

Correction du devoir du 12/12/2011

Exercice 1: Montrons tout d'abord la convergence de σ_n^2 . Notons ϕ_n et ϕ les fonctions caractéristiques de X_n et X . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_n(t) = e^{i\mu_n t} e^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}}$. Comme $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\mu_n t} e^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} = \phi(t). \quad (1)$$

En passant au module, on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} = |\phi(t)|$. Ceci donne le résultat en passant au log dès qu'on peut trouver $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi(t_0)| > 0$ (et on aura alors $\sigma^2 = -\frac{2}{t_0^2} \log |\phi(t_0)| \geq 0$ car $|\phi(t_0)| \leq 1$). Un tel t_0 existe car ϕ est continue et vaut 1 en 0.

Montrons maintenant que la suite μ_n est bornée. Pour tout $K > 0$,

$$|\mu_n| = |\mathbb{E}[X_n]| \leq E[|X_n|] \leq K + E[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n| > K}] \leq K + \sqrt{E[X_n^2]} \sqrt{\mathbb{P}[|X_n| > K]}.$$

Notez que $\sqrt{E[X_n^2]} = \sqrt{\sigma_n^2 + \mu_n^2} \leq \sigma_n + |\mu_n|$. De plus, comme X_n converge en loi vers X , la suite X_n est tendue. On peut donc trouver K_0 tel que $\sup_n \mathbb{P}[|X_n| \geq K_0] \leq \frac{1}{4}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mu_n| \leq K_0 + \frac{1}{2}(\sigma_n + |\mu_n|) \Leftrightarrow |\mu_n| \leq 2K_0 + \sigma_n.$$

Comme la suite (σ_n) converge, elle est bornée, et on en déduit que la suite (μ_n) est bornée. Soit alors μ et μ' deux valeurs d'adhérence de la suite (μ_n) . En passant à la limite dans (1) le long de deux sous-suites, on obtient

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, e^{i\mu t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} &= e^{i\mu' t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, e^{i\mu t} &= e^{i\mu' t} \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \exists k(t) \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t(\mu - \mu') &= 2\pi k(t). \end{aligned}$$

La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t(\mu - \mu') \in \mathbb{R}$ est continue. Il en est donc de même de la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto k(t) \in \mathbb{Z}$. Comme cette dernière est à valeurs dans \mathbb{Z} , elle est nécessairement constante : $\forall t \in \mathbb{R}, k(t) = k(0) = 0$. Par conséquent, $\forall t \in \mathbb{R}, t(\mu - \mu') = 0$. On a donc $\mu = \mu'$ et la suite (μ_n) converge vers μ .

On déduit alors de (1) que $\phi(t) = \exp(it\mu) \exp(-\frac{\sigma^2 t^2}{2})$, et que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Problème 1:

1. (a) On démontre le résultat par récurrence sur n . L'égalité est trivialement vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie pour n et montrons-la à l'ordre $n + 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_{n+1})^4] &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^4] \\ &= \mathbb{E}[S_n^4] + \mathbb{E}[X_{n+1}^4] + 4\mathbb{E}[S_n^3 X_{n+1}] + 6\mathbb{E}[S_n^2 X_{n+1}^2] + 4\mathbb{E}[S_n X_{n+1}^3]. \end{aligned}$$

Les variables X_i étant indépendantes, S_n et X_{n+1} sont indépendantes. Ainsi,

$$\mathbb{E}[S_n^3 X_{n+1}] = \mathbb{E}[S_n^3] \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0,$$

car les variables X_i sont centrées. De même, $\mathbb{E}[S_n X_{n+1}^3] = \mathbb{E}[S_n] \mathbb{E}[X_{n+1}^3] = 0$. Enfin,

$$\mathbb{E}[S_n^2 X_{n+1}^2] = \mathbb{E}[S_n^2] \mathbb{E}[X_{n+1}^2] = \text{var}(S_n) \mathbb{E}[X_1^2] = n \text{var}(X_1) \mathbb{E}[X_1^2] = n \mathbb{E}[X_1^2]^2.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence à l'ordre n , on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_{n+1})^4] &= n \mathbb{E}[X_1^4] + 3n(n-1) \mathbb{E}[X_1^2]^2 + \mathbb{E}[X_1^4] + 6n \mathbb{E}[X_1^2]^2 \\ &= (n+1) \mathbb{E}[X_1^4] + 3n(n+1) \mathbb{E}[X_1^2]^2. \end{aligned}$$

(b) En utilisant l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}[|S_n/n| > \epsilon] = \mathbb{P}[S_n^4 > n^4 \epsilon^4] \leq \frac{1}{n^4 \epsilon^4} \mathbb{E}[S_n^4].$$

D'après 1.a., $\frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{n^4} \simeq \frac{3\mathbb{E}[X_1^2]^2}{n^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$, et est donc le terme général d'une série convergente.

(c) D'après 1.b., pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_n \mathbb{P}[|S_n/n| > \epsilon] < +\infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left[\limsup \left\{ \frac{|S_n|}{n} > \epsilon \right\}\right] = 0$.

(d)

$$\left\{ \limsup_n \frac{|S_n|}{n} > \epsilon \right\} \subset \left\{ \frac{|S_n|}{n} > \epsilon \text{ pour une infinité de } n \right\} = \limsup_n \left\{ \frac{|S_n|}{n} > \epsilon \right\}.$$

(e) Soit $A_\epsilon = \left\{ \limsup_n \frac{|S_n|}{n} > \epsilon \right\}$. Il résulte de 1.c. et 1.d. que $\mathbb{P}[A_\epsilon] = 0$. Soit alors $B = \bigcap_k A_{1/k}^c$. B est l'intersection dénombrable d'évènements de probabilité 1. Donc $\mathbb{P}[B] = 1$. De plus, si $\omega \in B$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\limsup_n \frac{|S_n(\omega)|}{n} \leq \frac{1}{k}$. En faisant tendre k vers l'infini, on obtient que pour tout $\omega \in B$, $\lim_n \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

2. (a) $\mathbb{E}[X_n^2] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X_n^4]} \leq \sqrt{M}$ d'après (H).

(b) En utilisant que les variables X_i sont indépendantes et centrées, le même calcul qu'en 1.a. donne

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^4] = \mathbb{E}[S_n^4] + \mathbb{E}[X_{n+1}^4] + 6\mathbb{E}[S_n^2] \mathbb{E}[X_{n+1}^2].$$

De plus, $\mathbb{E}[S_n^2] = \text{var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] \leq n\sqrt{M}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^4] \leq \mathbb{E}[S_n^4] + M + 6n\sqrt{M}\sqrt{M} = \mathbb{E}[S_n^4] + (6n+1)M.$$

On a donc

$$\mathbb{E}[S_n^4] - \mathbb{E}[S_1^4] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[S_{k+1}^4] - \mathbb{E}[S_k^4] \leq \sum_{k=1}^{n-1} (6k+1)M = \left(6\frac{n(n-1)}{2} + n-1\right)M.$$

Comme $\mathbb{E}[S_1^4] = \mathbb{E}[X_1^4] \leq M$, on obtient

$$\mathbb{E}[S_n^4] \leq (3n(n-1) + n)M = (3n^2 - 2n)M.$$

(c) $\frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{n^4} \leq \frac{3M}{n^2}$ et est donc le terme général d'une série convergente. Le même raisonnement qu'en 1. donne alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0$ p.s..