

Correction des exercices du chapitre 8

Exercice 8: L'égalité cherchée n'est rien d'autre que le théorème de Pythagore dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Notons $V = L^2(\Omega, \mathcal{H}, P)$ et $W = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$. V et W sont deux sous-espaces vectoriels fermés de H . Comme $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, W est un sous-espace vectoriel de V . Notons P_V (respectivement P_W) la projection orthogonale sur V (respectivement W), $\|\cdot\|$ la norme sur H ($\|X\|^2 = \mathbb{E}[X^2]$) et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de H ($\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] &= \|X - P_W(X)\|^2 = \|X - P_V(X) + P_V(X) - P_W(X)\|^2 \\ &= \|X - P_V(X)\|^2 + \|P_V(X) - P_W(X)\|^2 + 2\langle X - P_V(X), P_V(X) - P_W(X) \rangle \\ &= \|X - P_V(X)\|^2 + \|P_V(X) - P_W(X)\|^2, \end{aligned}$$

car $X - P_V(X) \in V^\perp$ et $P_V(X) - P_W(X) \in V$ et sont donc orthogonaux. Ainsi,

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{H}])^2] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2].$$

Exercice 9: On sait déjà d'après le cours que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$ p.s.. Si $A = \{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = 0\}$, il s'agit donc de montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$. $A \in \mathcal{G}$ et donc $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mathbb{1}_A] = 0$ par définition de A . Comme $X \mathbb{1}_A \geq 0$ p.s., on en déduit que $X \mathbb{1}_A = 0$ p.s.. Comme $X > 0$ p.s., il en résulte que $\mathbb{1}_A = 0$ p.s. et donc que $\mathbb{P}(A) = 0$.

La réciproque est évidemment fautive. Par exemple, soit X une variable définie sur (Ω, \mathcal{F}, P) et de loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Soit $A = \{X = 1\}$ et $\mathcal{G} = \sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. D'après l'exercice 1,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{1}_A + \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A^c}]}{\mathbb{P}(A^c)} \mathbb{1}_{A^c} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{1}_A + \frac{\mathbb{E}[0 \mathbb{1}_{X=0} + 2 \mathbb{1}_{X=2}]}{2/3} \mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c} = 1$$

Donc $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0$ p.s. et $\mathbb{P}(X = 0) = 1/3$.

Exercice 10: On a $(X + \mathbb{E}[Y|X])^p = (\mathbb{E}[X + Y|X])^p \leq \mathbb{E}[(X + Y)^p|X]$ p.s., par l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle. En passant à l'espérance dans cette inégalité, on obtient

$$\mathbb{E}[(X + \mathbb{E}[Y|X])^p] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X + Y)^p|X]] = \mathbb{E}[(X + Y)^p],$$

ce qui est l'inégalité cherchée.

En particulier, si X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$ et $\|X + Y\|_p \geq \|X + \mathbb{E}[Y]\|_p$.

Exercice 11: $\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - 2\mathbb{E}[XY]$. On calcule $\mathbb{E}[XY]$ de deux façons différentes. Si on conditionne par X , $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[X^2]$. Si on conditionne par Y , $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[Y^2]$. On en déduit que $\mathbb{E}[(X - Y)^2] = 0$, soit $X = Y$ p.s..

Exercice 12: Soit Z une variable \mathcal{B} -mesurable et bornée.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[fXZ] &= \mathbb{E}_Q[XZ] \text{ par définition de } Q, \\ &= \mathbb{E}_Q[\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{B})Z] \text{ par définition de } E_Q[\cdot|\mathcal{B}], \\ &= \mathbb{E}_P[f\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{B})Z] \\ &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P(f|\mathcal{B})\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{B})Z] \text{ car } \mathbb{E}_Q(X|\mathcal{B})Z \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable.} \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}_P(f|\mathcal{B})\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{B})$ est \mathcal{B} -mesurable, on en déduit que $\mathbb{E}_P(fX|\mathcal{B}) = \mathbb{E}_P(f|\mathcal{B})\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{B})$ P -p.s..

Si f est \mathcal{B} -mesurable, $\mathbb{E}_P(fX|\mathcal{B}) = f\mathbb{E}_P(X|\mathcal{B})$ et $\mathbb{E}_P(f|\mathcal{B}) = f$. Comme $f > 0$ P -p.s., on a alors $\mathbb{E}_P(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}_Q(X|\mathcal{B})$ pour toute variable X de $L^1(\omega, \mathcal{A}, P)$.