_1)\right] \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{f^2(x)g^2(x)}{\tilde{f}(x)}dx \le \int f^2(x)g(x)\,dx\,. \qquad (6) \end{aligned}$$

On doit donc choisir $\tilde{f}$ de telle sorte que :
- $\tilde{f}$ soit facile à simuler ;
- $\tilde{f}$ vérifie (6).

Une façon d'obtenir (6), est de choisir $\tilde{f}$ "proche" de fg (ce qui suppose que f est positive), afin d'avoir une variance proche de zéro, et de renormaliser afin de faire de $\tilde{f}$ une probabilité.

Exercice 2. Échantillonage préférentiel pour le calcul du "call".
Soit à calculer $C = E[(e^X - 1)_+]$, où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. On a $C = \int_0^\infty (e^x - 1)e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$. Pour x petit, $e^x - 1 \approx x$. On écrit alors

$$C = \int_0^\infty \frac{e^x - 1}{x} x e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_0^\infty \frac{e^{\sqrt{2y}} - 1}{\sqrt{2y}} e^{-y}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E\left[\frac{e^{\sqrt{2Y}} - 1}{\sqrt{2Y}}\right],\ Y \sim \mathcal{E}(1)\,. \qquad (7)$$

Estimez C par une méthode de Monte-Carlo basée sur l'expression (7). Comparez à la méthode de l'exercice 1, en terme de précision de l'approximation, et en terme de temps calcul.

3.2 Variables de contrôle.

Soit à approcher $I = E[f(X)]$. On peut toujours écrire $I = E(f(X) - h(X)) + E(h(X))$. Supposons que l'on sache calculer $E(h(X))$ de façon explicite. Le calcul approché de I se ramène au calcul approché de $E(f(X) - h(X))$. On a gagné quelque chose si $\operatorname{var}(f(X) - h(X)) \le \operatorname{var}(f(X))$.

Exercice 3. Variables de contrôle pour le calcul du "call".
Soit à calculer $C = E[(e^X - 1)_+]$, où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit $P = E[(1 - e^X)_+]$. On a $C - P = E(e^X - 1) = e^{1/2} - 1$; i.e. $C = P + \sqrt{e} - 1$. Pour avoir une valeur approchée de C, il suffit d'avoir une valeur approchée de P.

Estimez C par une méthode de Monte-Carlo basée sur le calcul approché de P. Comparez aux méthodes de l'exercice 1 et 2, en terme de précision de l'approximation, et en terme de temps calcul.

3.3 Variables antithétiques.

Soit toujours à calculer $I = E(f(X))$. Supposons que pour une transformation T, X et $T(X)$ ait la même loi. On peut alors écrire $I = E\left[\frac{f(X)+f(T(X))}{2}\right]$, et approcher I par

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{f(X_i)+f(T(X_i))}{2}$. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(\tfrac{f(X_1)+f(T(X_1))}{2}\right) &= E\left[\left(\tfrac{f(X_1)+f(T(X_1))}{2}\right)^2\right] - I^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\left(2E[f^2(X_1)] + 2E[f(X_1)f(T(X_1))]\right) - I^2 \quad \text{car } X \overset{\text{loi}}{=} T(X)\,, \\
&\leq \tfrac{1}{2}\left(E[f^2(X_1)] + E[f^2(X_1)]\right) - I^2 \quad \text{par Hölder} \\
&= \operatorname{var}(f(X_1)
\end{aligned}$$

On gagne donc toujours en terme de qualité de l'approximation Monte-Carlo.

Exercice 4. Variables de contrôle pour le calcul du "call".
Soit à calculer $C = E[(e^X - 1)_+]$, où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Comme X et $-X$ ont même loi, on peut approcher C par $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n (e^{X_i} - 1)_+ + (e^{-X_i} - 1)_+$. Comparez cette méthode aux méthodes précédentes.

4 Interprétation de P et C en finance.

En finance, le "call" est une option d'achat. A l'instant 0, j'achète à un prix C le droit d'acheter à l'instant T une action donnée à un prix K fixé, et ce quel que soit le prix de l'action à l'instant T. Soit (X_t) le prix (aléatoire) de l'action considérée à l'instant t. Si $X_T \geq K$, j'exerce mon droit, j'achète l'action au prix K, et mon gain est de $X_T - K - C = (X_T - K)_+ - C$. En revanche, si $X_T < K$, je n'exerce pas mon droit, je n'achète pas l'action, et mon gain est donc de $-C = (X_T - K)_+ - C$. En moyenne, mon gain sera donc de $E[(X_T - K)_+] - C$. Pour que le jeu soit équitable (une condition raisonnable pour que deux joueurs acceptent d'y jouer), il faut donc que le prix C de l'option d'achat soit tel que $C = E[(X_T - K)_+]$.

Une modélisation couramment utilisée pour le prix d'une action est la suivante : entre l'instant t_k et t_{k+1}, le prix de l'action évolue suivant la loi

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = \xi_{k+1} X_{t_k}\,,$$

où les ξ_k sont des v.a.i.i.d. centrées. On a donc

$$X_{t_k} = \prod_{j=1}^k (1+\xi_j) X_0 = \exp\left(\sum_{j=1}^k \log(1+\xi_j)\right) X_0\,.$$

Si le pas d'échantillonage en temps est petit, X_T est l'exponentielle de la somme d'un grand nombre de v.a.i.i.d., et suit donc par le TLC une loi approximativement gaussienne. On arrive donc pour C à une formule du type $C = E[(e^G - K)_+]$, où G est gaussienne. La formule précédente a été donnée par Black et Scholes, et leur a valu le prix Nobel d'économie...

De la même façon, le "put" est une option de vente. A l'instant 0, j'achète à un prix P le droit de vendre à l'instant T une action donnée à un prix K fixé, et ce quel que soit le prix de l'action à l'instant T. Si $X_T \geq K$, je n'exerce pas mon droit, je ne vends pas l'action, et mon gain est donc de $-P = (K - X_T)_+ - P$. En revanche, si $X_T < K$, j'exerce mon droit, je vends l'action, et mon gain est donc de $(K - X_T) - P = (K - X_T)_+ - P$. En moyenne, mon gain sera donc de $E[(X_T - K)_+] - P$. Pour que le jeu soit équitable, il faut donc que le prix P de l'option de vente soit tel que $P = E[(K - X_T)_+]$.